数理解析研究所講究録
第336巻 1978年 65-86

最近の Recursion Theory について

法政大 工学部　　田中尚夫

§0. この研究集会では Recursion Theory および関連する分野から，筆者が興味をもった最近の話題のうち次のものを紹介した。 1. Paris-Harrington，数学的不完全命題， 2. Solovay，急増加 Ramsey 関数について．(これは 1 と密接に関係する話題である．) 3. Kechris，Δ^1_{2n}-degrees の上昇列について． 4. Harrington，McLaughlin の問題の解決．(可算な Arithmetic set で，non-arithmetic singleton を含むようなものが存在する．) 5. Solovay, Green 等の，Measurable cardinals と $\underset{\sim}{\Delta}^1_2$ 決定性について． 6. Martin，$\underset{\sim}{\Pi}^1_2$-ゲームの決定性について．(大きな基数の存在仮定から，$\underset{\sim}{\Pi}^1_2$ ゲームの決定性が導かれること．) 7. Tanaka, E^1_n-sets についての Recursion Theory．

本報告では，このうち 1 のみについて詳述し，他はすべて省略する。

§1. Paris-Harrington の数学的不完全命題. これは昨年(1977年)かなり話題になっていたもので, Gödel の不完全性定理に関係する結果である. PA を第1階の Peano 算術とする. Gödel は PA の命題 G で, 真であるが PA では証明不可能なものを創り出したが, G は論理体系からの諸概念のいわゆる Gödel 数化によるものであった. 以来長い間, そのような命題で論理体系のコーディングにはよらない数学的なものが探し求められてきた. ところが 1977年早々, このような最初の例が J. B. Paris によって発見され, その方法が Ramsey 定理の有限形の一寸した変形に適用できることを L. Harrington が指摘した.

ω を自然数全体の集合とする. $A \subseteq \omega$ が large であるとは $A \neq \phi$ で A の cardinal $|A| \geq \min A$ が成り立つこと. (ここで $\min A$ は A の最小元を表わす.) A が 0-large とは A が large であること; A が $(n+1)$-large とは, $|A| \geq 4$ であって, どんな $P : [A]^3 \to 2$ に対しても A の部分集合 B で, n-large かつ P に対し均質(homogeneous)なもの —— すなわち $P \restriction [B]^3$ が定関数となる B —— が存在することである. ここで $[A]^3$ は A の 3-element sets 全体の集合である.

Paris 原理 $\forall n \in \omega\, \exists m \in \omega$ (区間 $[0, m)$ は n-large である).

<u>Parisの不完全性定理</u>　Paris原理は真であるが，PAでは証明不可能　　な命題である．

<u>注意</u>　自然数の有限集合や有限関数は自然数で表現できる．例えば $x \in \{0, 3, 4, 8\}$ は $a = 2^1 \cdot 3^4 \cdot 5^6 \cdot 7^9$ とするとき $\exists i < 4\ [x = (a)_i \dot{-} 1]$ と書き表わすことができる．よってParis原理はPAの論理式として表わすことができ，しかも体系のGödel数化などにはよらないものである．

次に $A \subseteq \omega$，$a, b, c \in \omega$ に対し，$A \to (a)^b_c$ とは任意の分割 $P : [A]^b \to c$ に対し A の部分集合 B で，$|B| \geq a$ かつ　　P に対し均質　　なものが存在すること．

<u>有限形Ramsey定理</u>　$\forall a, b, c\ \exists m\ ([0, m) \to (a)^b_c)$．

この定理はPAで証明可能なことが知られている．

$A \underset{*}{\to} (a)^b_c$ とは，$A \to (a)^b_c$ の定義において，$|B| \geq a$ なる条件を "$|B| \geq a$ かつ $|B| \geq \min B$" でおきかえたものである．

<u>Harrington原理</u>　$\forall a, b, c\ \exists m\ ([0, m) \underset{*}{\to} (a)^b_c)$．

<u>Harrington不完全性定理</u>　Harrington原理は真であるがPAでは証明不可能な命題である．

H-原理については次の文献を参照されたい．

Paris-Harrington, A Mathematical incompleteness in Peano Arithmetic, in Handbook of Mathematical Logic

(Ed. by J. Barwise), North-Holland (1977), 1133-1142.

ここでは筆者が聞いた R. Solovay の California 工科大学における連続講演から，Paris 原理に関する部分を，多少補って整理し直したものを述べる．PA の非標準モデルの応用として面白い証明であると思う．

§2. "n-large" sets についての準備事項.

補題 2.1. 5-element-set ($\subset \omega$) は 2-large でない．

補題 2.2. $B \subseteq A \subseteq \omega$, B: n-large $\Rightarrow$ A: n-large.

補題 2.3. A が $(n+1)$-large ならば，A は n-large.

以上 3 つの補題は容易に証明される．

補題 2.4. $n \geq 2$ とする．A が n-large ならば，$|A| \geq n+4$.

証明. $n=2$. A が 2-large なら補題 2.1 により $|A| \geq 6$. Ind. Step. n のとき成り立つとする．A を $(n+1)$-large とし，$a \in A$ を一つとる．

$f(i,j,k) = 1$ if one of i, j, k is a, $= 0$ otherwise なる $f: [A]^3 \to 2$ を考える．f に対し均質な n-large set $B \subseteq A$ がある．Claim $a \notin B$. Ind. hyp. により $|B| \geq n+4$. $\therefore |A| \geq |B|+1 \geq n+5$. Claim の証明:

もし $a \in B$ なら，（$n>0$ だから）$|B| \geq 4$. よって a と異なる $i, j, k \in B$ がある. $f(i,j,a)=1$, $f(i,j,k)=0$ であるから $f \restriction [B]^3$ は定関数でない. 不合理. $\dashv$

<u>系 2.5.</u> $n \geq 5$ とする. $A \subseteq [0, n)$ ならば，A は $(n-3)$-large でない.

<u>系 2.6.</u> $l \geq n \geq 4$ とする. $A \subseteq [0, n) \cup \{l\}$ ならば，A は $(n-2)$-large でない.

<u>補題 2.7</u> $n \geq 2$ とする. A が n-large で，$a \in A$ ならば，$A-\{a\}$ は $(n-1)$-large である.

<u>証明.</u> $n=2$ のとき. A を 2-large とし，$a \in A$ を使って 2.4 の証明における f を作ると，f に対し均質な 1-large $B \subseteq A$ がある. $|B| \geq 4$ より $a \notin B$. $\therefore B \subseteq A-\{a\}$. よって補題 2.2 により $A-\{a\}$ は 1-large. Ind. Step. n のとき成り立つとし，A を $(n+1)$-large とする. そこで $A-\{a\}$ が n-large でないと仮定しよう. $f : [A-\{a\}]^3 \to 2$ なる f で，f に対し $(n-1)$-large 均質集合 $\subseteq A-\{a\}$ が存在しないようなものがある. $f^* : [A]^3 \to 2$, $f = f^* \restriction [A-\{a\}]^3$ なる f^* に対し，n-large 均質な $B^* \subseteq A$ がある. 今度は $a \in B^*$ でなければならぬ. Ind. hyp. により $B^*-\{a\}$ は $(n-1)$-large である. 従って $A-\{a\}$ が f に対し均質な $(n-1)$-large set $B^*-\{a\}$ をもつことになり

fの選び方に矛盾する．ゆえに $A-\{a\}$ は n-large でなければならない．

<u>定理2.8.</u> $n \geq 3$ とする．$[0, m)$ が n-large ならば，$m > n$ であって $[n, m)$ は $(n-2)$-large である．

証明．$[0, m)$ が n-large とする．次のように $f : [0, m-1]^3 \to 2$ を定義する．(系2.5 により $m > n$.)

$$i < j < n \leq k < m-1 \quad \Rightarrow \quad f(i, j, k) = 1$$

$$i < n \leq j < k < m-1 \quad \Rightarrow \quad f(i, j, k) = 0$$

$$i < j < k < n \quad \Rightarrow \quad f(i, j, k) = \text{任意}$$

以下7ページへ続く．

本節の結果は，定義などの修正によって少し改良できる．しかし後方への影響はない．本節に関し塚田信高，高橋真両氏から有益な御注意を受けた．

$$n \le i < j < k \quad \Rightarrow \quad f(i,j,k) = 0$$
$$i < j < n \quad \Rightarrow \quad f(i,j,m-1) = 0$$
$$i < n \le j < m-1 \quad \Rightarrow \quad f(i,j,m-1) = 1.$$

この f に対し均質な $(n-1)$-large set $B \subseteq [0,m)$ がある. <u>Claim</u> $|[0,n) \cap B| \le 1$. もし $[0,n) \cap B = \phi$ ならば, $B \subseteq [n,m)$. よって $[n,m)$ は $(n-1)$-large である. $[0,n) \cap B$ が singleton ならば, $\{i_0\} = [0,n) \cap B$ とすると, B は $(n-1)$-large であるから補題2.7によって $B - \{i_0\}$ は $(n-2)$-large, 従ってそれを含む $[n,m)$ は $(n-2)$-large である.

Claim の証明: $|[0,n) \cap B| \ge 2$ と仮定すれば, $i_0, i_1 \in [0,n) \cap B$, $i_0 < i_1$ なる i_0, i_1 がある. $[0,n) \cup \{l\}$ $(l \ge n)$ は $(n-1)$-large でないから (補題 $\overset{\text{2.3と系}}{2.6}$), $B - [0,n)$ は少くとも2元をもつ. よって $n \le j < k$ なる $j, k \in B$ がある. $k < m-1$ の場合: $f(i_0,i_1,j) = 1$, $f(i_0,j,k) = 0$; $k = m-1$ の場合: $f(i_0,i_1,m-1) = 0$, $f(i_0,j,m-1) = 1$. よって $f \restriction [B]^3$ は定関数でない. 不合理. $\dashv$

§3. Paris原理が真な命題であること.

補題3.1. $A \subseteq \omega$, $n \in \omega$ とする. Aが無限集合ならば, Aの有限部分集合Bで n-large なるものがある.

証明. nについての induction. $n=0$ のときは自明. nのとき, すべての無限集合Aについて補題が成立するとする. $n+1$の場合成立しないと仮定すれば: 或無限集合Aがあって, Aは有限$(n+1)$-large部分集合を含まない. 従って

(1) $\forall D \subset A$ (D finite & $|D| \geq 3 \Rightarrow \exists P : [D]^3 \to 2$ s.t. Pに対し均質な有限n-large set $\subset D$ は存在しない)

である. Claim. $F : [A]^3 \to 2$, Fに対しては均質なAの有限n-large部分集合がないようなFがある.
無限形Ramsey定理によれば, 上のFに対しAの無限部分集合Bで, Fに対し均質なものがある. このBに対し帰納法の仮定を使うと, Bは有限n-large部分集合Cをもつ. $F \restriction [B]^3$ は定関数だからもちろん $F \restriction [C]^3$ もそう. よってFに対し均質な有限n-large集合$C \subset A$が存在することになって, Fの性質に反する.

Claimの証明. Aの要素を並べて $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ とし, $A_k = \{a_i \mid i < k+3\}$ とおく. (1)より,

各 A_k に対し反例 P_k が少くとも一つ存在する. 反例は各 k に対し有限個しかない. 今

$$P_k \prec P_l \Leftrightarrow k<l \ \& \ P_k = P_l \restriction [A_k]^3$$

と定義すれば, $T = \{ P \mid P$ は A_k に対する反例, $k=0,1,2,\cdots\}$ は $\prec$ に関し有限分岐無限 tree をなす. 更に $P \in T$ が根でなければ, $P' \prec P$ なる P' が必ずある. よって D. König の補題により, T は少くとも一つの無限枝をもつ. これは自然に一つの $F: [A]^3 \to 2$ を定義し, F は A の有限 n-large 均質部分集合をもたない. $\dashv$

<u>系3.2</u>. $\forall n \in \omega \ \exists C \subset \omega$ (C は有限 n-large).

<u>系3.3</u>. Paris 原理が成り立つ: $\forall n \ \exists m$ s.t. $[0, m)$ は n-large である.

証. C_n を有限 n-large 集合 $\subset \omega$ とする. C_n の最大元を $m-1$ とすると, $[0, m)$ は n-large である. $\dashv$

同様な論法で Harrington 原理が成立することを証明できる.

§4 PAの可算非標準モデルにおけるcut

$\mathfrak{N} = \langle |\mathfrak{N}|, +^{\mathfrak{N}}, \cdot^{\mathfrak{N}}, 0^{\mathfrak{N}}, 1^{\mathfrak{N}} \rangle$ をPAの可算非標準モデルとする．以下 superscript $\mathfrak{N}$ は省略し $\mathfrak{N}$ と $|\mathfrak{N}|$ とを同一視する．$C \subset \mathfrak{N}$ が <u>cut</u> であるとは，1°) $0 \in C$, 2°) $x \in C \Rightarrow x+1 \in C$, 3°) $x \in C$ & $y < x \Rightarrow y \in C$, 4°) $C \neq \mathfrak{N}$, が成り立つこと．例えば $\mathfrak{N}$ の標準自然数全体の集合は cut である．一般に $\mathfrak{N}$ の cuts は沢山ありうる．

<u>例 4.1</u>　$\mathcal{F} = \{ f \mid f : \omega \to \omega,\ f$ is FODO $\langle \omega, +, \cdot, 0, 1 \rangle \}$ とおく．$\mathcal{F}$ は可算集合である．U をすべての co-finite sets $\subseteq \omega$ を含む ω 上の non-principal ultrafilter とし，$\mathcal{S} = \mathcal{F}/U$ を作れば この $\mathcal{S}$ は PA の可算非標準モデルである．$\mathcal{S}$ には $2^{\aleph_0}$ 個の cuts が存在する．何故なら，もちろん $\mathcal{S}$ は $<$ の意味で稠密ではないが，次の補題が成り立つからである．

<u>補題 4.2</u>　各正有理数 r に対し，$\mathcal{F}/U$ の要素の無限下降列を含む区間 I_r を対応させ，

$r < r' \Rightarrow$ 区間 I_r の要素 $<$ 区間 $I_{r'}$ の要素

が成り立つようにできる．

さて $\mathcal{M}$ を可算非標準モデル（PAの）とし，C を $\mathcal{M}$ の cut とする．$B \subseteq C$ が C の<u>クラス</u>であるとは，<u>$\mathcal{M}$ の意味で有限な</u>集合 $b\,(\subset \mathcal{M})$ が存在して $B = b \cap C$ となることである．（簡単に "$\mathcal{M}$-有限" と呼ぶ．）$R \subset C \times C$ が C の<u>2-項関係</u>とは，$R = \pi^{-1}(b) \cap C \times C$ なる $\mathcal{M}$-有限集合 b が存在すること，ただし π は pairing function である．多項関係も同様に定義される．

<u>例 4.3.</u> $x \in C$ に対し $A = \{ z \in C \mid x \leq z \}$ とおくと，A は C のクラスである．

証明．（本橋信義氏による．）$Fin(y) \Leftrightarrow \forall s \forall t\, [s < t < lh(y) \Rightarrow (y)_s < (y)_t\,]$．$Fin(y)$ の下で $z \,\varepsilon\, y \Leftrightarrow \exists s < lh(y)\,(\, z = (y)_s\,)$ とする．

$$PA \vdash \forall u \forall x\, [x < u \rightarrow \exists y \{ Fin(y) \wedge \forall z\, (\, z \,\varepsilon\, y \leftrightarrow x \leq z < u\,) \}\,]$$

は明らか．よってこの sentence は $\mathcal{M}$ で真．今 $u \in \mathcal{M} - C$, $x \in C$ なる u, x をとると，$x < u$ であるから，$\forall z\,(\, z \in a \leftrightarrow x \leq z < u\,)$ なる $\mathcal{M}$-有限 set a が存在する．そうして $A = a \cap C$．$\dashv$

cut C が<u>正則</u>とは，C の任意のクラス B と任意の $x \in C$ に対し，

B : cofinal in C $\Rightarrow$ B は x^{th} element をもつ．

<u>補題4.4</u> C が正則cut なら, C は $+, \cdot, \exp$ の下で閉じている.

証明. 1°) $x \in C \Rightarrow x+x \in C$. 証: $x \in C$ に対し $A = \{z \in C \mid x \leq z\}$ を作ると例4.3 により A は C の cofinal クラスである. $x+1 \in C$ だから A は $x+1$ 番要素をもつ. それは丁度 $x+x$ である. $\therefore x+x \in A \subseteq C$. □

2°) $x, y \in C \Rightarrow x+y \in C$. 証: $x<y$ としてよい. $x+y < y+y \in C$ (by 1°)). $\therefore x+y \in C$. □

3°) $x, y \in C \Rightarrow x \cdot y \in C$. 証: $x \in C$, $x \neq 0$ とする. $A = \{x \cdot y \in C \mid y \in C\}$ を作れば例4.3 の方法で A が C のクラスであることがわかる. A は cofinal in C である. [☺ もし $A < v$ なる $v \in C$ があれば, $x \cdot y \leq v$ なる最大の $x \cdot y$ をとる. 最大性から $x \cdot (y+1) > v$. $v \in C$ だから $x \cdot y \in C$. $\therefore x \cdot (y+1) = x \cdot y + x \in C$. $\therefore x \cdot (y+1) \in A$. これは $A < v$ と矛盾する.] 任意の $y \in C$ に対し $y+1 \in C$ だから A は $(y+1)$ 番要素をもつ. それは $x \cdot y$ に他ならない. □

4°) $x, y \in C \Rightarrow x^y \in C$. $(x \neq 0)$ 証. $x \neq 0, 1$ なる $x \in C$ を固定する. $A = \{x^y \in C \mid y \in C\}$ として 3°) と同様に論ぜよ. □ $\dashv$

cut が PA のモデルになる条件を調べる.

<u>補題 4.5.</u> cut C が $+, \cdot$ の下で閉じていて, C のすべての関係達の集合が $\exists x \in C$ の下で閉じていれば, C は PA のモデルである.

証明. $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ を PA の論理式とし

$$B = \{(x_1, \cdots, x_n) \in C^n \mid C \models \varphi(x_1, \cdots, x_n)\}$$

とすれば, B は C の関係である. —— 何となれば:

$\varphi(\boldsymbol{x}) = \exists y \psi(x, y)$ の場合. Ind. hyp. により $D(\psi) = \{(x, y) \in C^2 \mid C \models \psi(x, y)\}$ は C の関係である. C の関係達は $\exists y \in C$ の下で閉じているから $D(\varphi) = \{x \in C \mid C \models \exists y \psi(x, y)\} = \{x \in C \mid \exists y \in C((x, y) \in D(\psi))\}$ は C の関係(クラス)である. $\varphi = \neg\psi$ のとき. $D(\varphi) = \{x \in C \mid C \models \neg\psi(x)\} = C - D(\psi)$. $D(\psi) = b \cap C$ なる $\mathfrak{N}$-有限集合 b があるから, これを用いて $D(\varphi) = d \cap C$ なる $\mathfrak{N}$-有限集合 d を作ることができる.

さて $C \models$ "数学的帰納法" とは $B = \{x \in C \mid C \models \varphi(x)\} \neq 0$ なる B が最小元をもつことである. 上でみたように B は C のクラスであるから,

"C の空でないクラス B は必ず最小元をもつ"

ことが言えればよい. $B = b \cap C$ なる $\mathfrak{N}$-有限集合 b をとる. b の最小元を x_0 とすると, $x_0 \in C$ [$\because$ もし

$x_0 \notin C$ なら $\forall x > x_0 (x \notin C)$ であるから，$b \cap C = \phi$ となって $B \neq \phi$ に反す.] 従って $x_0 \in B$. 明白に x_0 は B の最小元である.

数学的帰納法以外の PA の公理が C で成り立つことは，仮定によって明白である. $\dashv$

cut C が弱コンパクトとは，C が正則で，かつ

$$(1) \begin{cases} \forall F : [C]^3 \to 2 \text{, } F \text{ は } C \text{ の関係} \Rightarrow \exists S \subseteq C : \\ S \text{ は cofinal クラス of } C \text{ で，} F \text{ に対し均質である.} \end{cases}$$

が成り立つこと.

補題 4.6. 弱コンパクト cut は PA のモデルである.

証明. C は正則であるから，補題 4.4 によってそれは $+, \cdot$ の下で閉じている. よって補題 4.5 から，C の関係達が $\exists x \in C$ の下で閉じていることが言えれば十分.

$R(x, y)$ を C の関係とする. $x < y < z$ に対し

$$F(x, y, z) = 1 \iff \forall u < x \, [\, (\exists v < y) R(v, u) \iff (\exists v < z) R(v, u) \,]$$

なる $F : [C]^3 \to 2$ を作る.

Claim (i) F は C の関係である. 証: R に対し $\mathcal{M}$-有限集合 r が存在して $R = r \cap C^2$. この r を用いて $\mathcal{M}$-有限な f を求め $F = f \upharpoonright [C]^3$ が成り立つように

できる. □

さて C が弱コンパクトなることから, この F に対し C の cofinal クラス S で, 均質なものがある.

<u>Claim</u> (ii) $F \upharpoonright [S]^3 \equiv 1$. 証. S は F に対し均質だから, $x<y<z$, $F(x,y,z)=1$ なる1組の $\{x,y,z\} \in [S]^3$ が求まればよい. $x = \min S$ とおく. $x \in C$ なるゆえ $2^x+2 \in C$. よって S は 2^x+2 番要素をもつ:

$$S = \{s_0 = x, s_1, s_2, \cdots, s_{2^x+1}, s_{2^x+2}, \cdots\}$$

そこで, $T_i = \{u<x \mid (\exists v<s_i) R(v,u)\}$ とおくと, $|\mathcal{P}(\{u \mid u<x\})| = 2^x$ であるから, Pigeonhole Principle によって

$$\exists i,j : 1 \leq i < j \leq 2^x+1, \quad T_i = T_j.$$

よって F の定義から $F(s_0, s_i, s_j) = 1$. □

目的の "$(\exists v \in C) R(v,u)$ が C のクラスである" を示すために,

$W = \{x \in C \mid y$ が S の $>x$ なる最小元で, z が S の $>y$ なる最小元ならば, $(\exists v<z) R(v,x)\}$

なる W を考える. R はクラスであるから例4.3のような方法によって W がクラスであることがわかる.

<u>Claim</u> (iii). $W = \{x \in C \mid (\exists v \in C) R(v,x)\}$. 証: $\subseteq$ は明白. よって $(\exists v \in C) R(v,x)$ とせよ. y を x

より大きい最小の S の元，z は y より大きい最小の S の元とする．S は有界でないから

$$z' > z \quad \& \quad (\exists v < z') R(v, x)$$

なる $z' \in S$ がある．よって Claim(ii) により
$F(y, z, z') = 1$．従って

$$\forall u < y \, [(\exists v < z) R(v, u) \leftrightarrow (\exists v < z') R(v, u)]$$

である．特に $x < y$ だから

$$(\exists v < z) R(v, x) \leftrightarrow (\exists v < z') R(v, x).$$

右辺は真，よって $(\exists v < z) R(v, x)$，$\therefore x \in W$．□

W は C のクラスだから Claim(iii) から $\{x \in C \mid (\exists v \in C) R(v, x)\}$ は C のクラスである．⊣

§5. 主定理の証明

先ず，証明の Key になる定理を述べる．

定理 5.1．$\mathfrak{M}$ が PA の可算非標準モデルで，x, y, z が $\mathfrak{M}$ の非標準数，$x < y$ かつ区間 $[x, y)$ が z-large であるとする．このとき

$$x \in C, \quad y \notin C, \quad C \text{ は弱コンパクト}$$

なる cut C が存在する．従って $C \models PA$．

証明　Real world で考える．$\{f_i \mid i \in \omega\}$ は $f : [y]^3 \to 2$ なるすべての写像 f 達を $\mathfrak{M}$ の要素達

でコードしたものの enumeration とする。ただし各 f がリストに無限回現われるようにしておく。

$\mathcal{M}$-有限集合達の無限列

$$\langle S_i \mid i \in \omega \rangle, \quad S_{i+1} \subseteq S_i$$

で、各 S_i が $(z-i)$-large となるものを定義する。z は非標準数であるから、すべての標準数 i に対し $z-i \in \mathcal{M}$ である。

先ず $S_0 = [x, y)$ とする。仮定により S_0 は $(z-0)$-large であり、明白に $\mathcal{M}$-有限である。Ind. hyp.: S_i は f_{i-1} に対し均質な $\mathcal{M}$-有限 $(z-i)$-large set $\subseteq S_{i-1}$ とする。仮定により $f_i \restriction [S_i]^3$ に対し均質な $(z-i-1)$-large set $S_{i+1} \subseteq S_i$ がある。
個々の step は $\mathcal{M}$ 内で行うから S_{i+1} は $\mathcal{M}$-有限集合として得られる。

$a_n = \min S_n$ とすると、$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots$.

<u>Claim</u>(i) $\forall i \in \omega \, \exists j \in \omega \, [j > i \ \& \ a_j > a_i]$.

証: 与えられた i に対し

$$f(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} 1 & \text{if one of } y_1, y_2, y_3 \text{ is } a_i \\ 0 & \text{ow}, \end{cases}$$

なる $f: [y]^3 \to 2$ を作る。$f = f_j$, $j > i$ なる j がある。S_{j+1} は f_j に対し均質だから $f \restriction [S_{j+1}]^3$ は

定関数．よって §2の論法で $a_i \notin S_{j+1}$．従って
$a_i < \min S_{j+1} = a_{j+1}$．□

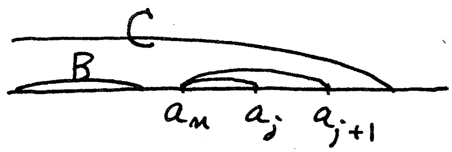
そこで $C = \{x \in \mathfrak{N} \mid \exists i \in \omega\,(x < a_i)\}$ と定義する．$C \subseteq [0, y)$ であるから，C は cut である．

<u>Claim</u> (ii) C は正則である．証：B を C の任意のクラスとする．B が有界であるか又は B が "C" 個の元を含むことを示せばよい．$B = b \cap C$ なる $\mathfrak{N}$-有限集合 b がある．$f : [y]^3 \to 2$ を $y_0 < y_1$ に対し

$f(y_0, y_1, y_2) = 0$ if $b \cap [y_0, y_1) = \phi$, $= 1$ ow.,

によって定義する．或 S_n が f に対し均質である．

Case 1°) $f = 0$ on $[S_n]^3$．このとき $a_n \le t < a_j$ なるすべての区間 $[a_n, a_j]$ が B の元を含まない．よって



B は C で有界である．Case 2°) $f = 1$ on $[S_n]^3$．このとき，各 j に対し B が少くとも a_j 個の元を含むことを示す．m を十分大きくとって $m > n$, $a_m > a_j + 1$, S_m : fに対し均質 となるようにする．S_m は $(z-m)$-large だからもちろん 0-large．よって S_m は少くとも $a_m (= \min S_m)$ 個の元を含む．よって S_m は

$S_m = \{w_0, w_1, w_2, \cdots, w_{a_j+1}, \cdots, w_{a_m}, \cdots\}$

のように並べることができる．今 $w_{a_j+1} \in C$ なる

ことが証明されたとしよう。そのとき w_{a_j+1} より小さい元はすべて C に属す。もちろん $f=1$ on $[S_m]^3$ であるから $k+1<a_j+1$ なるすべての k に対し $[w_k, w_{k+1})$ は B の元を少くとも一つ含む。従って B は少くとも a_j 個の元を含む。

以下，$w_{a_j+1}\in C$ の証：　$h:[y]^3\to 2$ を $y_1<y_2<y_3$ に対し $h(y_1,y_2,y_3)=1 \Leftrightarrow y_1>w_{a_j+1}$ によって定義する。p を十分大きくとって $p>m$, $a_p>a_m$, S_p：h に対し均質，となるようにする。これに対し

$$h = 1 \text{ on } [S_p]^3.$$

何故なら，S_p は 0-large だから少くとも a_p 個の元をもつ。S_p の元を並べると

$S_p=\{u_0,u_1,\cdots,u_{a_j+1},\cdots,u_{a_m},\cdots,u_{a_p},\cdots\}$.

となる。$u_0=a_p>a_m=w_0$，$S_p\subseteq S_m$,

$S_m=\{w_0,w_1,\cdots,w_{a_j+1},\cdots\}$

であるから，$w_{a_j+1}<u_{a_j+1}$．よって $h(u_{a_j+1},u_{a_m},u_{a_p})=1$．$\therefore h=1$ on $[S_p]^3$.

これによって S_p の元はすべて w_{a_j+1} より大きいことがわかる。特に $a_p>w_{a_j+1}$ である。$a_p\in C$ なるゆえ，$w_{a_j+1}\in C$。これで Claim(ii) が証明された。□

定理5.1を証明するために，C が弱コンパクトで

あることを示さねばならぬ．既に C が正則であることは証明したから，

$\forall F : [C]^3 \to 2$，F は C の関係 $\Rightarrow$ $\exists S$: S は C の cofinal クラスで，F に対し均質である，

を示せばよい。そこでかかる F をとれ．$f : [Y]^3 \to 2$，$F = f \upharpoonright [C]^3$ なる f を作る．F は C の関係だから，$\mathfrak{N}$-有限な f がとれる．よって f に対し均質な S_k が存在する．S_k は $\mathfrak{N}$-有限であるから $S \underset{def}{=} S_k \cap C$ は C のクラスであり，十分大きいすべての j に対し $a_j \in S$ である．よって S は cofinal in C．明らかに S は F に対し均質である．

以上により定理 5.1 が証明された．┘

さて系 3.3 により

$$\gamma(n) = \min\{m \mid [0, m) \text{ は } n\text{-large}\}$$

なる関数 $\gamma : \omega \to \omega$ が定まる．“$[0, m)$ は n-large である” は n, m の recursive relation であるから，γ は一般帰納的関数である．

補題 5.2　$f : \omega \to \omega$ を任意の provably recursive function とする．そのとき或所から先すべての n に対し

$$\gamma(n) \geqq f(n)$$

が成り立つ.

証明. $f=\{e\}$ (e は f に対する Gödel 数) とする. 仮定により

$$PA \vdash \forall x \exists y T(\underline{e}, x, y),$$

ここに $\underline{e}$ は e に対する numeral で, T は Kleene の T-predicate である.

$$S(x, z) \Leftrightarrow \exists y [T(\underline{e}, x, y) \wedge z = U(y)]$$

とおく, ここに $U(y)$ は Kleene の U-function である. $S(x, z)$ は Σ_1^0-formula である. 今仮りに無限に多くの n に対し $\gamma(n) < f(n)$ であったとしよう.

PA の公理達, $c > \underline{n}$ $(n \in \omega)$, $\gamma(c) < f(c)$ なる sentences の集合は有限充足可能である. ゆえに Compactness Theorem によって, これらすべての sentences に対する可算モデル $\mathfrak{N}$ がある. 明らかに $\mathfrak{N}$ は非標準モデルである. c を解釈する $\mathfrak{N}$ の元を同じ c で表わそう.

$[0, \gamma(c)]$ は c-large であった. 定理2.8 により $[c, \gamma(c))$ は $(c-2)$-large である. c, $\gamma(c)$, $c-2$ は非標準数であるから 定理5.1 を適用して,

$$c = x \in C, \quad y = \gamma(c) \notin C$$

なる弱コンパクト cut C がある。 $\gamma(c)<f(c)$ より

(1) $$f(c) \notin C.$$

ところで $PA \vdash \forall t\, \exists! z\, S(t,z)$ であり, $C \models PA$ であるから, あの $c \in C$ に対し $C \models S(c,w)$ なる <u>unique</u> $w \in C$ がある. S は Σ_1^0-formula なるゆえ $\mathfrak{M} \models S(c,w)$. 一方 $S(*,*)$ の定義から $\mathfrak{M} \models S(c,f(c))$. ゆえに $w=f(c)$ でなければならない. ∴ $f(c) \in C$. これは (1) と矛盾する. 従って γ は f を殆んど dominate する. $\dashv$

<u>Paris 原理は PA で証明可能でない.</u>

証明. もし $PA \vdash$ Paris' 原理 とせよ, 即ち

$$PA \vdash \forall n\, \exists m\, ([0,m) \text{ は } n\text{-large}).$$

よって $PA \vdash$ "γ is total" ということになり, γ が provably recursive となってしまう. これは補題 5.2 に反す. 従って

$$PA \nvdash \text{Paris 原理}. \quad \dashv$$

γ は general recursive であるが, provably recursive ではない具体例を与える. 今まで知られていたかかる関数は 対角線論によって作られたもののみである.

以上.