数理解析研究所講究録
第 337 巻 1978 年 17-28

Cauchy 問題の admissible data について

京大数理研　西和田 公正

次のような Cauchy 問題を考える。

$$(1)\quad \begin{cases} P(x,D)u = 0 \\ D_0^{j-1}u(0,x') = w_j(x') \quad \text{on } \Omega, \quad j=1,2,\cdots,m \end{cases}$$

ここで $x=(x_0,x')=(x_0,x_1,\cdots,x_n)\in \mathbb{R}^{n+1}$, $D=(D_0,D')=(D_0,D_1,\cdots,D_n)$, $D_j=-i\frac{\partial}{\partial x_j}$ であり、Ω は $\{x_0=0\}$ の開集合とする。m 階線型微分作用素 $P(x,D)$ の係数は非特性面 Ω の $\mathbb{R}^{n+1}$ の近傍で実解析的であるとする。

C^∞ data $W=(w_1,\cdots,w_m)\in C^\infty(\Omega)^m$ に対して (1) が Ω のある近傍で C^∞ 解をもつときに W を admissible data と呼ぶことにする。

もしすべての C^∞ data が admissible ならば ξ_0 の方程式 $P_m(0,x',\xi_0,\xi')=0$, $(x',\xi')\in T^*(\Omega)\setminus 0$ は実根のみをもつことが必要であることはよく知られている。(Lax [3], Mizohata [4], Levi conditions の必要性も知られている。[5], [1])

ここでは C^∞ data W で その analytic wave front set が予め指定された場所に入っているものが admissible であるとき

P はどのような条件をみたすべきかを論じる。

I を $T^*(\Omega)\setminus 0$ の錐状部分集合とし、すべての $w = (w_j) \in C^\infty(\Omega)^m$ で $WF_A(w_j) \subset I$ をみたすものが admissible data であるとき Cauchy 問題(1)は $\mathcal{E}_I$-well-posed であると言うことにする。(解の一意性は Holmgren の定理より従がう。また初期値に対する解の連続性もある意味でなりたつことがわかる。)

__定理__ Cauchy 問題(1)が $\mathcal{E}_I$-well posed ならばある I の錐状近傍 J が存在して $P_m(0, x', \xi_0, \xi') = 0$, $(x', \xi') \in J$ は ξ_0 について実根のみをもつ。

この結果は well-posed であるための必要条件であるが、この種の問題の十分条件については河合〔2〕にふれてある。(〔2〕で構成された基本解は distribution となることが判るので、もし data が C^∞ であれば解も C^∞ となる。)

定理の証明の方針は基本的には Lax-Mizohata の定理の場合と同様である。本稿ではまずそれを述べたあとに、二、三の例とそれから派生する新たな問題について述べたい。最後に境界値問題の admissible data の定義と若干の結果について述べたい。

§1 証明の方針

$(s,\theta)\in T^*(\Omega)\setminus 0$ とし，$I=(s,\mathbb{R}^+\theta)$ の時に証明すれば十分である。Ω の複素近傍を一つとり $\tilde{\Omega}$ とする。また

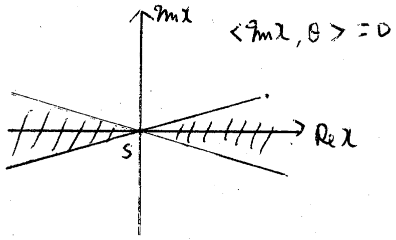
$$\psi_{s,\theta}(x')=\langle x',\theta\rangle + i\sum_{i=1}^{n}(x_i-s_i)^2 , \quad x'\in\mathbb{C}^n$$

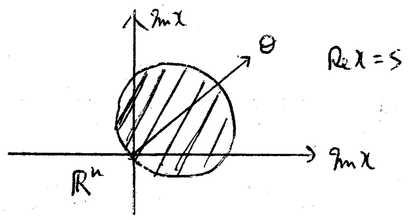
とおく。この函数をもちいて

$$\Omega(s,\theta)=\tilde{\Omega}\cap\{x' ;\ \mathrm{Im}\,\psi_{s,\theta}(x')>0\}$$

と定義する。

注意 1　$\Omega(s,\theta)$ は s 以外の Ω の点を内点として含んでおり，$\mathrm{Re}\,x=s$ のところでは $\mathbb{R}^n$ と2次の接触をしている。





2.　$\tilde{\Omega}$ が stein ならば $\Omega(s,\theta)$ も stein である。いま $f(z)$ を一変数 $z\in\mathbb{C}$ の函数で $|z|<1$ で正則，$|z|\leq 1$ で C^∞，$|z|=1$ を自然境界にもつようなものとする。するとあきらかに $f(e^{i\psi_{s,\theta}(x')})$ は $\mathrm{Im}\,\psi_{s,\theta}>0$ で正則で $\mathrm{Im}\,\psi_{s,\theta}=0$ を自然境界とする函数である。しかも $\mathbb{R}^n$ への境界値は C^∞ 函数である。

この $\Omega(s,\theta)$ をもちいて admissible data の部分空間を次のように定義する。

$$A(s,\theta)=\{W=(w_j)\in C^\infty(\Omega)^m \mid \exists\,\tilde{w}_j\in\mathcal{O}(\Omega(s,\theta)) \text{ s.t. } w_j(x)=$$

$\tilde{w}_j(x+i\theta\cdot 0)\in C^{\infty}(\Omega)\}$

とおく。筆者[6]の結果より $W=(w_j)\in A(s,\theta)$ に対して $WF_A(w_j)\subset I$ がなりたつ。ゆえに仮定より W は admissible data である。次に $A(s,\theta)$ の位相を考える。K_1 を Ω の compact set，K_2 を $\Omega(s,\theta)$ の compact set，Γ を

$\{\langle \mathrm{Im}\,x',\theta\rangle>\delta_1|\mathrm{Im}\,x'|+\delta_2|\mathrm{Im}\,x'|^2\}\cap(\tilde{\Omega}$ の compact set)

なる集合とする。但し $\delta_1>0$，$\delta_2>1$ の範囲で δ_1，δ_2 を動かす。このとき セミノルム系 $A(s,\theta)\ni W\longrightarrow$

$$|W|_{k,K_1,K_2,\Gamma}=\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{|\alpha|\le k}\sup_{K_1}|D^{\alpha}w_j|+\sup_{K_2\cup\Gamma}|\tilde{w}_j|\Big)$$

により $A(s,\theta)$ は Fréchet 空間となる。閉写像定理などをつかって次のことが証明できる (cf.[4])。

<u>補題1</u>　s の $\mathbb{R}^{n+1}$ の近傍 D が存在して，任意の $W\in A(s,\theta)$ に対して $Pu=0$，$\gamma(u)=W$ on $D\cap\Omega$ なる $u\in C^m(D)$ が一意的に定まる。ここで $\gamma(u)=(u(0,x'),D_0u(0,x'),\cdots,D_0^{m-1}u(0,x'))$ である。更に $A(s,\theta)\ni W\longrightarrow u\in C^m(D)$ は連続であり 任意の $K\subset\subset D$ に対して $\exists C,k,K_1,K_2,\Gamma$ が定まり

$$(E)\quad \sum_{|\alpha|\le m}\sup_{K}|D^{\alpha}u|\le C|W|_{k,K_1,K_2,\Gamma}$$

が成立つ。

さて上の K として $K=\{x \mid x_0 \geq 0,\ |x_0|+|x'-s|<a\}$ $(\subset D,\ a>0)$ とおくことにする。すると補題1により $\tilde{K}, K_1$, K_2, Γ が定まるわけであるが、次のことはあきらかであろう。

$$\begin{cases} (s,\theta) \text{ の } T^*(\Omega) \text{ での}\overset{\text{ある}}{}\text{近傍 } U \text{ が存在し} \\ \operatorname{Im} \psi_{\hat{s},\hat{\theta}}(x') \geq 0 \quad \text{on} \quad K_1,\ K_2, \text{ and } \Gamma,\quad \forall (\hat{s},\hat{\theta}) \in U. \end{cases}$$

そこでこのような U の一点 $(\hat{s},\hat{\theta})$ で $P_m(0,\hat{s},\xi_0,\hat{\xi})=0$ が $\operatorname{Im}\xi_0<0$ なる根をもったとして矛盾を導くことを考える。以後座標変換により $(\hat{s},\hat{\theta})=(0,e_n)$ と仮定し、$\psi_{\hat{s},\hat{\theta}}=\psi$ とかくことにする。

§2 証明の方針（続き）

座標変換 $y=\rho^s x=(\rho^{s_0}x_0,\cdots,\rho^{s_n}x_n)$, $s_j>0$, $\rho \geq 1$ を考える。$P_\rho(y,D_y)=P(\rho^{-s}y,\rho^s D_y)$ とおく。（cf. Ivrii-Petkov [1]）$u(y), w(y)$ が x の函数としては補題1の条件をみたしており、さらに $P_\rho u(y)=0$, $\gamma(u)=w$ が成り立つとき

$$(E_\rho) \quad \sup_{K_\rho}|u(y)| \leq C\rho^{(m-1)s_0+k|s'|}\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{|\alpha|\leq k}\sup_{K_{1\rho}}|D^\alpha w_j|+\sup_{K_{2\rho}\cup\Gamma_\rho}|\tilde{w}_j|\Big)$$

が導かれる。ここで K_ρ etc. は y 空間の集合で K etc. の座標変換による像である。

$s_0=s_m=2\nu$, $s_1=\cdots=s_{n-1}=\nu$ とおくことにする（ν の

値はあとできめる。) よって

$$P_\rho(y,D) = \rho^{2m\nu}\left(P_m(0;D_0,0\cdots D_n) + O(\rho^{-\nu}) \right)$$

$$P_m(0,D_0,0\cdots D_n) = \text{const.}\prod_1^N (D_0 - \mu_\ell D_n)^{r_\ell}$$

ここで $\{\mu_i\}_{i=1}^N$ は相異なる根でそれぞれの重複度は r_ℓ とする。

$$\mathrm{Im}\,\mu_1 \le \mathrm{Im}\,\mu_2 \le \cdots \le \mathrm{Im}\,\mu_N \quad (r_1 \ge r_j \text{ if } \mathrm{Im}\,\mu_j = \mathrm{Im}\,\mu_1)$$

と並べられているとする。仮定より $\mathrm{Im}\,\mu_1 < 0$ である。

ρ に関する漸近解

$$V_\rho(y) = \sum_1^N \sum_{j=-r_\ell+1}^{\infty} e^{-i\rho\varphi_\rho^{(\ell)}(y)}\, v_j^{(\ell)}(y)\, \rho^{-j}$$

を次の順序で構成する。

1. phase function

$$\varphi_\rho^{(\ell)}(y) = (\mu_\ell y_0 + y_n) + i y_1^2 + \cdots + i y_{n-1}^2 + i\rho^{-2\nu}(\mu_\ell y_0 + y_n)^2$$

故に $\varphi_\rho^{(\ell)}(0,y') \; (\equiv \varphi_\rho(0,y')) = y_n + i y_1^2 + \cdots + i y_{n-1}^2 + i\rho^{-2\nu} y_n^2$

$$= \rho^{2\nu}\psi(x')$$

であるから $\mathrm{Im}\,\varphi_\rho^{(\ell)}(0,y') \ge 0$ on $K_{1\rho}$, $K_{2\rho}$ and Γ_ρ

2. transport equation

$$e^{-i\rho\varphi_\rho^{(\ell)}(y)}\, P_\rho(y,D)\, e^{i\rho\varphi_\rho^{(\ell)}(y)}$$

$$= \rho^{2m\nu}\left(\text{const.}\,(D_0 - \mu_\ell D_n)^{r_\ell}\rho^{m-r_\ell} + O(\rho^{m-r_\ell-1}) + O(\rho^{-\nu+m}) \right)$$

$$\overset{\text{def.}}{\equiv} \rho^{2m\nu} L_\rho^{(\ell)}(y,D)$$

故に $m - r_\ell > -\nu + m$ i.e. $\nu > r_\ell$ $(\ell = 1,2,\cdots N)$

なる条件をおくと $L_\rho^{(\ell)}$ の最高次（ρに関する）の項は $(D_0-\mu_\ell D_n)^{r_\ell}$ となる。ゆえに方程式

$$L_\rho^{(\ell)}(y,D)\sum_{j=-r_\ell+1}^{\infty} v_j^{(\ell)}(y)\rho^{-j}=0$$

から Cauchy-Kowalevsky の定理により $v_j^{(\ell)}$ を逐次決めてゆくことができる。その際初期値

$$D_0^{p-1}v_j^{(\ell)}(0,y'),\quad 1\le p\le r_\ell,\quad j\ge -r_\ell+1,\quad 1\le \ell\le N$$

の値をうまく決めることにより次のことがいえる。

補題2　$P_\rho V_\rho\sim 0$ のある漸近解 $V_\rho(y)=\sum_{\ell=1}^{N}\sum_{j=-r_\ell+1}^{\infty}e^{i\rho\varphi_\ell^{(\ell)}(y)}v_j^{(\ell)}(y)\times\rho^{-j}$ が存在し初期条件

(2)　$$\gamma(V_\rho(y))\sim(c_1,\rho c_2,\cdots,\rho^{m-1}c_m)e^{i\rho\varphi_\rho(0,y')}$$

をみたす。定数 c_j をうまくとることにより

$$v_{-r_1+1}^{(1)}(y_0,0)\neq 0,\quad v_{-r_\ell+1}^{(\ell)}\equiv 0\quad \ell>1$$

とできる。

一方(2)の初期データは通常の y' の正則函数と考えることもできるので Cauchy-Kowalevsky の定理により

$$P_\rho(y,D)\,V(y,\rho)=0$$
$$\gamma(V(y,\rho))=(c_1,\rho c_2,\cdots,\rho^{m-1}c_m)e^{i\rho\varphi_\rho(0,y')}$$

なる $V(y,\rho)$ が存在する。もとの x 座標になおして考えれば容易にわかるように $V(y,\rho)$ は ρ によらない 0 の複素近傍で正則である。

補題3　ある 0 の複素近傍 ω と、ω で定義された正則函

数 $v^{(\ell)}(y,\rho)$ $(1 \le \ell \le N)$ と $U(y,\rho)$ が存在し以下の条件をみたす．

$$V(y,\rho) = \sum_{\ell=1}^{N} e^{i\rho\varphi_\ell^{(\ell)}(y)} v^{(\ell)}(y,\rho) + U(y,\rho) \quad \text{in } \omega$$

$$v^{(\ell)}(y,\rho) \sim \sum_{j=-r_\ell+1}^{\infty} v_j^{(\ell)}(y)\rho^{-j} \quad \text{in } \omega$$

$$\sup_{\omega} |U(y,\rho)| \le c e^{-\varepsilon\rho} \quad (c, \varepsilon > 0)$$

この補題が証明されればあとは容易である．実際 $V(y,\rho)$ を評価 (E_ρ) に代入してみる。右辺はあきらかに ρ の多項式 order で増大する，一方左辺は V の $(y_0, 0)$ $(y_0 > 0$, 小$)$ の値をみればわかるように少なくとも $e^{-\rho(\mathrm{Im}\,\mu_1)y_0}\rho^{r_1-1}$ の order で増大する。この矛盾は $P_m(0,\varsigma,\xi_0,\theta)$ が $\mathrm{Im}\,\xi_0 < 0$ なる根をもつと仮定したからであった，同様にして (s,θ) のある近傍では $\mathrm{Im}\,\xi_0 > 0$ なる根をもたないこともわかる，

§3　二，三の例について

いくつかの具体例において data の admissibility を考えてみる，

<例1>　$(t,x) \in \mathbb{R}^2$，$P = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + x\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$，$\Omega = \{t = 0\}$

(w_1, w_2) が admissible とすると w_j は $x > 0$ で real analytic，$x \le 0$ で C^∞ である．（C^∞ は大前提）

一方 w_j が $x \geq -\varepsilon$ $(\exists \varepsilon > 0)$ で real analytic，$x \le -\varepsilon$ で

C^∞ とすると (w_1, w_2) は admissible である。
また定理より、ある $(w_1, w_2) \in C^\infty(\Omega)^2$ で w_j : real analytic if $x \neq 0$ なる non-admissible data が存在する。

〈例2〉 $P = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$, $\Omega = \{t = 0\}$

(w_1, w_2) : admissible ならば

$$WF_A(w_j) \subset \{(x, \xi) \mid \xi_3^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 \geq 0\} .$$

一方 $WF_A(w_j) \subset\subset \{(x, \xi) \mid \xi_3^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 > 0\}$ ならば (w_1, w_2) は admissible である。
また $WF_A(w_j) \subset \{(x, \xi) \mid \xi_3^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 = 0\}$ をみたす non-admissible data が存在する。

〈例3〉 $(t, x, y) \in \mathbb{R}^3$ $P = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\Omega = \{t = 0\}$

$\mathcal{E}_y(\theta) = \{ f \in C^\infty(\Omega)$; $\forall (x, y) \in \Omega$, $\forall \beta$ に対して
$\exists M_\beta = M_{\beta, x, y}$, $\exists C = C_{x, y}$ (β に independent) s.t.
M_β, C : locally bounded in (x, y) ,

$$|D_x^\alpha D_y^\beta f(x, y)| \leq M_\beta C^{|\alpha|} |\alpha|! \}$$

とおくと、$\mathcal{E}_y(\theta)^2$ が admissible data の全体であることがわかる。これをもちいて2つの data で両者の WF_A が全く同じ位置にあるにも拘わらず、一方は admissible で他方は non-admissible な例をつくれる。
$\psi(z)$ を $|z| < 1$ で正則, $|z| \leq 1$ で C^∞, $|z| = 1$ が自然境界であるような $z \in \mathbb{C}$ の函数とする。

$$W = (w_1, w_2) = (\psi(e^{iy-y^2}), 0)$$
$$W' = (w_1', w_2') = (\psi(e^{iy-y^2})\psi(e^{iy-y^2-x^2}), 0)$$

とおく。$w_1 \in \mathcal{E}_y(\theta)$ より W は admissible である。一方 $w_1'(x,0) = \psi(1)\psi(e^{-x^2})$ は $x=0$ で解析的でない（$\psi(1) \neq 0$ としてよい）。故に $w_1' \notin \mathcal{E}_y(\theta)$ であり W' は non-admissible data である。また $WF_A(w_1) = WF_A(w_1') = \{(x, 0; 0, \eta);\ \eta > 0\}$ がなりたつ。

以上の例からもわかるように、実根から虚根へうつる境目の処に data の WF_A がかかっている場合は非常に複雑な状況になっている。WF_A の位置だけでは (non-) admissibility は決定できない。diffraction とも関連した興味ある問題だと云えよう。

§4　境界値問題の admissible data

上の例では挙げなかったが $I\ (\subset T^*(\Omega))$ 上で幾つかの実根と虚根が同時に存在する場合に、I に WF_A をもつ data の admissibility は単にデータの各成分の函数としての性質だけに帰着できず、各成分の相互関係が問題になってくる。そこで次のように問題を設定する。

$$(1)_p \quad \begin{cases} P(x, D)u = 0 \\ D_0^{j-1}u(0, x') = w_j(x') \quad \text{on } \Omega, \quad 1 \leq j \leq p \end{cases}$$

殆んどの notation は前と同じだが p は $\leq m$ なる整数とする。data が admissible ということを定義したいのだが一意性がなりたたないため、単に解けるというだけでは不十分である。そこで解き方を一つ指定し、それに関して admissible かどうかについて考える。

$$\Psi(x', D') = (\psi_{ij}(x', D'))_{\substack{p+1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}}$$

を Ω 上の擬微分作用素を成分とする行列とする。

境界値問題 $(1)_p$ において $W = (w_j)_{1 \leq j \leq p} \in C^\infty(\Omega)^p$ が Ψ-admissible とは、$(W, {}^t(\Psi(x', D')\,{}^tW))$ が $(1)_m$ の admissible data (i.e. $(1)_m$ が (Ωの近傍) $\cap \{x_0 > 0\}$ で C^∞ 解をもつ) であることとする。

Ψ の係数の解析性などについて若干の条件を課したうえ、次のことが証明できる。:

すべての $W = (w_j) \in C^\infty(\Omega)^p$ で $WF_A(w_j) \subset I$ をみたすものが Ψ-admissible であるならば、或る I の錐状近傍 J が存在して ξ_0 の方程式 $P_m(0, x', \xi_0, \xi') = 0$, $(x', \xi') \in J$ は p 個以上 $\mathrm{Im}\,\xi_0 \geq 0$ なる根をもつ。(更に Ψ の主表象とこれらの根がある代数的関係で結ばれていることもわかる。)

References

[1] Ivrii, V. Ya and Y. M. Petkov, Necessary conditions for the Cauchy problems for non-strictly hyperbolic equations to be well-posed, Russian Math. Surveys 29(1974), 1-70.

[2] Kawai, T., Construction of local elementary solutions for linear partial differential oparators with real analytic coefficients (I)-The case with real principal symbols-, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 7(1971), 363-397.

[3] Lax, P. D., Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems, Duke Math. J., 24(1957), 627-647.

[4] Mizohata, S., Some remarks on the Cauchy problem, J. Math. Kyoto Univ. 1(1961), 63- 104.

[5] Mizohata, S. and Y. Ohya, Sur la condition d'hyperbolicité pour les équations à characteristiques multiples. II, Japan J. Math. 40(1971), 63-104.

[6] Nishiwada, K., On local characterization of wave front sets in terms of boundary values of holomorphic functions, to appear.