数理解析研究所講究録
第 336 巻 1978 年 24-37

Cherlin Chain の集合論への応用

名大理 安本雅洋

$\mathcal{L}$を集合論ZFの言語、$\mathcal{A}=(A,E)$をZFのmodel, $\bar{K}$を新しい述語記号とする。Aの部分集合Kに対して$[\mathcal{A},K]$がZF$(\bar{K})$のmodelになる時 Kを$\mathcal{A}$のclassと呼ぶ。ただし ZF$(\bar{K})$は言語$\mathcal{L}(\bar{K})$において公理化されたZF集合論の公理、即ち、$\bar{K}$も含む命題に対しても置換公理が成立するものとする。

$\mathcal{A}$のclass Kがdefinableであるとは、$\bar{K}$を含まないある命題$\varphi(v_0, v_1, \cdots, v_n)$と$A$の元$a_1, \cdots, a_n$が存在して

$$K=\{x \in A \mid \mathcal{A} \models \varphi(x, a_1, \cdots, a_n)\}$$

と表現できることとする。$\mathcal{A}$のdefinable classの全体をdef$(\mathcal{A})$で表わし $K \notin$ def$(\mathcal{A})$なるclassをundefinable classと呼ぶ。

κをstrongly inaccessible cardinalとすると、V_κはZFのmodelとなり、V_κの任意の部分集合はclass

である。 $|\mathrm{def}(V_\kappa)| = |V_\kappa| < 2^{|V_\kappa|}$ であるから、V_κには、undefinable class が存在する。 また、$\mathbb{A}$が可算modelの場合は、forcing method により undefinable class を容易に作ることができる。 以下において次の定理を証明する。

定理1. $\mathbb{A}$ をZFの standard model、即ち、$\mathbb{A} = (A, \in)$ とすると $\mathbb{A}$において undefinable class が存在する。

Remark. $\mathbb{A}$をZFの model とすると、$[\mathrm{def}(\mathbb{A}), A]$ は集合論 GB(Gödel-Bernays) の model になる。 定理1は、$\mathbb{A}$が standard ならば ある $N \supsetneqq \mathrm{def}(\mathbb{A})$ が存在して、$[N, A]$ が GB の model になることを意味している。

Cherlin chain.

$\mathcal{L}$を一階述語論理の言語、Pを$\mathcal{L}$の structure の class とする。 Pが inductive であるとは、Pの任意の列 $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_\alpha \subseteq \cdots$ の union が再びPに属することとする。 $\varphi(v_1, \cdots, v_n)$ を$\mathcal{L}$の命題とする。 Pの任意の structures $M \subseteq M'$と、Mの任意の元$a_1, \cdots, a_n$に対して、$M \models \varphi(a_1, \cdots, a_n) \Rightarrow M' \models \varphi(a_1, \cdots, a_n)$ が成立する時、φは P-persistent と呼ばれる。 たとえば existential formula ($\exists x_1 \cdots \exists x_m \psi$ で ψ は quatifier free) は P-persistent

になる。 $M\in P$ が P-persistently complete であるとは M の任意の拡大 $M'\in P$ と、任意の P-persistent な命題 $\varphi(v_0,\cdots,v_n)$ に対して、$M'\models\varphi(a_0,\cdots,a_n)\Rightarrow M\models\varphi(a_0,\cdots,a_n)$ となることとする。 P-persistently complete な structure 全体のなす class を P' で表わす。 structure の列 $P\supseteq P'\supseteq\cdots\supseteq P^n\supseteq\cdots$ ($P^{n+1}=(P^n)'$) は Cherlin chain と呼ばれている。 P の subclass Q が cofinal with P であるとは、P の任意の structure に対して、その拡大で Q に属するものが存在することとする。 以下、P は inductive であると仮定する。

Lemma 1 [Cherlin] 任意の $n<\omega$ に対して、P^n は inductive で cofinal with P である。

Proof. $n=1$ の場合だけ証明すれば十分である。まず、P^1 が cofinal with P であることを証明する。

M を任意の P の元、$\kappa=\{\mathrm{card}(M),\ \mathrm{card}(L),\ \aleph_0\}$、$\{\varphi_\beta\mid\beta<\kappa\}$ を M で定義された P-persistent sentences 全体とする。 P の元の列 $\{M_\alpha\mid\alpha<\kappa\}$ を次のように定義する。 まず $M_0=M$ とおく。 $\alpha=\beta+1$ の場合; $M_\beta\models\varphi_\beta$ 又は、M_β の任意の拡大 $M'\in P$ に対して、$M'\models\neg\varphi_\beta$ ならば $M_\alpha=M_\beta$。 それ以外の場合は M_β のある拡大 $M'\in P$ で、$M'\models\varphi_\beta$ なるものが存在する。 M_α としてそのような M' の一

っをとってくる。 α が limit ordinal の場合; $M_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta$ とおく。 P は inductive 故 $M_\alpha \in P$。

$M^1 = \bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha$ とおくと、$\{M_\alpha \mid \alpha<\kappa\}$ の作り方より、M で定義された P-persistent sentences で、M^1 のある拡大で真になるものは、M^1 において真になる。 この操作を続けると $M \subseteq M^1 \subseteq M^2 \subseteq \cdots \subseteq M^n \subseteq \cdots$ なる P の列で、M^i で定義された P-persistent sentences で M^{i+1} のある拡大で真になるものは、M^{i+1} でも真であるような列が作れる。 $M^\omega = \bigcup_{i<\omega} M^i$ とおくと、M^ω は P-persistently complete になり、$M^\omega \in P^1$。 $M^\omega \supset M$ であったから、P^1 は cofinal with P になる。

次に、P^1 が inductive になることを証明する。 それには $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_\alpha \subseteq \cdots$ $(\alpha<\lambda)$ なる P^1 の列に対して $\bigcup_{\alpha<\lambda} M_\alpha \in P^1$ をいえばよい。 $\varphi(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ を P-persistent な命題、$a_1, a_2, \ldots, a_m$ を $M_\lambda \Leftrightarrow \bigcup_{\alpha<\lambda} M_\alpha$ の元とする。 M_λ のある拡大 $M' \in P$ で

$$M' \models \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_m)$$

とする。 ある $\alpha<\lambda$ が存在して、$a_1, \ldots, a_m \in M_\alpha$。 $M_\alpha \in P^1$ だから、M_α は P-persistently complete。 したがって

$$M_\alpha \models \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_m).$$

φ は P-persistent であったから

$$M_\lambda \models \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_m).$$

よって. M_λ は P-persistenly complete となり $M_\lambda \in P^1$。

Lemma 2. Σ_{n+1} 命題は. P^n-persistent である。

Proof. n に関する induction。 φ が P^n-persistent ならば. $\exists x \varphi$ も P^n-persistent であり. $\neg\varphi$ は P^{n+1}-persistent になる。 Σ_1 命題が P-persistent になることは明らか。 Σ_n 命題が. P^{n-1}-persistent になったとする。 すべての Π_n 命題は P-persistent になり. 従って Σ_{n+1} 命題も. P^n-persistent になる。

M が M' の Σ_n-elementary substructure になる時. すなわち. すべての Σ_n 命題 $\varphi(v_1, v_2, \cdots, v_m)$ と $a_1, a_2, \ldots a_m \in M$ に対して $M \models \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_m) \Leftrightarrow M' \models \varphi(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ となる時. $M \prec_n M'$ と書く。

Lemma 3. 任意の $M, M' \in P^n$ に対して $M \subseteq M'$ ならば $M \prec_n M'$

Proof. Lemma 2 より明らか。

集合Aが κ-complete であるとは. Aの任意の subset Bに対して. $|B| < \kappa$ ならば $\bigcup B \in A$ のことである。

Proposition 1. $\mathbb{A} = (A, \in)$ を ZF の standard transitive model とする。 A が $cf(On^{\mathbb{A}})$-complete ならば. $\mathbb{A}$ の

undefinable class が存在する。

Proof. $\mathcal{L} = (\in, \bar{K})$ を集合論 $ZF(\bar{K})$ の言語、$P = \{(a, b) \mid a$: transitive, $b \subseteq a$, $a, b \in A\}$. $\lambda = cf(On^A)$ とする。明らかに、P は A の inductive class になっている。f を λ から On^A への cofinal function すなわち、$dom(f) = \lambda$ で $\bigcup_{\alpha<\lambda} f(\alpha) = On^A$ とする。(a, b) が (a', b') の substructure である時、すなわち、$a \subseteq a'$ かつ、$b = a \cap b'$ の時 $(a, b) \subseteq (a', b')$ と書くことにする。

各 $\alpha < \lambda$ に対して (a_α, b_α) を定義する。まず (a_0, b_0) は P から任意にとってくる。$(a_{\alpha+1}, b_{\alpha+1})$ は次の条件を満たすようにとる。(1) $(a_\alpha, b_\alpha) \subseteq (a_{\alpha+1}, b_{\alpha+1})$ (2) $a_\alpha \in a_{\alpha+1}$ (3) $V_{f(\alpha)} \cap A = V^A_{f(\alpha)} \subseteq a_{\alpha+1}$ (4) $(a_{\alpha+1}, b_{\alpha+1}) \in P^n$, ただし $\alpha+1 = \beta+n$ で β は limit ordinal となるような n。
α が limit ordinal である場合は、$(a_\alpha, b_\alpha) = (\bigcup_{\beta<\alpha} a_\beta, \bigcup_{\beta<\alpha} b_\beta)$ とする。

A が λ-complete であることから、任意の $\alpha < \lambda$ に対して $a_\alpha, b_\alpha \in A$。(λ-completeness の条件が使用されているのはこの部分だけであることに注意)

$V^A_{f(\alpha)} \subseteq a_{\alpha+1}$ と f が λ から On^A への cofinal function であることにより、$\bigcup_{\alpha<\lambda} a_\alpha = A$ となる。$K = \bigcup_{\alpha<\lambda} b_\alpha$ とおく。このKが A の undefinable class になることを証明する。

まずKがAのclassになること．すなわち $[A, K]$ が $ZF(\bar{K})$ のmodelになることを証明する。 $\varphi(v_1, v_2)$ を言語 $\mathcal{L}_A = (\in, \bar{K}, c, \cdots)_{c\in A}$ の命題とし．ある $a \in A$ が存在して

$$[A, K] \models \forall x \in a, \exists y\ \varphi(x, y)$$

とする。 Lemma3より 十分大きな n と α をとると． $a \in a_{\alpha+n}$ で

$$(a_{\alpha+n}, b_{\alpha+n}) \models \forall x \in a\ \exists y\ \varphi(x, y).$$

$$(\because\ (a_{\alpha+n}, b_{\alpha+n}) \prec_n [A, K])$$

故に任意の $x \in a$ に対してある $y \in a_{\alpha+n}$ が存在して

$$(a_{\alpha+n}, b_{\alpha+n}) \models \varphi(x, y)$$

再び Lemma 3 より

$$(a_{\alpha+n+1}, b_{\alpha+n+1}) \models \varphi(x, y)$$

$a_{\alpha+n} \in a_{\alpha+n+1}$ だから

$$(a_{\alpha+n+1}, b_{\alpha+n+1}) \models \forall x \in a, \exists y \in a_{\alpha+n}\ \varphi(x, y)$$

$$(a_{\alpha+n+1}, b_{\alpha+n+1}) \models \exists z\ \forall x \in a\ \exists y \in z\ \varphi(x, y)$$

Lemma 3 より

$$[A, K] \models \exists z\ \forall x \in a\ \exists y \in z\ \varphi(x, y) \ \ldots\ldots (i)$$

したがって．$[A, K]$ が separation を満たすことを証明すればよい。 $\varphi(v)$ を言語 $\mathcal{L}_A$ の命題 a を A の元とする．

$$[A, K] \models b = \{x \in a \mid \varphi(x)\}$$

なる $b \in A$ を見つければよい。

Lemma3より十分大きいnとαが存在して、$a \in a_{\alpha+n}$で

(*) $[A, K] \models \varphi(x)$ iff $(a_{\alpha+n}, b_{\alpha+n}) \models \varphi(x)$.

一方、AがZFのmodelで"$(a_{\alpha+n}, b_{\alpha+n}) \models \varphi(x)$"は、$ZF$の命題$\Phi(a_{\alpha+n}, b_{\alpha+n}, x)$として表現可能であることからある$b \in A$が存在して

$$A \models b = \{x \in a \mid (a_{\alpha+n}, b_{\alpha+n}) \models \varphi(x)\}$$

故に(*)より

$$[A, K] \models b = \{x \in a \mid \varphi(x)\} \cdots\cdots\cdots\cdots (ii)$$

(i)と(ii)より$[A, K]$においてreplacement schemeが成立することが証明された。　他の$ZF(\bar{K})$の公理は、集合に関するもの($\bar{K}$を含まないもの)であるから$[A, K]$で成立するのは明らかである。

次にKがAでundefinableであることを証明する。　もしそうでないなら、ある$\bar{K}$を含まない命題$\varphi(v_0, v_1, \cdots, v_m)$と$A$の元$c_1, \cdots c_m$が存在して、

$$[A, K] \models K = \{x \mid \varphi(x, c_1, \cdots, c_m)\}.$$

Lemma3より十分大きいnとαに対して

$$(a_{\alpha+n}, b_{\alpha+n}) \models b_{\alpha+n} = \{x \mid \varphi(x, c_1, \cdots, c_m)\}.$$

$d \notin a_{\alpha+n}$をとってきて$A \models \varphi(d, c_1, \cdots, c_m)$と仮定する。($A \models \neg\varphi(d)$の時も以下と同様にできる。)　Pの定義より、

$d \in a'$, $\underbrace{d \notin b', (a', b')}_{(a_{\alpha+n},\, b_{\alpha+n}) \subseteq} \in P$ なる(a', b')が存在する。

P''が cofinal with Pであることから．ある$(a, b) \in P''$が存在して．$(a', b') \subseteq (a, b)$。 $\alpha \in a'$, $\alpha \notin b'$, $b' = a' \cap b$ より $\alpha \notin b$。 一方 $A \models \varphi(\alpha)$ で $(a, b) \in P''$ より $(a, b) \models \varphi(\alpha)$

故に $$(a, b) \models b \not\ni \{x \mid \varphi(x)\}$$

lemma3 より $$(a_{\alpha+n}, b_{\alpha+n}) \models b_{\alpha+n} \not\ni \{x \mid \varphi(x)\}$$
$$[A, K] \models K \not\ni \{x \mid \varphi(x)\}$$

これは矛盾である。 従って Kが undefinable であることが証明された。

Corollary. Aを ZF の standard transitive model とする。 $V_\alpha^A \models ZF$ ならば．V_α^A は．Aにおいて undefinable class をもつ。

Proof. V_α^A は Aの中では $cf(\alpha)$-complete である。

MがM'の elementary submodel の時．$M \prec M'$ と書くことにする。

Lemma 4. AをZFの standard transitive model で $cf(On^A) > \omega$ とする。 $\{\alpha \in On^A \mid V_\alpha^A \prec A\}$ は closed unbounded in On^A になる。

Proof. $P = \{V_\alpha^A \mid \alpha \in On^A\}$ とすると．PはAの inductive

class になる。 P'' が cofinal with P であるから、
$\{\alpha \in On^A \mid V_\alpha^A \in P''\}$ は unbounded in On^A である。
$V_\alpha^A \in P''$ ならば、$V_\alpha^A \prec_n A$ だから、$\{\alpha \in On^A \mid V_\alpha^A \prec_n A\}$ も unbounded in On^A。 closed であることは明らか。 $cf(On^A) > \omega$ と $\{\alpha \in On^A \mid V_\alpha^A \prec A\} = \bigcap_{n<\omega} \{\alpha \in On^A \mid V_\alpha^A \prec_n A\}$ より、lemma が証明される。

集合 X が ordinal definable であるとは ZF の命題 $\varphi(v_0, v_1, \cdots, v_n)$ と 順序数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ によって、$X = \{x \mid \varphi(x, \alpha_1, \cdots, \alpha_m)\}$ と表現されることをいう。 すべての ordinal definable sets の class を OD で表わす。 OD は 整列可能($\cong On$)で この順序を $<_{OD}$ で表わす。

再び、L を一階述語論理の言語、P を L の structures の class とする。 P が次の条件を満足する時 OD-inductive であるという。

1) $P \subseteq OD$

2) P 自身が ordinal definable である。 すなわち、ある $\varphi(v_0, v_1, \cdots, v_n)$ と 順序数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ が存在して $X = \{x \mid \varphi(x, \alpha_1 \cdots \alpha_n)\}$。

3) $\{M_\alpha \mid \alpha < \kappa\} \in OD$ なる P の任意の列 $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_\alpha \subseteq \cdots$ $(\alpha < \kappa)$ に対して $\bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha \in P$。

この時 lemma 1 と同様、次の lemma が成立する。

Lemma 5. Pを OD-inductive とする。各 $n<\omega$ に対して P^nは OD-inductive で cofinal with Pである。

Proof. $n=1$ の場合のみ証明すれば十分である。証明は lemma 1 とほぼ同じである。$M \in P$, $\kappa = \max\{card(M), card(\mathcal{L}), \aleph_0\}$, $\langle \varphi_\alpha \mid \alpha<\kappa \rangle$ を 言語 $\mathcal{L}_M = \mathcal{L} \cup \{\bar{c} \mid c \in M\}$ の命題で P-persistent なもの全体を整列させたものとする。$M \in OD$だから. $\langle \varphi_\alpha \mid \alpha<\kappa \rangle \in OD$ なるようにとれる。

$M_0 = M$とおき. Pの structures の列 $\langle M_\alpha \mid \alpha<\kappa \rangle \in OD$ を次のように定義する。$\alpha=\beta+1$ の場合; $M_\beta \models \varphi_\beta$ 又は M_βのすべての拡大$M' \in P$ に対して $M' \models \neg\varphi_\beta$ ならば. $M_\alpha = M_\beta$。そうでない時は. M_βの拡大$M' \in P$ で $M' \models \varphi_\beta$ なるものが存在する。$<_{OD}$ に関して最小になるM'をとってきてM_αとする。αが limit ordinal の時は. $M_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta$。$P$が OD-inductive であることから. $M_\alpha \in P$ $(\alpha<\kappa)$ となる。($\because$ $\langle M_\beta \mid \beta<\alpha \rangle \in OD$) $M' = \bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha$ とおくと $M' \in P$。この操作を続けて $M \subseteq M^1 \subseteq M^2 \subseteq \cdots$ とし $M^\omega = \bigcup_{i<\omega} M^i$ とすると lemma 1と同じようにして $M^\omega \in P'$がわかる。$M \subseteq M^\omega$ であるから P'は cofinal with Pになる。P'が OD-inductive になることは lemma 1 と全く同じ証明で得られる。

$\mathfrak{B}=(B,\in)$ を ZF の standard transitive model とする。 $P(\mathfrak{B}) \fallingdotseq \{(V_\alpha^{\mathfrak{B}}, d) \mid d \leq V_\alpha^{\mathfrak{B}},\ \alpha \in OD^{\mathfrak{B}}\}$ とおくと. $P(\mathfrak{B})$ は $\mathfrak{B}$ において 言語 $\mathcal{L}=(\in, \bar{K})$ の structures の class になる。 $P(\mathfrak{B})$ が OD-inductive になることは定義より明らか。

$C \subseteq P(\mathfrak{B})$ が perfect chain であるとは

(1) 任意の $(V_\alpha^{\mathfrak{B}}, d), (V_\beta^{\mathfrak{B}}, d')^{\in C}$ に対して.

$(V_\alpha^{\mathfrak{B}}, d) \leq (V_\beta^{\mathfrak{B}}, d')$ 又は $(V_\alpha^{\mathfrak{B}}, d) \geq (V_\beta^{\mathfrak{B}}, d')$。

(2) 任意の $n<\omega$ と 任意の $(V_\alpha^{\mathfrak{B}}, d)^{\in C}$ に対して ある

$(V_\beta^{\mathfrak{B}}, d') \in C \cap P^n(\mathfrak{B})$ が存在して

$$(V_\alpha^{\mathfrak{B}}, d) \subseteq (V_\beta^{\mathfrak{B}}, d).$$

(3) $\bigcup\{V_\alpha^{\mathfrak{B}} \mid (V_\alpha^{\mathfrak{B}}, d) \in C\} = B$.

Proposition 1 の証明より $P(\mathfrak{B})$ に perfect chain が存在すれば. $\mathfrak{B}$ に undefinable class をつくることができる。

[定理 1 の証明]

Proposition 1 より. $cf(On^A)=\lambda > \omega$ の時のみ証明すれば十分である。(任意の ZF-model は 有限和に対して. 閉じているから ω-complete である。) lemma 4 より. 単調増加関数 $F: \lambda \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} \{\alpha \in On^A \mid V_\alpha^A \prec A\}$ が存在する。

Proposition 1 の証明 & Corollary より, $V_{F(0)}^{A}$ の perfect chain が A の中に存在する。 その中で $<_{OD}^{A}$ に関して最小のものをとる。 同様にして $V_{F(\alpha)}^{A}$ の perfect chain を拡大したもので $V_{F(\alpha+1)}^{A}$ の perfect chain となる $<_{OD}^{A}$-最小のものをとる。 α が limit ordinal の時は $V_{F(\beta)}^{A}$ $(\beta<\alpha)$ の perfect chains の和をとるとこれは $V_{F(\alpha)}^{A}$ の perfect chain である。 このような perfect chain の列はいずれも A の中で, ordinal definable であるから、この操作を A の中で続けることが可能である. したがって $\alpha<\lambda$ なるすべての α に対して perfect chains をつくると, この和が A の perfect chains になっている。

References

[1] Bell, J. L. and Slomson A. B.
Models and Ultraproducts. Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1969.

[2] Cherlin, G.
A New Approach to the Theory of Infinitely Generic Structures. Yale University. 1971.

[3] Cherlin, G.
Model Theoretic Algebra, Lecture Note in

Mathematics 521.

[4] Gaifman, H.

Two Results Concerning Extension of Models of Set Theory. Notices, Amer. Math. Soc. 15 1968 P947.

[5] Hirschfeld, J. and Wheeler, W. H.

Forcing, Alithmetic, Division Ring.

Lecture Note in Mathmatics 454

[6] Keisler, H. J.

Model Theory for Infinitary Logic

Amsterdam, North-Holland Publishing Company 1971.

[7] Mostowski, A.

A Remark on Models of the Gödel Bernays Axioms for Set Theory.

[8] Takeuti, G. Zaring, W. M.

Axiomatic Set Theory

Springer-Verlag New York 1973.