数理解析研究所講究録
第 336 巻 1978 年 101-116

Type 2 object での recursion

名大 理　篠田 寿一

1.　Kleene [3] による finite type の recursion theory を type 2 object に制限したものを考える. ω の元を type 0 object, ω^ω の元を type 1 object, $\{F \mid F: \omega^\omega \to \omega\}$ の元を type 2 object という. type 0 object を $a, b, c, \cdots$, type 1 object を $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$, type 2 object を $F, G, H, \cdots$ で表わすことにする. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \cdots$ により $(a_1, \cdots, a_n, \alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ のように type 0 および type 1 の変数の有限列を表わすものとする. ω の部分集合に対して,

$$\Pi_1^1 = \Sigma_1 \text{ on } L(\omega_1), \quad \Delta_1^1 = \Delta_1 \text{ on } L(\omega_1)$$

なる関係はよく知られているが, これは Kleene の object E での recursion theory の言葉でいえば,

$$E\text{-semirecursive} = \Sigma_1 \text{ on } L(\omega_1)$$

$$E\text{-recursive} = \Delta_1 \text{ on } L(\omega_1)$$

となるが, これを一般の type 2 object の場合に拡張しよう

というのが目標である.

type 2 object F に対して、次のような scheme により導入される partial function を partial F-recursive function という:

Scheme	Index
(S1) $\varphi(x, \mathfrak{a}) \simeq x+1$	$\langle 1 \langle n_0+1, n_1 \rangle \rangle$

ここで、n_0 (n_1) は $\mathfrak{a}$ に含まれる type 0 (type 1) 変数の個数である. 以下の各 scheme においても同様.

(S2) $\varphi(\mathfrak{a}) \simeq q$	$\langle 2 \langle n_0, n_1 \rangle q \rangle$
(S3) $\varphi(x, \mathfrak{a}) \simeq x$	$\langle 3 \langle n_0+1, n_1 \rangle \rangle$
(S4) $\varphi(\mathfrak{a}) \simeq \psi(\chi(\mathfrak{a}), \mathfrak{a})$	$\langle 4 \langle n_0\ n_1 \rangle p, q \rangle$

ここで、p は ψ の index, q は χ の index である.

(S5) $\varphi(a, b, x, y, \mathfrak{a}) = \begin{cases} a & \text{if } x = y \\ b & \text{if } x \neq y \end{cases}$ $\qquad \langle 5 \langle n_0+4, n_1 \rangle \rangle$

(S6) $\varphi(x, y, \mathfrak{a}) \simeq S'(x, y)$ $\qquad \langle 6 \langle n_0+2, n_1 \rangle \rangle$

ここで、$S'(x, y) = \langle 4, [(x)_2], x, \langle 2, [(x)_2], y \rangle \rangle$

(S7) $\varphi(\mathfrak{a}) \simeq \psi(\mathfrak{a}_1)$ $\qquad \langle 7 \langle n_0, n_1 \rangle j\ k\ p \rangle$

ここで $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{a}_1$ の第 k 番目の type j の変数を先頭に出したものである.

(S8) $\varphi(x, \alpha, \mathfrak{a}) \simeq \alpha(x)$ $\qquad \langle 8 \langle n_0+1, n_1+1 \rangle \rangle$

(S9) $\varphi(\mathfrak{a}) \simeq F(\lambda x \psi(x, \mathfrak{a}))$ $\qquad \langle 9 \langle n_0, n_1 \rangle, p \rangle$

(S10) $\varphi(x, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \simeq \{x\}^F(\mathfrak{a})$ $\langle 10 \langle n_0+m_0, n_1+m_1\rangle \langle n_0 n_1\rangle\rangle$

ここで $\{x\}^F$ は index x の part. F-rec. func. また $\mathfrak{b}$ は m_0 個の type 0 変数, m_1 個の type 1 変数からなっている。

F-recursive function, F-recursive predicate などは通常のごとく定義される.

定理 1.1 primitive recursive function S^m で

$$\{S^m(z, x_1, \cdots, x_m)\}^F(\mathfrak{a}) \simeq \{z\}^F(x_1, \cdots, x_m, \mathfrak{a})$$

となるものが存在する.

これから直ちに次の定理が得られる.

定理 1.2 $\psi(z, \mathfrak{a})$ が part. F-rec. func. ならば,

$$\{e\}^F(\mathfrak{a}) \simeq \psi(e, \mathfrak{a})$$

なる e が存在する.

この定理 1.2 を F-Recursion Theorem という.

2. E により特に

$$E(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{if } \exists n\, \alpha(n) = 0 \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases}$$

なる type 2 object を表わす. E が F-recursive であるとき, F を normal object という. 以下 type 2 object としては normal なものばかりを考える. $\{z\}^F(\mathfrak{a})\downarrow$ のとき, ordinal $|z, \mathfrak{a}|^F$ を次のように定義する:

（1）　$(z)_0=1,2,3,5,6,8$のとき，$|z,\alpha|^F=0$

（2）　$(z)_0=4$のとき，$|z,\alpha|^F=\max(|(z)_3,\alpha|^F,\ |(z)_2,\{(z)_3\}^F(\alpha),\alpha|^F)+1$

（3）　$(z)_0=7$のとき，$|z,\alpha|^F=|(z)_4,\alpha_1|^F+1$

（4）　$(z)_0=9$のとき，$|z,\alpha|^F=\sup\limits_{n<\omega}(|(z)_2,n,\alpha|^F+1)$

（5）　$(z)_0=10$のとき，$|z,x,\alpha,\mathfrak{b}|^F=|x,\alpha|^F+1$

また$\{z\}^F(\alpha)\uparrow$のときには$|z,\alpha|=\infty$としておく．次の定理は normal type 2 object での recursion theory において基本的なものである．

定理 2.1（Gandy）　次のような part. F-rec. func. $\chi(z,\alpha,w,\mathfrak{b})$が存在する：

$\{z\}^F(\alpha)\downarrow$または$\{w\}^F(\mathfrak{b})\downarrow$ならば，$\chi(z,\alpha,w,\mathfrak{b})\downarrow$であって

$$\chi(z,\alpha,w,\mathfrak{b})=\begin{cases}0 & \text{if}\quad |z,\alpha|^F\leqq|w,\mathfrak{b}|^F\\ 1 & \text{if}\quad |z,\alpha|^F>|w,\mathfrak{b}|^F\end{cases}$$

が成り立つ．

この定理の系として以下のものが得られる．（これらの証明は Hinman［2］の Chap VI を参照）．

predicate $P(\alpha)$は part. F-rec. func. の domain として表わされるとき，F-semirecursive とよばれる．これは通常の recursion theory における recursively enumerable に対応するものである．従って F-recursively enumerable ともいわれる．

系 2.2　$P(x,\alpha)$ が F-semirec. ならば，part. F-rec. func. $\theta(\alpha)$ で

$$\exists x P(x,\alpha) \leftrightarrow \theta(\alpha)\downarrow$$

$$\exists x P(x,\alpha) \rightarrow P(\theta(\alpha),\alpha)$$

を満たすものが存在する．

系 2.3　$P(x,\alpha)$ が F-semirec. ならば $\exists x P(x,\alpha)$ も F-semirec. である．

系 2.4　P が F-rec. $\Leftrightarrow$ P, $\neg P$ が F-semirec.

系 2.5　φ が part. F-rec. $\Leftrightarrow$ φ のグラフが F-semirec.

これらから，F-semire. set に対する Reduction Theorem，co-F-semirec. set に対する Separation Theorem が成り立つ．また次のような Luckham の定理の一般化が成り立つ．

系 2.6　$A \subseteq \omega$ が F-semirec. な無限集合ならば，A は無限部分集合で F-rec. なものを含む．

（証明）F-semirec. predicate $\forall m \exists n [m<n \,\&\, n \in A]$ に対し系 2.2 を用いればよい．⊠

定理 2.7　$Q_1, \cdots, Q_m$ が F-semirec. で，$\Phi(x, Q_1, \cdots \cdots, Q_m, S)$ が $Q_1, \cdots, Q_m, S$ positive formula ならば，

Φによって定義される monotone operator の最小の fixed point I_Φ は F-semirec. である.

(証明) $P(z,x) \equiv \Phi(x, Q_1, \cdots, Q_m, \{y \mid |z,z,y|^F < |z,z,x|^F\})$ とすると, P は F-semirec. 従って

$$P(z,x) \longleftrightarrow \{e\}^F(z,x)\downarrow$$

となる e が存在する. そこで $Q(x) \equiv P(e,x)$ とすると, Q は F-semirec. である. $|x|_\Phi$ に関する帰納法により,

$$x \in I_\Phi \longrightarrow Q(x)$$

また $|e,e,x|^F$ に関する帰納法により

$$Q(x) \longrightarrow x \in I_\Phi$$

がいえる. 従って $I_\Phi = Q$ となって, I_Φ が F-semirec. であることがいえた. ⊠

3. Shoenfield [5] は次のような ordinal の notation system $(O^F, |\ |_0^F, <_0^F, H_a^F)$ を定義した.

(1) $1 \in O^F$, $|1|_0^F = 0$, $\forall x(\neg x <_0^F 1)$, $H_1^F = \omega$

(2) $a \in O^F$ ならば, $b = 2^a \in O^F$ であって, $|b|_0^F = |a|_0^F + 1$, $x <_0^F b \leftrightarrow x <_0^F a \vee x = a$, $H_b^F = \{x \in \omega \mid F(\lambda n\{(x)_0\}^{H_a^F}(n)) \simeq (x)_1\}$

(3) $a \in O^F$ であって, $\varphi = \lambda n\{e\}^{H_a^F}(n)$ が total かつ, $\varphi(0) = a$, $\forall n[\varphi(n) \in O^F \ \&\ \varphi(n) <_0^F \varphi(n+1)]$ ならば,

$b = 3^a 5^e \in O^F$ であって，$|b|_0^F = \sup_{n<\omega} |\varphi(n)|_0^F$，$x <_0^F b \leftrightarrow$ $\leftrightarrow \exists n\ x <_0^F \varphi(n)$，$H_b^F = \{x \in \omega \mid (x)_1 \in H^F_{\varphi((x)_0)}\}$.

<u>定理 3.1</u> (Shoenfield) $A \subseteq \omega^n$ に対して，

A が F-rec. $\Leftrightarrow \exists a \in O^F$ [A is rec. in H_a^F]

<u>定理 3.2</u> (Shoenfild) 次のような prim. rec. func. L が存在する： $a, b \in O^F$，$|a|_0^F \leqq |b|_0^F$ ならば，H_a^F は recursive in H_b^F with index $L(a,b)$.

次の2つの Lemma は通常の Recursion Theorem および Course-of-values recursion の適用によって容易に証明できる.

<u>補題 3.3</u> 適当に prim. rec. func. η をとれば，各 $a \in O^F$ に対し，$\lambda x\{\eta(a)\}^F(x)$ は H_a^F の特性関数になる.

<u>補題 3.4</u> 次のような prim. rec. func. π が存在する： $a \in O^F$ ならば，$\lambda x\{\pi(a)\}^F(x)$ は $\{x \in O^F \mid x <_0^F a\}$ の特性関数である.

<u>定理 3.5</u> $<_0^F$ は F-semirec. predicate である.

(証明) S-positive formula $\Phi(x, a, S)$ を次のように定める：

$$\Phi(x,a,S) \equiv S(1,2) \ \&\ \{\,[a = 2^{(a)_0} \ \&\ (a)_0 \neq 0 \ \&\ (x = (a)_0 \vee S(x,(a)_0))] \vee [a = 3^{(a)_1} 5^{(a)_2} \ \&\ a \neq 1$$
$$\&\ \lambda t\{\eta((a)_1)\}^F(t) \text{ is total } \&\ \forall n\,(\{(a)_2\}^{\lambda t\{\eta((a)_1)\}^F(t)}(n)$$

is defined) & $\{(a)_2\}^{\lambda t\{\eta((a)_1)\}^F(t)}(0)=(a)_1$

& $\forall n\, S(\{(a)_2\}^{\lambda t\{\eta((a)_1)\}^F(t)}(n),\ \{(a)_2\}^{\lambda t\{\eta((a)_1)\}^F(t)}(n+1))$

& $\exists n\, S(x,\ \{(a)_2\}^{\lambda t\{\eta((a)_1)\}^F(t)}(n))\,]\,\}$

上の補題および $<_0^F$ の定義から分かるように，$<_0^F=I_{\Phi}$．

従って、定理2.7から $<_0^F$ は F-semirec. である．⊠

<u>系 3.6</u>　O^F は complete F-semirec. set である．

（証明）　$a\in O^F \longleftrightarrow a=1 \vee 1<_0^F a$　であるから、O^F は F-semirec．である．Shoenfield による定理3.1の証明を検討することにより、prim. rec. func. θ で、

$$\{z\}^F(a_1,\cdots,a_m)\downarrow \ \longleftrightarrow\ \theta(z,\langle a_1,\cdots,a_n\rangle)\in O^F$$

なるものが存在する．従って $P\subseteq\omega$ が F-semirec. ならば $P(x)\longleftrightarrow\{e\}^F(x)\downarrow$　と表わせるから

$$P(x)\longleftrightarrow\theta(e,\langle x\rangle)\in O^F$$

故に O^F は complete F-semirec. set である．⊠

ω_1^F により最初の non F-recursive ordinal を表わすことにする．すなわち

$$\omega_1^F=\sup\{o(\prec)\mid\ \prec\subseteq\omega\times\omega \text{ is an F-rec. well-ordering}\}$$

このとき，

<u>定理 3.7</u>　$\sup\{|a|_0^F : a\in O^F\}=\omega_1^F$

（証明）　補題3.4により、$a\in O^F$ ならば，$<_0^F$ を $\{x\mid x<_0^F b\}$ に制限したものは order type $|a|_0^F$ の F-rec.

well-ordering になる. 従って $|a|_0^F < \omega_1^F$. 逆に $\prec \subseteq \omega\times\omega$ を任意の F-rec. well-ordering とすると、定理 3.1 により

$$\exists a \in O^F \quad \prec \text{ is recursive in } H_a^F$$

従って $o(\prec) < \omega_1^{H_a^F}$. $O^{H_a^F}$ を Kleene の notation system O を H_a^F に相対化したものとすると, Recursion Theorem を用いることにより、次のような prim. rec. func. π がとれる:

(i) $x \in O^{H_a^F} \longrightarrow \pi(x) \in O^F$

(ii) $|x|_0^{H_a^F} \leqq |\pi(x)|_0^F$

従って $o(\prec) < \omega_1^{H_a^F} \leqq \omega_1^F$. ⊠

<u>補題 3.8</u> 次のような prim. rec. func. $\varphi_<$, $\varphi_\leqslant$ が存在する: $a \in O^F$ ならば, $\lambda x\{\varphi_<(a)\}^F(x)$ は $\{x \in O^F : |x|_0^F < |a|_0^F\}$ の特性関数である. ($\varphi_\leqslant$ は $<$ を $\leqq$ にかえたもの)

これは補題 3.3, 3.4 の証明と同様に, Recursion Th. と Course-of-values recursion の適用により証明できる.

<u>定理 3.9</u> (Boundedness Theorem)

$\theta : \omega \to \omega$ が F-rec. func. で $A = \{a \in \omega \mid \theta(a) \in O^F\}$ ならば,

$$A \text{ が F-rec.} \iff \sup_{a \in A} |\theta(a)|_0^F < \omega_1^F$$

(証明) ⇒. もし $\sup_{a \in A} |\theta(a)|_0^F = \omega_1^F$ ならば,

$$b \notin O^F \longleftrightarrow \forall a\,[a \in A \longrightarrow \{\varphi_<(\theta(a))\}^F(b) \simeq 1]$$

従って $\neg O^F$ は F-semirec. である. 系 2.4 により O^F は F-rec. になる. これは O^F が complete F-semirec. set であることに反する.

$\Leftarrow$. $\sup_{a\in A}|\theta(a)|_0^F < |b|_0^F$ なる $b\in O^F$ をとれば,

$$a\in A \longleftrightarrow \{\varphi_<(b)\}^F(\theta(a))=0$$

従って A は F-rec. である. ☒

4. ここでは, $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ は順序数を表わすものとする. $\mathfrak{F}_1, \cdots, \mathfrak{F}_8$ を Gödel [6] の operation とする. これらに

$$\mathfrak{F}_9(x, y) = F\cap x$$

を付け加えることにより Gödel と同様にして, F-constructible sets が定義できる. すなわち $J: 10\times On\times On \rightarrow On$ を Gödel の J を modify したものとし, $J(i,\alpha,\beta)=\gamma$ のとき $N(\gamma)=i$, $K_1(\gamma)=\alpha$, $K_2(\gamma)=\beta$ とする. そして,

$$C_F(\gamma) = \{C_F(\delta) \mid \delta<\gamma\} \quad \text{if } N(\gamma)=0$$

$$C_F(\gamma) = \mathfrak{F}_i(C_F(K_1(\gamma)), C_F(K_2(\gamma))) \quad \text{if } N(\gamma)=i>0$$

とする. $L_F(\omega_1^F) = \{C_F(\gamma) \mid \gamma<\omega_1^F\}$ とおく. 今 $a\in O^F$ に対して, $C_F(|a|_0^F)$ を簡単のため C_a と書くことにする.

補題 4.1 $J^+(i,a,b,c) \equiv i<10$ & $a,b,c\in O^F$ & $J(i,|a|,|b|)=|c|$

$J^-(i,a,b,c) \equiv i<10$ & $a,b,c\in O^F$ & $J(i,|a|,|b|)\neq|c|$

とすると J^+, J^- は F-semirec. である.

（証明） $J(i,\alpha,\beta)=\gamma$ の inductive definition を O^F の元で翻訳したものを $\Phi(i,a,b,c,S)$ とすると Φ は S-positive になる．そして $J^+=I_\Phi$ であるから定理2.7により J^+ は F-semirec. である．

$$J^-(i,a,b,c)\equiv c\in O^F \ \& \ \exists c'[J^+(i,a,b,c') \ \& \ c\neq c']$$

であるから J^- も F-semirec. である．⊠

<u>補題 4.2</u>　$N^+(c,i)\equiv c\in O^F \ \& \ N(|c|)=i$

$$N^-(c,i)\equiv c\in O^F \ \& \ N(|c|)\neq i$$

とすると N^+, N^- は F-semirec. である．K_1^+, K_1^-, K_2^+, K_2^- についても同様．

（証明） $N^+(c,i)\longleftrightarrow\exists a,b \ J^+(i,a,b,c)$ であるから，N^+ は F-semirec.　また $N^-(c,i)\leftrightarrow\exists i'[J^+(i',a,b,c) \ \& \ i\neq i']$ であるから N^- も F-semirec.．⊠

<u>補題 4.3</u>　$P_\in^+(a,b)\equiv a,b\in O^F \ \& \ C_a\in C_b$

$$P_\in^-(a,b)\equiv a,b\in O^F \ \& \ C_a\notin C_b$$

$$P_=^+(a,b)\equiv a,b\in O^F \ \& \ C_a=C_b$$

$$P_=^-(a,b)\equiv a,b\in O^F \ \& \ C_a\neq C_b$$

とするとこれらはすべて F-semirec. である．

（証明） 4.1, 4.2 を用いこれらを同時に定義する positive inductive operator をとる．定理2.7によりこれらはすべて F-semirec. である．⊠

<u>補題 4.4</u>　Φ が $\Delta_0(F)$-formula ならば,

$$P^+_\Phi(a_1,\cdots,a_n) \equiv a_1,\cdots,a_n \in O^F \ \&\ \Phi(C_{a_1},\cdots,C_{a_n})$$

$$P^-_\Phi(a_1,\cdots,a_n) \equiv a_1,\cdots,a_n \in O^F \ \&\ \neg\Phi(C_{a_1},\cdots,C_{a_n})$$

は F-semirec. である.

(証明) まず Φ が F を含まない場合を証明する. Φ の構成に関する帰納法による. $\Phi = \neg\Psi$ のとき, $P^+_\Phi \equiv P^-_\Psi$, $P^-_\Phi \equiv P^+_\Psi$. $\Phi = \Psi \vee \Theta$ のとき, $P^+_\Phi \equiv P^+_\Psi \vee P^+_\Theta$, $P^-_\Phi \equiv P^-_\Psi \ \&\ P^-_\Theta$. $\Phi(v) = \exists w \in v\, \Psi(w)$ のとき,

$$P^+_\Phi(a) \equiv \exists b\ [P^+_\in(b,a) \ \&\ P^+_\Psi(b)]$$

$$P^-_\Phi(a) \equiv \forall b\ [P^-_\in(b,a) \vee P^-_\Psi(b)]$$

次に Φ が F を含む場合を示す. induction step は上と同じだから, $\Phi(v) = F(v)$ の場合を示せばよい.

$$P^+_\Phi(a) \equiv a \in O^F \ \&\ C_a \text{ is a function } \&\ \exists e\,[\,C_a = \lambda n\{e\}^F(n) \ \&\ F(\lambda n\{e\}^F(n)) = 0\,]$$

$$P^-_\Phi(a) \equiv a \in O^F \ \&\ [\,C_a \text{ is a function} \rightarrow \exists e\,(C_a = \lambda n\{e\}^F(n) \ \&\ F(\lambda n\{e\}^F(n)) = 1\,]$$

従って上に証明したことを用いて P^+_Φ, P^-_Φ は F-semirec. であることがわかる. ☒

transitive set A は $\langle A, \in, A \cap F \rangle$ が KP の model になるとき F-admissible set であるという. $L(\omega_1)$ が admissible であると同様に次の定理が成り立つ.

<u>定理 4.5</u> $L_F(\omega_1^F)$ は F-admissible である.

(証明) $L_F(\omega_1^F)$ が Δ_0-Collection を除いた KP の公理を満たすことは, L が ZF の model になることの証明と同様にして証明される (Gödel [6]). そこで $L_F(\omega_1^F)$ が Δ_0-Collection を満たすことを証明する. $\Phi(x, y)$ を任意の $\Delta_0(F)$ formula, $a \in O^F$ とし,

$$\langle L_F(\omega_1^F), \in, F \cap L_F(\omega_1^F) \rangle \models \forall x \in C_a \exists y \Phi(x, y)$$

が成り立つものとする. $A = \{x \in O^F \mid x <_0^F a\}$ とすると, A は F-rec. であって

$$\forall x \in A \ \exists y \ [P_\in^-(x, a) \vee P_\Phi^+(x, y)]$$

系 2.2 により F-rec. func. $\theta(x)$ で

$$\forall x \in A \ [P_\in^-(x, a) \vee P_\Phi^+(x, \theta(x))]$$

$$x \notin A \longrightarrow \theta(x) = 0$$

なるものが存在する. θ は

$$x \in A \longleftrightarrow \theta(x) \in O^F$$

を満たすから Boundedness Theorem により $\sup_{x \in A} |\theta(x)|_0^F < \omega_1^F$. そこで $b \in O^F$ を $\sup_{x \in A} |\theta(x)|_0^F < |b|_0^F$, $N(|b|_0^F) = 0$ なるようにとれば,

$$\forall x \in C_a \ \exists y \in C_b \ \Phi(x, y)$$

従って Δ_0-Collection が成り立つ. ⊠

$\mathcal{A} = \langle L_F(\omega_1^F), \in, F \cap L_F(\omega_1^F) \rangle$ とすると,

定理 4.6　$P \subseteq \omega$ に対し，

(1)　P が F-rec. $\Leftrightarrow$ P は Δ_1 on $\mathcal{A}$

(2)　P が F-semirec. $\Leftrightarrow$ P は Σ_1 on $\mathcal{A}$

（証明）　(1) は (2) から直ちに出るから (2) を証明すればよい．

$\Rightarrow$. $\mathcal{A}$ での Second Recursion Theorem (Barwise [1] Chap. V 参照）を使えば，

$$\{z\}^F(a_1, \cdots, a_n) \simeq b$$

は Σ_1 on $\mathcal{A}$ である．

$\Leftarrow$. $P(n) \longleftrightarrow \mathcal{A} \models \exists v\, \Phi(v, n)$ なる $\Delta_0(F)$-formula Φ をとる．recursive function $\theta(n)$ を

$$\theta(n) \in O^F, \quad C_{\theta(n)} = n$$

なるようにとれば，

$$P(n) \longleftrightarrow \exists a\, P_\Phi^+(a, \theta(n))$$

従って P は F-semirec. である．⊠

$\langle C_F(\kappa), \in, F \cap C_F(\kappa) \rangle$ が admissible であるとき，κ を F-admissible ordinal という．

定理 4.7　ω_1^F は ω の次の F-admissible ordinal である．

（証明）　κ を F-admissible ordinal とする．$C_F(\kappa)$ の中で Second Recursion Theorem を用いることにより

$$\{z\}^F(a_1, \cdots, a_n) \simeq b$$

は Σ_1 on $C_F(\varkappa)$ となる．従って特に O^F は Σ_1 on $C_F(\varkappa)$．
故に $\omega_1{}^F \leqq \varkappa$．⊠

F-semirec. set $M \subseteq \omega$ は

(i) $\omega - M$ は無限

(ii) $S \subseteq \omega$ が F-semirec. $\Rightarrow$ $S-M$ または $\omega-(S \cup M)$ が有限

なる条件を満たすとき，maximal とよばれる．Kreisel-Sacks [4] は maximal Π_1^1 set の存在を示したが，それと同様にして，

定理 4.7　maximal F-semirec. set が存在する．

参考文献

[1] Barwise : Admissible Sets and Structures, Springer (1975)

[2] Hinman : Recursion-Theoretic Hierarchies, Springer (1978)

[3] Kleene : Recursive functionals and quantifiers of finite type I, Tras. Amer. Math. Soc. 61 (1959) 1-52

[4] Kreisel - Sacks : Metarecursive sets, Jour. Symb. Log. 30 (1965) 318 – 338

[5] Shoenfield ; A hierarchy based on a type 2 object, Trans. Amer. Math. Soc. 134 (1968)

[6] Gödel : The Consistency of the Continuum Hypothesis, Ann. Math. Studies 3 (Princeton Univ. Press).