数理解析研究所講究録
第 336 巻 1978 年 1-23

多値論理における valid sequent について

高野 道夫

小論では，それぞれ数個ずつの真なる値と偽なる値をもつ多値論理——正確には有限多値命題論理——を扱う．

多値論理は (i) 真理値の集合である空でない集合M，(ii) 真なる値の集合である集合Mの部分集合N（差集合 M−N が偽なる値の集合），それに (iii) その論理で認められた各論理記号F——k変数とする——に対し，それの表わす真理関数である $M^k \to M$ なる写像 Φ_F，により定まる．そして，集合Mが有限集合で m 個の元をもつとき，この多値論理を "m 値論理" という．

上述のような多値論理が1つ与えられたとしよう．すると各 formula は，それに含まれるすべての命題変数に対し真理値である集合Mの元をそれぞれ対応させると，論理記号は (iii) で対応させられた写像として計算することにより，その formula の真理値である集合Mの元が求まる．このとき，求まっ

た元が部分集合Nの元であるかないかに応じ，その formula は命題変数への先ほどの対応で“真である”あるいは“偽である”というのである．そして sequent

$$A_1, \cdots, A_\lambda \longrightarrow B_1, \cdots, B_\mu$$

は，これに含まれるすべての命題変数に真理値である集合Mの元をどのように対応させようと，その対応で，formula $A_1, \cdots, A_\lambda$ がすべて真になれば formula $B_1, \cdots, B_\mu$ のうちに真であるものが少なくとも1つはあるとき，与えられた多値論理で“valid である”という．このようにして，各多値論理に対し“valid sequent”というものが決まる．

以下に例として，いずれも論理記号としては2変数の‘∨’と1変数の‘¬’のみを認める多値論理を3つ挙げてみよう．

例1．真理値の集合：{1, 2}；真なる値の集合：{1}；論理記号に対応する真理関数：

∨：

a \ b	1	2
1	1	1
2	1	2

，

¬：

a	
1	2
2	1

．

これは“古典論理”である．

例2．真理値の集合：{1, 2, 3}；真なる値の集合：{1, 2}；論理記号に対応する真理関数：

∨:

a \ b	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	1	2	3

,

¬:

a	
1	3
2	3
3	1

.

この論理で真なる値の集合を $\{1\}$ に変更したものが "Gödelの3値論理" である.

例3. 真理値の集合: $\{1, 2, 3\}$; 真なる値の集合: $\{1, 2\}$; 論理記号に対応する真理関数:

∨:

a \ b	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	1	2	3

,

¬:

a	
1	3
2	2
3	1

.

以上の例について, 証明は(本文を読めばわかるから)ここでは略すが実は, 例2の3値論理における valid sequent と例1の2値論理における valid sequent とは完全に一致するのである. したがって,

例2の3値論理は valid sequent の範囲を変えずに真理値の個数をへらすことができる.

しかし, これも証明はここでは略すが,

例3の3値論理はvalid sequentの範囲を変えずに真理値の個数をへらすことができない。

それでは，与えられた多値論理がvalid sequentの範囲を変えずに真理値の個数をへらすことができるかどうかの基準はどこにあるのだろうか？　これが小論の主題であり，第6項の定理でこれに答える．一方，与えられた多値論理からvalid sequentの範囲を変えずに真理値の個数をふやすことは，第5項の定理が示すように，必ずできるのである．

小論では自然数——0または正整数——nに対し$N(n)$により集合$\{1, 2, \cdots, n\}$を表わす．

1．小論では1つの言語を固定して考える．それは次の記号をもっている：

1°）無限個の命題変数．$X, Y, X_1, \cdots$で表わす．

2°）任意個の論理記号．おのおのに何変数の論理記号であるかを示す自然数が指定されている．

3°）かっこ（，）；カンマ，；矢印 $\longrightarrow$．

命題変数と論理記号，かっこ，カンマを用いて“論理式（formula）”が構成される．また，論理式$A_1, \cdots, A_\lambda$，$B_1, \cdots, B_\mu$（λ，μは任意の自然数）とカンマ，矢印を用いた

$$A_1, \cdots, A_\lambda \longrightarrow B_1, \cdots, B_\mu$$

という表現が“式（sequent）”であり‘$A_1, \cdots, A_\lambda$’，‘$B_1, \cdots, B_\mu$’がそれぞれこの式の“左辺”，“右辺”である．

2．mを正整数とする．

“m値枠”とは論理記号全体の集合を定義域とする写像Φで，各論理記号F——k変数とする——に対し$\Phi(F)$が$N(m)^k \longrightarrow N(m)$なる写像であるもの，のことである．

m値枠Φ，相異なる$X_1, \cdots, X_\nu$以外の命題変数を含まない論理式$A(X_1, \cdots, X_\nu)$，および集合$N(m)$の元$a_1, \cdots, a_\nu$が与えられたとき‘命題変数$X_1, \cdots, X_\nu$を真理値$a_1, \cdots, a_\nu$，論理記号$F, G, \cdots$を真理関数$\Phi(F), \Phi(G), \cdots$で解釈したときの論理式$A(X_1, \cdots, X_\nu)$の真理値’である集合$N(m)$の元を“$A^\Phi[a_1, \cdots, a_\nu]$”で表わす．すなわち，

i)　$A(X_1, \cdots, X_\nu)$がX_iなら

$$A^\Phi[a_1, \cdots, a_\nu] = a_i;$$

ii)　$A(X_1, \cdots, X_\nu)$が$F(A_1(X_1, \cdots, X_\nu), \cdots, A_k(X_1, \cdots, X_\nu))$なら

$$A^\Phi[a_1, \cdots, a_\nu] = \Phi(F)(A_1^\Phi[a_1, \cdots, a_\nu], \cdots, A_k^\Phi[a_1, \cdots, a_\nu]).$$

m値枠Φと$0 \leq n \leq m$なる整数nの対(Φ, n)のことを“m値論理”という．m値論理(Φ, n)は，n個の真なる値$1, \cdots, n$と$(m-n)$個の偽なる値$n+1, \cdots, m$を真理値としてもち，論理記号$F, G, \cdots$をそれぞれ真理関数

$\Phi(F)$, $\Phi(G)$, --- と解釈する論理である.

m値論理 (Φ, n) および $X_1, \cdots, X_\nu$ 以外の命題変数を含まない式 $\gamma(X_1, \cdots, X_\nu)$:

$$A_1(X_1, \cdots, X_\nu), \cdots, A_\lambda(X_1, \cdots, X_\nu)$$
$$\longrightarrow B_1(X_1, \cdots, X_\nu), \cdots, B_\mu(X_1, \cdots, X_\nu)$$

が与えられたとする. 集合 $N(m)$ の元 $a_1, \cdots, a_\nu$ に対し,

$$A_1^{\Phi}[a_1, \cdots, a_\nu] \in N(n) \ \& \cdots \& \ A_\lambda^{\Phi}[a_1, \cdots, a_\nu] \in N(n)$$
$$.\Longrightarrow. \ B_1^{\Phi}[a_1, \cdots, a_\nu] \in N(n) \vee \cdots \vee B_\mu^{\Phi}[a_1, \cdots, a_\nu] \in N(n)$$

のとき "$\gamma[a_1, \cdots, a_\nu]$ は m値論理 (Φ, n) で真である" という. 集合 $N(m)$ の任意の元 $a_1, \cdots, a_\nu$ に対し $\gamma[a_1, \cdots, a_\nu]$ が m値論理 (Φ, n) で真であるとき "式 $\gamma(X_1, \cdots, X_\nu)$ は m値論理 (Φ, n) で恒真 (valid) である" という. m値論理 (Φ, n) における恒真式全体の集合を "$W_m(\Phi, n)$" と表わす.

3. まず次の補題を証明しよう.

補題. m値論理 (Φ, n), p値論理 (Ψ, q), それに $N(m) \rightarrow N(p)$ なる写像 σ に関する次の性質 C1, C2, C3 を考える:

C1. 各論理記号 F —— k変数とする —— に対し,

$\forall a_1, \cdots, a_k \in N(m)$

$$\sigma(\Phi(F)(a_1, \cdots, a_k)) = \Psi(F)(\sigma(a_1), \cdots, \sigma(a_k)).$$

C2. $\forall a \in N(m) \quad \sigma(a) \in N(q) \Longleftrightarrow a \in N(n)$.

C3. σは全射である.

このとき，性質C1とC2が成り立てば

$$W_p(\Psi, q) \subseteq W_m(\Phi, n)$$

であり，性質C1，C2およびC3が成り立てば

$$W_p(\Psi, q) = W_m(\Phi, n)$$

である.

証明．νを自然数，$X_1, \cdots, X_\nu$を相異なる命題変数とする．性質C1が成り立てば，$X_1, \cdots, X_\nu$以外の命題変数を含まない任意の論理式$A(X_1, \cdots, X_\nu)$に対し

$$\forall a_1, \cdots, a_\nu \in N(m)$$

$$\sigma(A^{\Phi}[a_1, \cdots, a_\nu]) = A^{\Psi}[\sigma(a_1), \cdots, \sigma(a_\nu)]$$

となることが，論理式の構成にそった帰納法で示される．したがって，さらに性質C2も成り立てば，$X_1, \cdots, X_\nu$以外の命題変数を含まない任意の論理式$A(X_1, \cdots, X_\nu)$に対し

$$\forall a_1, \cdots, a_\nu \in N(m)$$

$$A^{\Phi}[a_1, \cdots, a_\nu] \in N(n) \Longleftrightarrow A^{\Psi}[\sigma(a_1), \cdots, \sigma(a_\nu)] \in N(q)$$

となる．

上の性質から補題の結論を導くのは容易である．

4．ここで，与えられた論理からもう1つの論理を作る2つの構成法を与えよう．これらはそれぞれ第6，7項の定理

の証明に用いられる．

(a) 第1のものは，m値論理(Φ, n)と次の性質(#)，(##)を満たす集合$N(m)$上の同値関係$\equiv$からの

$$(\Phi, n)/\equiv$$

とでもいうべきp値論理(Ψ, q)の構成である．

(#) 各論理記号F——k変数とする——に対し

$\forall a_1, \cdots, a_k, b_1, \cdots, b_k \in N(m)$

$a_1 \equiv b_1 \ \& \cdots \& \ a_k \equiv b_k$

$.\Longrightarrow \Phi(F)(a_1, \cdots, a_k) \equiv \Phi(F)(b_1, \cdots, b_k).$

(##) $\forall a, b \in N(m) \quad a \equiv b \Longrightarrow. \ a \in N(n) \Longleftrightarrow b \in N(n).$

まずp, qはそれぞれ集合$N(m)$，$N(n)$の同値関係$\equiv$による同値類の個数——後者は正確には，$\equiv$を集合$N(n)$に制限した$N(n)$上の同値関係による同値類の個数——である．すると(##)も考慮にいれると次の性質(4.1)，(4.2)を満たす$N(m) \to N(p)$なる写像σをとることができる：

(4.1) $\forall a, b \in N(m) \quad \sigma(a) = \sigma(b) \Longleftrightarrow a \equiv b.$

(4.2) $\forall a \in N(m) \quad \sigma(a) \in N(q) \Longleftrightarrow a \in N(n).$

するとpのとり方と(4.1)より，

(4.3) σは全射である．

次にp値枠Ψは(#)，(4.1)，(4.3)により定まる，次の性質(4.4)を満たすものである：

(4.4)　各論理記号 F —— k 変数とする —— に対し

$$\forall a_1, \cdots, a_k \in N(m)$$

$$\Psi(F)(\sigma(a_1), \cdots, \sigma(a_k)) = \sigma(\Phi(F)(a_1, \cdots, a_k)).$$

これで p 値論理 (Ψ, q) が定義されたが，(4.4)，(4.2)，(4.3) がそれぞれ補題の性質 C1，C2，C3 だから，

$$W_p(\Psi, q) = W_m(\Phi, n).$$

(b)　第2のものは，m 値論理 (Φ, n) と次の性質 (b)，(bb) を満たす集合 $N(m)$ の部分集合 S からの

$$(\Phi, n) \restriction S$$

とでもいうべき p 値論理 (Ψ, q) の構成である．

(b)　各論理記号 F —— k 変数とする —— に対し

$$\forall a_1, \cdots, a_k \in N(m)$$

$$a_1 \in S \ \& \cdots \& \ a_k \in S \ . \Longrightarrow \Phi(F)(a_1, \cdots, a_k) \in S.$$

(bb)　$S \neq \phi$.

まず p，q はそれぞれ集合 S，$S \cap N(n)$ の元の個数である（(bb) より $p \neq 0$）．すると次の性質 (4.5)，(4.6) を満たす $N(p) \to N(m)$ なる写像 τ をとることができる：

(4.5)　τ の値域は S である．

(4.6)　$\forall x \in N(p) \quad \tau(x) \in N(n) \Longleftrightarrow x \in N(q)$.

次に p 値枠 Ψ は (b)，p のとり方，(4.5) により定まる，次の性質 (4.7) を満たすものである：

(4.7)　各論理記号 F —— k 変数とする —— に対し

$\forall x_1, \cdots, x_k \in N(p)$

$$\tau(\Psi(F)(x_1, \cdots, x_k)) = \Phi(F)(\tau(x_1), \cdots, \tau(x_k)).$$

これで p 値論理 (Ψ, q) が定義されたが，(4.7)，(4.6) がそれぞれ補題の性質 C1，C2 にあたるので，

$$W_p(\Psi, q) \supseteq W_m(\Phi, n).$$

5. 次の定理が示すように，恒真式の範囲を変えずに真理値の個数をふやすことは，いくつふやすこともいつでも可能である．

定理．m 値論理 (Φ, n) と $p \geq m$ なる整数 p に対し，

$$W_p(\Psi, q) = W_m(\Phi, n)$$

となる p 値論理 (Ψ, q) が存在する．

証明．まず $n \leq q \leq p-m+n$ なる整数 q をとる．すると次の性質 (5.1)，(5.2) を満たす $N(p) \to N(m)$ なる写像 τ をとることができる：

(5.1)　τ は全射である．

(5.2)　$\forall x \in N(p)$　$\tau(x) \in N(n) \Longleftrightarrow x \in N(q).$

次に (5.1) により，次の性質 (5.3) を満たすように p 値枠 Ψ をとる：

(5.3)　各論理記号 F —— k 変数とする —— に対し

$\forall x_1, \cdots, x_k \in N(p)$

$$\tau(\Psi(F)(x_1,\cdots,x_k)) = \Phi(F)(\tau(x_1),\cdots,\tau(x_k)).$$

これでp値論理(Ψ, g)が定義されたが，(5.3)，(5.2)，(5.1)がそれぞれ補題の性質C1，C2，C3だから，

$$W_p(\Psi, g) = W_m(\Phi, n).$$

6. 恒真式の範囲を変えずに真理値の個数をへらすことのできない論理を特徴づける——恒真式の範囲を変えずに真理値の個数をへらすことのできる論理を特徴づける，ともいえるが——次の命題の性質D1とD3の同値性が小論の主定理である．

定理．m値論理(Φ, n)に関する次の性質D1，D2，D3は同値である．ここに，$X, Y_1, \cdots, Y_m$は相異なる命題変数である：

D1．次のような正整数pとp値論理(Ψ, g)は存在しない：

$$p < m \ \& \ W_p(\Psi, g) = W_m(\Phi, n).$$

D2．次のような正整数pとp値論理(Ψ, g)は存在しない：

$$p < m \ \& \ W_p(\Psi, g) \subseteq W_m(\Phi, n).$$

D3．集合$N(m)$の相異なる元a, bよりなるおのおのの対(a, b)に対し，$X, Y_1, \cdots, Y_m$以外の命題変数を含まない論理式$A(X, Y_1, \cdots, Y_m)$で

$$A^{\Phi}[a, 1, \cdots, m] \in N(n) \not\Leftrightarrow A^{\Phi}[b, 1, \cdots, m] \in N(n)$$

であるものが存在する.

D2 $\Longrightarrow$ D1 の証明. 明らか.

D1 $\Longrightarrow$ D3 の証明. 集合 $N(m)$ の元 a, b に対し $a \equiv b$ を,

$X, Y_1, \cdots, Y_m$ 以外の命題変数を含まない任意の論理式 $A(X, Y_1, \cdots, Y_m)$ に対し

$$A^{\Phi}[a, 1, \cdots, m] \in N(n) \Leftrightarrow A^{\Phi}[b, 1, \cdots, m] \in N(n)$$

であることを意味するものとする. すると関係 $\equiv$ は集合 $N(m)$ 上の同値関係であり, さらに 4(a) の性質 (#) および (##) を満たす. したがって 4(a) の構成により

$$W_p(\Psi, q) = W_m(\Phi, n)$$

である p 値論理 (Ψ, q) を得る. ――ここで定義した関係 $\equiv$ は実は, 性質 (#) および (##) を満たす集合 $N(m)$ 上の同値関係のうち最も広いものである.

ここで性質 D3 を否定すれば, 数 p は集合 $N(m)$ の同値関係 $\equiv$ による同値類の個数だから $p < m$ となり, 結局性質 D1 の否定が導かれた.

D3 $\Longrightarrow$ D2 の証明. 性質 D3 を仮定して, 集合 $N(m)$ の相異なる元 a, b よりなるおのおのの対 (a, b) に対し,

$$A_{ab}{}^{\Phi}[a, 1, \cdots, m] \in N(n) \not\Leftrightarrow A_{ab}{}^{\Phi}[b, 1, \cdots, m] \in N(n)$$

である，$X, Y_1, \cdots, Y_m$ 以外の命題変数を含まない論理式 $A_{ab}(X, Y_1, \cdots, Y_m)$ をとり，

$I = \{(a, b) \mid A_{ab}^{\Phi}[a, 1, \cdots, m] \in N(n),\ A_{ab}^{\Phi}[b, 1, \cdots, m] \notin N(n)\}$,

$J = \{(a, b) \mid A_{ab}^{\Phi}[a, 1, \cdots, m] \notin N(n),\ A_{ab}^{\Phi}[b, 1, \cdots, m] \in N(n)\}$

とおく．a, b が集合 $N(m)$ の相異なる元ならば $(a, b) \in I$ または $(a, b) \in J$ である．そして $\gamma(Y_1, \cdots, Y_m)$ を次の式とする：

$$\boxed{\begin{array}{l} A_{ab}(Y_a, Y_1, \cdots, Y_m) \quad (\forall a, b \text{ s.t. } (a, b) \in I), \\ A_{ab}(Y_b, Y_1, \cdots, Y_m) \quad (\forall a, b \text{ s.t. } (a, b) \in J) \\ \longrightarrow \\ A_{ab}(Y_b, Y_1, \cdots, Y_m) \quad (\forall a, b \text{ s.t. } (a, b) \in I), \\ A_{ab}(Y_a, Y_1, \cdots, Y_m) \quad (\forall a, b \text{ s.t. } (a, b) \in J) \end{array}}$$

このとき，$\gamma[1, \cdots, m]$ が m 値論理 (Φ, n) で真ではないことより $\gamma(Y_1, \cdots, Y_m) \notin W_m(\Phi, n)$.

ここで結論である性質 D2 を否定して，

$$p < m \ \& \ W_p(\Psi, q) \subseteq W_m(\Phi, n)$$

である正整数 p と p 値論理 (Ψ, q) が存在したと仮定する．すると $\gamma(Y_1, \cdots, Y_m) \notin W_p(\Psi, q)$ より，$\gamma[x_1, \cdots, x_m]$ が p 値論理 (Ψ, q) で真ではないような集合 $N(p)$ の元 $x_1, \cdots, x_m$ が存在するはずだが，このような元 $x_1, \cdots, x_m$ は式

$\gamma(Y_1,\cdots,Y_m)$ のとり方より相異ならねばならず，$p<m$ と矛盾する．

7. 次の定理は前定理の補遺であるが，証明はホイホイとはいかない．

<u>定理</u>．m 値論理 (Φ, n) に関する次の性質 E1，E2 は同値である．ここに，$X, Y_1,\cdots,Y_m$ は相異なる命題変数である：

E1．次のような正整数 p と p 値論理 (Ψ, g) は存在しない：

$$p<m \ \& \ W_p(\Psi,g) \geq W_m(\Phi,n).$$

E2．集合 $N(m)$ の相異なる元 a, b よりなるおのおのの対 (a,b) に対し，$X, Y_1,\cdots,Y_m$ 以外の命題変数を含まない論理式 $A(X,Y_1,\cdots,Y_m)$ で

$$A^{\Phi}[a,1,\cdots,m]\in N(n) \not\Leftrightarrow A^{\Phi}[b,1,\cdots,m]\in N(n)$$

であるものが存在し――これは前定理の性質 D3――，かつ集合 $N(m)$ の（必ずしも異ならない）元 a,b よりなるおのおのの対 (a,b) に対し，X 以外の命題変数を含まない論理式 $B(X)$ で

$$B^{\Phi}[a]=b$$

であるものが存在する――これを性質 $E2^-$ とする――．

E1 $\Longrightarrow$ E2 <u>の証明</u>．E1 $\Longrightarrow$ D3 は E1 $\Longrightarrow$ D1 と前定理の D1 $\Longrightarrow$ D3 による．

次に $E1 \Longrightarrow E2^{-}$ を示すために性質 $E2^{-}$ を否定して，

X 以外の命題変数を含まない任意の論理式 $B(X)$ に対し

$$B^{\Phi}[a] \neq b$$

となる集合 $N(m)$ の元 a, b をとり，

$$S = \{ B^{\Phi}[a] \mid B(X) \text{ は } X \text{ 以外の命題変数を含まない論理式} \}$$

とおく．すると集合 S は集合 $N(m)$ の部分集合であり，さらに 4(b) の性質 (b) および (bb) を満たす．したがって 4(b) の構成により

$$W_p(\Psi, g) \supseteq W_m(\Phi, n)$$

である p 値論理 (Ψ, g) を得る．ここで $b \notin S$ であり，数 p は集合 S の元の個数だから $p < m$ となり，結局性質 $E1$ の否定が導かれた．—— ここでは性質 $E2^{-}$ の否定から性質 (b) および (bb) を満たす集合 $N(m)$ の真部分集合 S の存在を導いたが，実は逆もいえる．

$E2 \Longrightarrow E1$ の証明．① 性質 $E2$ を仮定して，集合 $N(m)$ の相異なる元 a, b よりなるおのおのの対 (a, b) に対し，

$$A_{ab}^{\Phi}[a, 1, \cdots, m] \in N(n) \not\Longleftrightarrow A_{ab}^{\Phi}[b, 1, \cdots, m] \in N(n)$$

である，$X, Y_1, \cdots, Y_m$ 以外の命題変数を含まない論理式 $A_{ab}(X, Y_1, \cdots, Y_m)$ と，集合 $N(m)$ の（必ずしも異ならない）元 a, b よりなるおのおのの対 (a, b) に対し，

$$B_{ab}{}^{\Phi}[a] = b$$

である，X 以外の命題変数を含まない論理式 $B_{ab}(X)$ をとる．

② ν を正整数，$X_1, \cdots, X_\nu$ を相異なる命題変数とする．集合 $N(m)$ の元 $a_1, \cdots, a_\nu, b_1, \cdots, b_\nu$ に対し

$(a_1, \cdots, a_\nu) \veeeq (b_1, \cdots, b_\nu)$ を

$X_1, \cdots, X_\nu$ 以外の命題変数を含まない任意の論理式

$C(X_1, \cdots, X_\nu)$ に対し

$$C^{\Phi}[a_1, \cdots, a_\nu] \in N(n) \Longleftrightarrow C^{\Phi}[b_1, \cdots, b_\nu] \in N(n)$$

であることを意味するものとする．すると関係 $\veeeq$ は集合 $N(m)^\nu$ 上の同値関係である．そこで集合 $N(m)^\nu$ の同値関係 $\veeeq$ による同値類の個数を "$\bar{\bar{\nu}}$" で表わす．

このとき，

(7.1) $\bar{\bar{\nu}} > (m-1)^\nu$ となる正整数 ν が存在する．

これを証明するために，まず次の命題を示す：

(7.2) $\forall a_1, \cdots, a_\nu, b_1, \cdots, b_\nu \in N(m)$

$(a_1, \cdots, a_\nu) \veeeq (b_1, \cdots, b_\nu) \Longrightarrow. \ a_i = a_j \Longleftrightarrow b_i = b_j.$

実際，もし $(a_1, \cdots, a_\nu) \veeeq (b_1, \cdots, b_\nu)$，$a_i = a_j$ で $b_i \neq b_j$ なら

$$A_{b_i b_j}{}^{\Phi}[b_i, 1, \cdots, m] \in N(n)$$
$$\Longleftrightarrow A_{b_i b_j}{}^{\Phi}[b_i, B_{b,1}{}^{\Phi}[b_1], \cdots, B_{b,m}{}^{\Phi}[b_1]] \in N(n)$$
$$\Longleftrightarrow A_{b_i b_j}{}^{\Phi}[a_i, B_{b,1}{}^{\Phi}[a_1], \cdots, B_{b,m}{}^{\Phi}[a_1]] \in N(n)$$

$$\Longleftrightarrow A_{b_i b_j}{}^{\Phi}[a_j, B_{b,1}{}^{\Phi}[a_1], \cdots, B_{b,m}{}^{\Phi}[a_1]] \in N(n)$$
$$\Longleftrightarrow A_{b_i b_j}{}^{\Phi}[b_j, B_{b,1}{}^{\Phi}[b_1], \cdots, B_{b,m}{}^{\Phi}[b_1]] \in N(n)$$
$$\Longleftrightarrow A_{b_i b_j}{}^{\Phi}[b_j, 1, \cdots, m] \in N(n)$$

となり論理式 $A_{b_i b_j}(X, Y_1, \cdots, Y_m)$ のとり方に反してしまう.

(7.2)より, 集合 $N(m)^\nu$ の同値関係 $\stackrel{\vee}{\equiv}$ による各同値類は高々 $m!$ 個の元よりなる. したがって $m! \cdot \bar{\bar{\nu}} \geq m^\nu$ だから, 十分大きな ν をとれば $\bar{\bar{\nu}} > (m-1)^\nu$ となる.

以後は(7.1)に基づき, $\bar{\bar{\nu}} > (m-1)^\nu$ である正整数 ν を1つ固定して考え, 同値関係 $\stackrel{\vee}{\equiv}$ を単に"$\equiv$"と表わす. また, $X_1, \cdots, X_\nu$ 以外の命題変数を含まない論理式 $C(X_1, \cdots, X_\nu)$ と集合 $N(m)^\nu$ の元 $\bar{a} = (a_1, \cdots, a_\nu)$ に対し $C^{\Phi}[a_1, \cdots, a_\nu]$ を"$C^{\Phi}[\bar{a}]$"とも表わす.

③ 集合 $N(m)^\nu$ の $\bar{a} \not\equiv \bar{b}$ である元 $\bar{a}, \bar{b}$ よりなるおのおのの対 $(\bar{a}, \bar{b})$ に対し,

$$C_{\bar{a}\bar{b}}{}^{\Phi}[\bar{a}] \in N(n) \not\Longleftrightarrow C_{\bar{a}\bar{b}}{}^{\Phi}[\bar{b}] \in N(n)$$

である, $X_1, \cdots, X_\nu$ 以外の命題変数を含まない論理式 $C_{\bar{a}\bar{b}}(X_1, \cdots, X_\nu)$ をとり,

$$I = \{ (\bar{a}, \bar{b}) \mid C_{\bar{a}\bar{b}}{}^{\Phi}[\bar{a}] \in N(n),\ C_{\bar{a}\bar{b}}{}^{\Phi}[\bar{b}] \notin N(n) \},$$
$$J = \{ (\bar{a}, \bar{b}) \mid C_{\bar{a}\bar{b}}{}^{\Phi}[\bar{a}] \notin N(n),\ C_{\bar{a}\bar{b}}{}^{\Phi}[\bar{b}] \in N(n) \}$$

とおく. $\bar{a}, \bar{b}$ が集合 $N(m)^\nu$ の $\bar{a} \not\equiv \bar{b}$ である元ならば $(\bar{a}, \bar{b}) \in I$ または $(\bar{a}, \bar{b}) \in J$ である. ここで $\mathcal{R}_\pi(X_1, \cdots, X_\nu)$

(ここに π は $N(m)^\nu \to N(m)^\nu$ なる写像であり $\forall \bar{a} \in N(m)^\nu$ $\pi(\bar{a}) \neq \bar{a}$), $\gamma_{\bar{a}\bar{b}}(X_1, \cdots, X_\nu)$ (ここに $\bar{a}, \bar{b}$ は集合 $N(m)^\nu$ の元であり $\bar{a} \neq \bar{b}$), および $\exists_{\bar{e}\bar{a}\bar{b}}(X_1, \cdots, X_\nu)$ (ここに $\bar{e}$, $\bar{a}, \bar{b}$ は集合 $N(m)^\nu$ の元であり $\bar{e} \neq \bar{b}$) をそれぞれ次の式とする:

$\mathcal{R}_\pi(X_1, \cdots, X_\nu)$:

$$\boxed{\begin{array}{l} \quad C_{\pi(\bar{a})\bar{a}}(X_1, \cdots, X_\nu) \quad (\forall \bar{a} \ \text{s.t.}\ (\pi(\bar{a}), \bar{a}) \in I) \\ \longrightarrow \\ \quad C_{\pi(\bar{a})\bar{a}}(X_1, \cdots, X_\nu) \quad (\forall \bar{a} \ \text{s.t.}\ (\pi(\bar{a}), \bar{a}) \in J) \end{array}}$$

$\gamma_{\bar{a}\bar{b}}(X_1, \cdots, X_\nu)$:

$$\boxed{\begin{array}{l} \quad C_{\bar{d}\bar{a}}(X_1, \cdots, X_\nu) \quad (\forall \bar{d} \ \text{s.t.}\ (\bar{d}, \bar{a}) \in J), \\ \quad C_{\bar{e}\bar{b}}(X_1, \cdots, X_\nu) \quad (\forall \bar{e} \ \text{s.t.}\ (\bar{e}, \bar{b}) \in J) \\ \longrightarrow \\ \quad C_{\bar{d}\bar{a}}(X_1, \cdots, X_\nu) \quad (\forall \bar{d} \ \text{s.t.}\ (\bar{d}, \bar{a}) \in I), \\ \quad C_{\bar{e}\bar{b}}(X_1, \cdots, X_\nu) \quad (\forall \bar{e} \ \text{s.t.}\ (\bar{e}, \bar{b}) \in I) \end{array}}$$

$\exists_{\bar{e}\bar{a}\bar{b}}(X_1, \cdots, X_\nu)$, ただし $\bar{a} = (a_1, \cdots, a_\nu)$,
$\bar{b} = (b_1, \cdots, b_\nu)$:

$(\bar{e}, \bar{b}) \in I$ のとき:

$$\boxed{\begin{array}{l} C_{\bar{e}\bar{b}}(B_{a_1 e_1}(X_1), \cdots, B_{a_\nu e_\nu}(X_\nu)), \\ C_{\bar{d}\bar{a}}(X_1, \cdots, X_\nu) \quad (\forall \bar{d} \text{ s.t. } (\bar{d}, \bar{a}) \in J) \\ \longrightarrow \\ C_{\bar{d}\bar{a}}(X_1, \cdots, X_\nu) \quad (\forall \bar{d} \text{ s.t. } (\bar{d}, \bar{a}) \in I) \end{array}}$$

$(\bar{e}, \bar{b}) \in J$ のとき：

$$\boxed{\begin{array}{l} C_{\bar{d}\bar{a}}(X_1, \cdots, X_\nu) \quad (\forall \bar{d} \text{ s.t. } (\bar{d}, \bar{a}) \in J) \\ \longrightarrow \\ C_{\bar{d}\bar{a}}(X_1, \cdots, X_\nu) \quad (\forall \bar{d} \text{ s.t. } (\bar{d}, \bar{a}) \in I), \\ C_{\bar{e}\bar{b}}(B_{a_1 e_1}(X_1), \cdots, B_{a_\nu e_\nu}(X_\nu)) \end{array}}$$

すると，

(7.3) 式 $\mathcal{R}_\pi(X_1, \cdots, X_\nu)$, $\gamma_{\bar{a}\bar{b}}(X_1, \cdots, X_\nu)$,

$\mathfrak{H}_{\bar{e}\bar{a}\bar{b}}(X_1, \cdots, X_\nu)$ はすべて m 値論理 (Φ, n) で恒真である．

式 $\mathfrak{H}_{\bar{e}\bar{a}\bar{b}}(X_1, \cdots, X_\nu)$ が恒真であることの証明が一番面倒なので，ここではそれだけを証明する．集合 $N(m)^\nu$ の任意の元 $\bar{f} = (f_1, \cdots, f_\nu)$ をとる．$\mathfrak{H}_{\bar{e}\bar{a}\bar{b}}[f_1, \cdots, f_\nu]$ が m 値論理 (Φ, n) で真であることを示したい．集合 $N(m)^\nu$ の元 $\bar{f}$ と $\bar{a}$ について $(\bar{f}, \bar{a}) \in I$, $(\bar{f}, \bar{a}) \in J$, $\bar{f} \equiv \bar{a}$ のいずれか1つが成り立つから，これら3通りに場合を分けて考える．

i) $(\bar{f}, \bar{a}) \in I$ のとき．論理式 $C_{\bar{f}\bar{a}}(X_1, \cdots, X_\nu)$ が式

$\dashv_{\bar{e}\bar{a}\bar{b}}(X_1, \cdots, X_\nu)$ の右辺に含まれ $C_{\bar{f}\bar{a}}{}^{\Phi}[\bar{f}] \in N(n)$ だから，$\dashv_{\bar{e}\bar{a}\bar{b}}[f_1, \cdots, f_\nu]$ は m 値論理 (Φ, n) で真である．

ii) $(\bar{f}, \bar{a}) \in J$ のとき．論理式 $C_{\bar{f}\bar{a}}(X_1, \cdots, X_\nu)$ が左辺に含まれ $C_{\bar{f}\bar{a}}{}^{\Phi}[\bar{f}] \notin N(n)$ だから，$\dashv_{\bar{e}\bar{a}\bar{b}}[f_1, \cdots, f_\nu]$ は m 値論理 (Φ, n) で真である．

iii) $\bar{f} \equiv \bar{a}$ のとき．

$$C_{\bar{e}\bar{b}}{}^{\Phi}[B_{a_1 b_1}{}^{\Phi}[f_1], \cdots, B_{a_\nu b_\nu}{}^{\Phi}[f_\nu]] \in N(n)$$

$$\Longleftrightarrow C_{\bar{e}\bar{b}}{}^{\Phi}[B_{a_1 b_1}{}^{\Phi}[a_1], \cdots, B_{a_\nu b_\nu}{}^{\Phi}[a_\nu]] \in N(n)$$

$$\Longleftrightarrow C_{\bar{e}\bar{b}}{}^{\Phi}[\bar{b}] \in N(n)$$

だから，$(\bar{e}, \bar{b}) \in I$ なら $C_{\bar{e}\bar{b}}(B_{a_1 b_1}(X_1), \cdots, B_{a_\nu b_\nu}(X_\nu))$ が式 $\dashv_{\bar{e}\bar{a}\bar{b}}(X_1, \cdots, X_\nu)$ の左辺に含まれ

$$C_{\bar{e}\bar{b}}{}^{\Phi}[B_{a_1 b_1}{}^{\Phi}[f_1], \cdots, B_{a_\nu b_\nu}{}^{\Phi}[f_\nu]] \notin N(n),$$

また $(\bar{e}, \bar{b}) \in J$ なら $C_{\bar{e}\bar{b}}(B_{a_1 b_1}(X_1), \cdots, B_{a_\nu b_\nu}(X_\nu))$ が式 $\dashv_{\bar{e}\bar{a}\bar{b}}(X_1, \cdots, X_\nu)$ の右辺に含まれ

$$C_{\bar{e}\bar{b}}{}^{\Phi}[B_{a_1 b_1}{}^{\Phi}[f_1], \cdots, B_{a_\nu b_\nu}{}^{\Phi}[f_\nu]] \in N(n).$$

よって，いずれにしても $\dashv_{\bar{e}\bar{a}\bar{b}}[f_1, \cdots, f_\nu]$ は m 値論理 (Φ, n) で真である．

④ ここで結論である性質 EI を否定して，

$$p < m \quad \& \quad W_p(\Psi, g) \supseteq W_m(\Phi, n)$$

である正整数 p と p 値論理 (Ψ, g) が存在したと仮定する．すると正整数 ν のとり方と (7.3) より，次の (7.4) および

(7.5) を得る：

(7.4) 集合 $N(m)^\nu$ の同値関係 $\equiv$ による同値類の個数は p^ν より大きい.

(7.5) 式 $\mathfrak{R}_\pi(X_1,\cdots,X_\nu)$, $\gamma_{\bar{a}\bar{b}}(X_1,\cdots,X_\nu)$, $\mathfrak{F}_{e\bar{a}\bar{b}}(X_1,\cdots,X_\nu)$ はすべて p 値論理 (Φ, g) で恒真である.

ここで, 集合 $N(m)^\nu$ の元 $\bar{a}$ と集合 $N(p)$ の元 $x_1,\cdots,x_\nu$ に対し $R_{\bar{a}}(x_1,\cdots,x_\nu)$ を,

$$\forall \bar{d}\ \big((\bar{d},\bar{a})\in I \Longrightarrow C_{\bar{d}\bar{a}}{}^{\Phi}[x_1,\cdots,x_\nu]\notin N(g)\big)$$

$$\&\ \forall \bar{d}\ \big((\bar{d},\bar{a})\in J \Longrightarrow C_{\bar{d}\bar{a}}{}^{\Phi}[x_1,\cdots,x_\nu]\in N(g)\big)$$

を意味するものとすると, (7.5) は次の (7.6) のようにいいかえられる：

(7.6) 1°) $\forall x_1,\cdots,x_\nu\in N(p)\ \exists \bar{a}\in N(m)^\nu\ R_{\bar{a}}(x_1,\cdots,x_\nu)$.

2°) $\forall x_1,\cdots,x_\nu\in N(p)\ \forall \bar{a},\bar{b}\in N(m)^\nu$

$R_{\bar{a}}(x_1,\cdots,x_\nu)\ \&\ R_{\bar{b}}(x_1,\cdots,x_\nu).\Longrightarrow \bar{a}\equiv\bar{b}$.

3°) $\forall x_1,\cdots,x_\nu\in N(p)\ \forall \bar{a},\bar{b}\in N(m)^\nu$

$R_{\bar{a}}(x_1,\cdots,x_\nu)\Longrightarrow R_{\bar{b}}(B_{a_1b_1}{}^{\Phi}[x_1],\cdots,B_{a_\nu b_\nu}{}^{\Phi}[x_\nu])$,

ここに $\bar{a}=(a_1,\cdots,a_\nu)$, $\bar{b}=(b_1,\cdots,b_\nu)$.

1°) より $N(p)^\nu\to N(m)^\nu$ なる写像 $\bar{\alpha}$ をとり

(*) $\forall x_1,\cdots,x_\nu\in N(p)\ R_{\bar{\alpha}(x_1,\cdots,x_\nu)}(x_1,\cdots,x_\nu)$

とできる. この写像 $\bar{\alpha}$ に対し (7.4) より

(**) $\forall x_1,\cdots,x_\nu\in N(p)\ \ \bar{b}\not\equiv\bar{\alpha}(x_1,\cdots,x_\nu)$

となる集合 $N(m)^{\nu}$ の元 $\bar{b}=(b_1,\cdots,b_{\nu})$ が存在する．(*),(**)と2°)より

$$(\overset{*}{*}*)\quad \forall x_1,\cdots,x_{\nu}\in N(p)\quad \neg R_{\bar{b}}(x_1,\cdots,x_{\nu})$$

を得る．一方，(*)と3°)より

$$(\overset{*}{\underset{*}{*}})\quad \forall x_1,\cdots,x_{\nu}\in N(p)$$

$$R_{\bar{b}}(B_{\alpha_1(x_1,\cdots,x_{\nu})b_1}{}^{\mp}[x_1],\cdots,B_{\alpha_{\nu}(x_1,\cdots,x_{\nu})b_{\nu}}{}^{\mp}[x_{\nu}]),$$

ここに $\bar{\alpha}(x_1,\cdots,x_{\nu})=(\alpha_1(x_1,\cdots,x_{\nu}),\cdots,\alpha_{\nu}(x_1,\cdots,x_{\nu}))$

となり，$(\overset{*}{*}*)$ と $(\overset{*}{\underset{*}{*}})$ は矛盾する．

注意．前定理と本定理に関係して，性質D1，D2は満たすが性質E1を満たさない，つまり，性質D3は満たすが性質E2⁻を満たさない（したがって性質E2も満たさない）論理の例としては，序文に挙げた例3の3値論理がそうである．

小論ではもっぱら多値論理における "valid sequent" を扱ったのだが，"valid formula" というものも考えられる：

多値論理が1つ与えられたとする．Formula A に対し，それに含まれる命題変数に真理値をどう対応させようとその対応で formula A が真になる，つまり sequent $\longrightarrow A$ が valid sequent であるとき，formula A を与えられた多値論理で "valid である" というのである．

すると，序文の例2の3値論理について valid sequent に

関することから特に,

　例2の3値論理は valid formula の範囲を変えずに真理値の個数をへらすことができる.

また, valid sequent のときとは異なり, 例3の3値論理における valid formula は例1の2値論理における valid formula と実は完全に一致するのである. したがって,

　例3の3値論理も valid formula の範囲を変えずに真理値の個数をへらすことができる.

しかし, 例2の3値論理の真なる値の集合を {1} に変更した Gödel の3値論理については,

　Gödel の3値論理は valid formula の範囲を変えずに真理値の個数をへらすことができない.

　それでは, 与えられた多値論理が valid formula の範囲を変えずに真理値の個数をへらすことができるかどうかの基準はどこにあるのだろうか? この問題に対する答は筆者には今のところわからない.