数理解析研究所講究録
第 337 巻 1978 年 52-68

ある種の方程式に関する特異コーシー問題について

京都工繊短大　浜田雄策

都立大大学院　中村　玄

1．序．複素領域における線形偏微分方程式の特異コーシー問題を考える。

特性根の重複度が一定の場合，分岐した初期条件にかんするコーシー問題は Hamada－Leray－Wagschal [4] によって論ぜられた。

最近，Nakamura [7] は特性根の重複度が一定でない場合について，Granoff－Ludwig [3] の方法を変数係数の作用素に適用し，対角化可能な1階方程式系について特異コーシー問題を論じた。即ち，作用素の特性多様体の幾つかの成分が交わり，その交わりが involutive であるという条件の下で解の特異性の伝播を論じた。

ここでは，単独方程式に関して，その主要部が上の条件を満たし，低階に Levi 条件を課さずに取り扱う。解の特異性に関する幾何学は Leray [6]，Gårding－Kotake－Leray [5] の研究と

密接に関係している。

我々の方法は Nakamura [7] と同様である。次節において仮定と結果を詳しく述べる。

2. 仮定と結果

$\mathbb{C}^{n+1}$ の原点の近傍 X (X の点を $(t,x)=(t,x_1,\cdots,x_n)$ とかく) 上で正則な係数をもつ m 階の微分作用素 $a(t,x,D_t,D_x)$ を考える。

$$a(t,x,D_t,D_x)=\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(t,x)D_t^{\alpha_0}D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}$$

ここで $\alpha=(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^{n+1}$ 1), $|\alpha|=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i$, $D_t=\frac{\partial}{\partial t}$, $D_i=\frac{\partial}{\partial x_i}$ $(1\leq i\leq n)$.

(t,x) の covector を $(\lambda,\xi)=(\lambda,\xi_1,\cdots,\xi_n)$ とかく。作用素 a の特性多項式を $h(t,x,\lambda,\xi)$ とする。又しばしば $t=x_0$, $\lambda=\xi_0$ ともかく。

さて初期平面 S; $t=0$ に関する特異コーシー問題

$$(1)\quad \begin{cases} a(t,x,D_t,D_x)u(t,x)=0, \\ D_t^{\ell}u(0,x)=w_\ell(x) \quad (0\leq \ell\leq m-1) \end{cases}$$

を考える。ここで $w_\ell(x)$ は T; $t=x_1=0$ 上で極をもつとする。

この問題を論ずる為に、作用素 a に次の条件を課す。

仮定(A) $h(t,x,\lambda,\xi)=(\lambda-\lambda^+(t,x,\xi))(\lambda-\lambda^-(t,x,\xi))\prod_{i=1}^{m-2}(\lambda-\lambda_i(t,x,\xi))$

1) $\mathbb{N}$ は nonnegative integers 全体を表わす。

とするとき，$\lambda^{\pm}$, λ_i $(1\le i\le m-2)$ は次の条件を満す。

(i) $\lambda_i(t,x,\xi)$ $(1\le i\le m-2)$, $\lambda^{\pm}(t,x,\xi)$ は $(t,x;\xi)=(0,0;1,0,\cdots,0)$ の近傍で正則である。

(ii) $\lambda^{+}(0,0;1,0,\cdots,0)=\lambda^{-}(0,0;1,0,\cdots,0)$, 且つ $\lambda_i(0,0;1,0,\cdots,0)$ $(1\le i\le m-2)$, $\lambda^{+}(0,0;1,0,\cdots,0)$ は相異なる。

(iii) Poisson bracket $\{\lambda-\lambda^{+}(t,x,\xi),\ \lambda-\lambda^{-}(t,x,\xi)\}$ は $(t,x,\xi)=(0,0;1,0,\cdots,0)$ の近傍で 0。

このとき，特性根 λ_i $(1\le i\le m-2)$, $\lambda^{\pm}$ に対応して，T を通る m ケの特性面 K_i $(1\le i\le m-2)$, $K^{\pm}$

$$K_i:\ \varphi_i(t,x)=0,\quad 1\le i\le m-2,$$

$$K^{\pm}:\ \varphi^{\pm}(t,x)=0$$

が存在する。ここで φ_i $(1\le i\le m-2)$, $\varphi^{\pm}$ は Hamilton - Jacobi の方程式

$$(2)\begin{cases} D_t\varphi_i=\lambda_i(t,x,\operatorname{grad}\varphi_i), & \varphi_i(0,x)=x_1, \quad 1\le i\le m-2 \\ D_t\varphi^{\pm}=\lambda^{\pm}(t,x,\operatorname{grad}\varphi^{\pm}), & \varphi^{\pm}(0,x)=x_1 \end{cases}$$

の解によって与えられる。

次に，$\Phi(t,x,\tau)$ を

$$(3)\begin{cases} \Phi_t=\lambda^{-}(t,x,\Phi_x), \\ \Phi(\tau,x,\tau)=\varphi^{+}(\tau,x) \end{cases}$$

の解とする。

我々はΦについて次の仮定を設ける。

仮定(B)　$\Phi(0,0,\tau)\neq 0$.

このときWeirstrassの予備定理により，

$$\Phi(t,x,\tau)=p(t,x,\tau)P(t,x,\tau)$$

とかける。ここで$p(t,x,\tau)$は原点の近傍で正則で$p(0,0,0)\neq 0$，$P(t,x,\tau)$はτについての特殊擬多項式。

$\Phi(0,x,0)=x_1$故，$P(t,x,\tau)$はτについて既約である。その判別式を$\Delta(t,x)$とする。面K_0を

$$K_0=\{(t,x)\,;\,\Delta(t,x)=0\}$$

によって定義する。K_0はn次元特性面（より詳しくは$\xi_0-\lambda^\pm(t,x,\xi)$に関して特性）で，$K^\pm$に接し，一般にはregularでない。又，明らかに$K_0=\{(t,x)\,;\,\exists\tau\,;\,\Phi(t,x,\tau)=\Phi_\tau(t,x,\tau)=0\}$である。$K=\bigcup_{i=0}^{m-2}K_i\cup K^+\cup K^-$と書こう。

このとき，次の定理が成り立つ。

定理　仮定(A)，(B)の下に，$\mathbb{C}^{n+1}$の原点の近傍$V\subset X$が存在して，コーシー問題(1)は$V-K$の単連結被覆領域上で唯一つの正則解$u(t,x)$をもつ。更に，$u(t,x)$は

$$(4)\quad u(t,x)=\sum_{\lambda=1}^{m-2}\left\{\frac{F_\lambda(t,x)}{[\varphi_\lambda(t,x)]^{p_\lambda}}+G_\lambda(t,x)\log\varphi_\lambda(t,x)\right\}$$

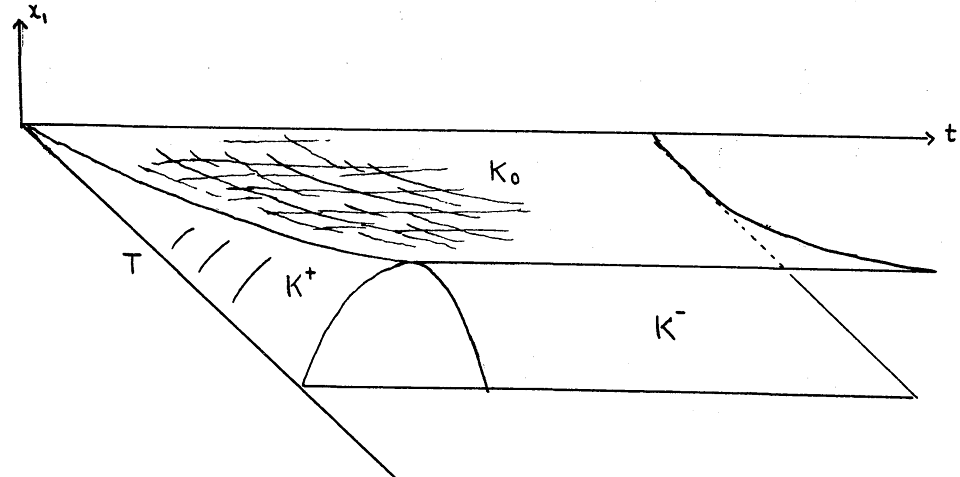
$$+ \frac{F^+(t,x)}{[\varphi^+(t,x)]^{p^+}} + G^+(t,x)\log\varphi^+(t,x) + \int_0^t \Big[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k(t,x,\tau)}{[\Phi(t,x,\tau)]^k}$$

$$+ G(t,x,\tau)\log\Phi(t,x,\tau)\Big]d\tau + H(t,x)$$

によって与えられる。但し，F_i，G_i，F^+，G^+，F_k，G は夫々原点の近傍で正則，p_i，p^+ は正の整数である。

注意　解の表示式(4)は仮定(A)のみから得られる。仮定(B)より，解の特異性がK上にあることが分る。

例　$h = D_t^2 + 2x_2 D_t D_1 + D_t D_2$ 。このとき，$\lambda^+ = -2x_2\xi_1 - \xi_2$ ，$\lambda^- = 0$ ，$\Phi = x_1 - 2x_2\tau + \tau^2$，$K^+$：$\varphi^+ = x_1 - 2x_2 t + t^2 = 0$，$K^-$：$\varphi^- = x_1 = 0$，$K_0$：$x_1 - x_2^2 = 0$.



2. 定理の証明の概略

証明は古典的な方法でなされる。

先づ Gårding-Kotake-Leray [5], Granoff-Ludwig [3], Vaillant [9], Nakamura [7] 等による漸近展開の方法で形式解を構成し，次にその収束を，Wagschal [8], De Paris [2], Hamada-Leray-Wagschal [4] 等による優函数の方法で示す。解の特異性の幾何学的考察は Gårding-Kotake-Leray [5] の研究と密接に関係している。

さて，コーシー問題(1)を解く分けであるが，重畳の原理により，$w_l(x) = \dfrac{w_l'(x)}{x_1^p}$ $(0 \le l \le m-1)$ の場合を考えれば十分である。

$$H(t,x,\lambda,\xi) = h(t,x,\lambda,\xi) + g(t,x,\lambda,\xi),$$

$$g(t,x,\lambda,\xi) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} h_i^{(i)}(t,x,\lambda,\xi)$$

(以下 $\dfrac{\partial^p}{\partial x_{i_1}\cdots\cdots\partial x_{i_p}}\dfrac{\partial^q}{\partial\xi_{j_1}\cdots\cdots\partial\xi_{j_q}} h(x_0,x,\xi_0,\xi) = h_{i_1,\cdots\cdots,i_p}^{(j_1,\cdots\cdots,j_q)}(x_0,x,\xi_0,\xi)$
と略記する。)

とおき，作用素 a を

$$a(t,x,D_t,D_x) = H(t,x,D_t,D_x) - b(t,x,D_t,D_x)$$

とおく。但し，order $b \le m-1$ である。

$u^{(k)}$ を逐次コーシー問題

$$(5)\quad \begin{cases} H u^{(0)} = 0, \\ D_t^l u^{(0)}(0,x) = \dfrac{w_l'(x)}{x_1^p} \quad (0 \le l \le m-1) \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} Hu^{(k)} = b\,u^{(k-1)}, & k \geq 1 \\ u^{(k)} = O(t^m) \end{cases}$$

の解とする。 $u = \sum_{k=0}^{\infty} u^{(k)}$ は (1) の形式解である。

各 $u^{(k)}$ を

$$(7)\quad u^{(k)} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{\lambda=1}^{m-2} f_j(\varphi_\lambda) U_{j,\lambda}^{(k)} + f_j(\varphi^+) V_j^{(k)} + \int_0^t f_j(\Phi) W_j^{(k)}(t-\tau, x, \tau)\, d\tau \right\}$$

の形で求める。

ここで $f_j(s)$ $(j \in \mathbb{Z})$ は $\frac{df_j}{ds} = f_{j-1}$, $f_0(s) = (-1)^{p-1}(p-1)!\frac{1}{s^p}$ である

。

(7) が (5), (6) を充す様に $U_{j,\lambda}^{(k)}$, $V_j^{(k)}$, $W_j^{(k)}$ を決めればよい。そ

れには, 主として

$$(8)\quad H(t, x, D_t, D_x) \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[f_j(\varphi^+) V_j^{(k)} + \int_0^t f_j(\Phi) W_j^{(k)}(t-\tau, x, \tau)\, d\tau \right] \right\}$$

の計算が問題となるが, その為の計算公式を幾つか準備する

。以下 $\sum_{j=-\infty}^{\infty}$, suffix k を省略し, $W_j^{(k)}(t-\tau, x, \tau)$ を $W(t, x, \tau)$ とかく

。

先づ仮定 (A) (iii) より, (3) で決められた Φ は次の関係式を充

す。

補題 1.

$$\Phi_t + \Phi_\tau = \lambda^+(t, x, \Phi_x),$$

$$\Phi(t, x, 0) = \varphi^+(t, x)$$

この補題は重要である。

これを用いて

補題2.

$$C(h,\Phi) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=0}^{n} h^{(i,j)}(t,x,\Phi_t,\Phi_x)\Phi_{i,j}\ ,\quad \Phi_{i,j} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\,\partial x_j}$$

とおくと,

$$(9)\quad C(h,\Phi) + g(t,x,\Phi_t,\Phi_x) \equiv 0 \mod \Phi_t\ ,$$

$$(10)\quad C(h,\varphi^{\pm}) + g(t,x,\varphi_t^{\pm},\varphi_x^{\pm}) \equiv 0 \mod (\varphi_t^{\pm} - \lambda^{\mp}(t,x,\varphi_x^{\pm}))$$

又次の Leibniz の公式をしばしば使用する。

公式1. m 階の斉次微分作用素 $H(x,D)$ に対して,

$$H(x,D)\, f(\varphi(x))\, u(x) = f^{(m)}(\varphi)\, H(x,\varphi_x)\, u + f^{(m-1)}(\varphi)\, (H_\xi(x,\varphi_x)\cdot D + \frac{1}{2}\sum_{i,j} H^{(i,j)}(x,\varphi_x)\varphi_{ij})\, u + \sum_{\alpha=2}^{m} f^{(m-\alpha)}(\varphi)\, L_\alpha u\ .$$

ここで L_α は, H と φ のみに関係する α 階の微分作用素。

公式2. $P(t,x,D_t,D_x)$ を m 階の微分作用素とする。このとき,

$$P(t,x,D_t,D_x)\int_0^t F(t,x,\tau)\,d\tau = M(t,x,D_t,D_\tau,D_x)\,F(t,x,\tau)\Big|_{\tau=t} + \int_0^t P(t,x,D_t,D_x)\,F(t,x,\tau)\,d\tau\ .$$

但し,

$$M(t,x,\lambda,\mu,\xi) = \frac{P(t,x,\lambda+\mu,\xi) - P(t,x,\lambda,\xi)}{\mu}\ .$$

以下簡単の為に次の記号を導入する。

函数列 $\{U_j\}$，整数 p, q $(0\leq p\leq q)$ に対して

$$\mathcal{O}(p,q;U_j)=\sum_{\alpha=0}^{q-p}L_{p+\alpha}U_{j-\alpha}\,.$$

ここで L_α は α 階の微分作用素。

これらを用いて，(8) を計算する。結果を述べると，

$$(11)\quad H(t,x,D_t,D_x)\{f_j(\varphi^+)V_j+\int_0^t f_j(\Phi)W_j(t,x,\tau)\,d\tau\}$$

$$=[f_{j-m+1}(\varphi^+)\{L_1^+V_j+\mathcal{O}(2,m;V_{j-1})\}]+[f_{j-m+2}(\varphi^+)\{N_1^+W_j$$

$$+\mathcal{O}(2,m-1;W_{j-1})\}\Big|_{\tau=t}+f_{j-m+2}(\varphi^-)N_1^-W_j\Big|_{\tau=0}+\int_0^t f_{j-m+2}(\Phi)\{K_2W_j$$

$$+\mathcal{O}(3,m;W_{j-1})\}\,d\tau\,]\,.$$

ここで，

$$L_1^+=q(t,x,\varphi_t^+,\varphi_x^+)(\varphi_t^+-\lambda^-(t,x,\varphi_x^+))(D_t-\sum_{i=1}^n\frac{\partial\lambda^+}{\partial\xi_i}(t,x,\varphi_x^+)D_i+C^+(t,x)),$$

$$q(t,x,\lambda,\xi)=\prod_{i=1}^{m-2}(\lambda-\lambda_i(t,x;\xi)),$$

$$N_1^+=q(t,x,\Phi_t+\Phi_\tau,\Phi_x)(D_t+D_\tau-\sum_{i=1}^n\frac{\partial\lambda^+}{\partial\xi_i}(t,x,\Phi_x)D_i+b^+(t,x,\tau)),$$

$$N_1^-=q(t,x,\Phi_t,\Phi_x)(D_t-\sum_{i=1}^n\frac{\partial\lambda^-}{\partial\xi_i}(t,x,\Phi_x)D_i+b^-(t,x,\tau)),$$

$$K_2=q(t,x,\Phi_t,\Phi_x)(D_t+D_\tau)D_t+R_2\,,$$

R_2 は D_t^2, D_tD_τ, D_τ^2 を含まない 2 階の微分作用素。

たとえば，$H(t,x,D_t,D_x)f_j(\varphi^+)V_j$ の計算について述べよう。

公式1より，

$$H(t,x,D_t,D_x)f_j(\varphi^+)V_j = f_{j-m+1}(\varphi^+)[L_1^+V_j + \mathcal{O}(2,m;V_{j-1})],$$

$$L_1^+ = h^{(0)}(t,x,\varphi_t^+,\varphi_x^+)D_t + \sum_{i=1}^{n} h^{(i)}(t,x,\varphi_t^+,\varphi_x^+)D_i + C(h,\varphi^+) + g(t,x,\varphi_t^+,\varphi_x^+)。$$

容易に分かる様に，

$$h^{(0)}(t,x,\varphi_t^+,\varphi_x^+) = q(t,x,\varphi_t^+,\varphi_x^+)(\varphi_t^+ - \lambda^-(t,x,\varphi_x^+)),$$

$$h^{(i)}(t,x,\varphi_t^+,\varphi_x^+) = q(t,x,\varphi_t^+,\varphi_x^+)(\varphi_t^+ - \lambda^-(t,x,\varphi_x^+))\left(-\frac{\partial\lambda^+}{\partial\xi_i}(t,x,\varphi_x^+)\right) \quad (1\le i\le n)$$

従って補題2より，

$$L_1^+ = q(t,x,\varphi_t^+,\varphi_x^+)(\varphi_t^- - \lambda^-(t,x,\varphi_x^+))\left(D_t - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\lambda^+}{\partial\xi_i}(t,x,\varphi_x^+)D_i + C^+(t,x)\right)。$$

(11)式を(5)，(6)式に適用すると次の漸化式を得る。即ち，

$$(12)\begin{cases} L_1^{\lambda}U_{j,\lambda}^{(k)} = \mathcal{O}(2,m;U_{j-1,\lambda}^{(k)}) + \mathcal{O}(0,m-1;U_{j,\lambda}^{(k-1)}) \quad (1\le\lambda\le m-2), \\ L_1^+V_j^{(k)} = 0, \\ (N_1^+W_j^{(k)})(0,x,\tau)\Big|_{\tau=t} = (\mathcal{O}(2,m-1;W_{j-1}^{(k)}) + \mathcal{O}(0,m-2;W_j^{(k-1)}))(0,x,\tau)\Big|_{\tau=t} \\ \qquad\qquad + \mathcal{O}(2,m;V_j^{(k)}) + \mathcal{O}(0,m-1;V_{j+1}^{(k-1)}), \\ (N_1^-W_j^{(k)})(t,x,0) = \mathcal{O}(2,m-1;W_{j-1}^{(k)})(t,x,0), \\ K_2W_j^{(k)} = \mathcal{O}(3,m;W_{j-1}^{(k)}) + \mathcal{O}(0,m-1;W_{j+1}^{(k-1)}) \end{cases}$$

ここで $L_1^\lambda = h^{(0)}(t, x, D_t\varphi_\lambda, \mathrm{grad}\,\varphi_\lambda)D_t + \sum_{i=1}^{n} h^{(i)}(t, x, D_t\varphi_\lambda, \mathrm{grad}\,\varphi_\lambda)D_i + C(h, \varphi_\lambda)$

$+ g(t, x, D_t\varphi_\lambda, \mathrm{grad}\,\varphi_\lambda)$。

(5), (6)式の初期条件についても上と類似した計算を行うと、次の漸化式を得る。即ち,

$$(13)\quad \begin{cases} U_{0,\lambda}^{(0)}(0,x),\ V_0^{(0)}(0,x),\ W_{-1}^{(0)}(0,x,0) = \sum_{l=0}^{m-1} \Delta_l(x)w_l'(x), \\ U_{j,\lambda}^{(k)}(0,x),\ V_j^{(k)}(0,x),\ W_{j-1}^{(k)}(0,x,0) = \sum_{\lambda=1}^{m-2} \mathcal{O}(1, m-1; U_{j,\lambda}^{(k)}) + \mathcal{O}(1, m-1; V_{j-1}^{(k)}) \\ \qquad + \mathcal{O}(1, m-2; W_{j-2}^{(k)})。\end{cases}$$

ここで $\Delta_l(x)$ $(0 \le l \le m-1)$ は原点の近傍で正則な函数。

(12), (13)式をよく眺めると, $U_{j,\lambda}^{(k)}$, $V_j^{(k)}$, $W_{j-1}^{(k)}$ が(12), (13)式により次々と決まり,

$$\begin{cases} U_{j,\lambda}^{(k)},\ V_{j,\lambda}^{(k)} = 0 \quad (j<0), \\ W_j^{(k)} = 0 \quad (j < -k-1), \\ W_j^{(k)} = O(t\tau)^{-j-1} \quad (-k-1 \le j \le -1) \end{cases}$$

である事も分る。従ってコーシー問題(1)の形式解が構成出来た事になる。

3. K_0の幾何学的性質

この節で K_0 の幾何学的性質についての概要及び仮定(B)に対する注意を簡単に述べる。

これらの幾何学は Gårding-Kotake-Leray [5] の結果に密接に関係している。

以下，証明なしに得られた主な結果を述べる。

先づ

$$\pi^{\pm}=\{(t,x,\xi_0,\xi)\in \mathbb{C}^{n+1}\times(\mathbb{C}^{n+1}-0);\ \xi_0-\lambda^{\pm}(t,x,\xi)=0,\ (t,x,\xi)\ \text{は}\ (0,0;1,0,\cdots,0)\ \text{の近傍を動く}\}$$

$$\pi^{\pm}_{(t,x)}=\{(\xi_0,\xi)\in\mathbb{C}^{n+1}-0;\ (t,x,\xi_0,\xi)\in\pi^{\pm}\}$$

とおく。

仮定(A)の(iii)は，$\pi^+\cap\pi^-$ が (t,x,ξ_0,ξ)-space で involutive なる事を意味する。

さて，$\lambda^{\pm}$ に対応する bicharacteristic strip (簡単に $\lambda^{\pm}$-bicharacteristic strip という) は Hamilton system

$$(14)^{\pm}\begin{cases}\dfrac{dt}{d\sigma}=1, & \dfrac{d\xi_0}{d\sigma}=\lambda^{\pm}_t,\\[2ex] \dfrac{dx_i}{d\sigma}=-\dfrac{\partial\lambda^{\pm}}{\partial\xi_i}, & \dfrac{d\xi_i}{d\sigma}=\dfrac{\partial\lambda^{\pm}}{\partial x_i},\quad 1\le i\le n\end{cases}$$

の解で与えられる。

その (t,x)-space への projection は $\lambda^{\pm}$-bicharacteristic curve である。

仮定(A)の(iii)より，

命題 1. $\xi_0-\lambda^+(t,x,\xi)$ (resp. $\xi_0-\lambda^-(t,x,\xi)$) は, λ^- (resp. λ^+) - bicharacteristic strip に沿って constant である。

この事実により, K_0 の幾何学的性質を解析する事が出来る。

先づ

$$\Omega = \{(t,y)\in T;\ t=0,\ y=(0,y'),\ y'=(y_2,\cdots,y_n),$$
$$\lambda^+(0,0,y';1,0,\cdots,0)=\lambda^-(0,0,y';1,0,\cdots,0)\}$$

とおく。更に $\tilde{\Omega}$ を Ω における $\lambda^{\pm}$ に関する characteristic elements:

$$\tilde{\Omega} = \{(t,y,\xi_0,\xi);\ (t,y)\in\Omega,\ \xi_0=\lambda^+(0,0,y';1,0,\cdots,0),$$
$$\xi=(1,0,\cdots,0)\}$$

とおく。又,

$$\Lambda^{\pm} = \{(t,x)\in K^{\pm};\ \lambda^+(t,x,\varphi_x^{\pm}(t,x))=\lambda^-(t,x,\varphi_x^{\pm}(t,x))\}$$

$$\tilde{\Lambda}^{\pm} = \{(t,x,\xi_0,\xi);\ (t,x)\in\Lambda^{\pm},\ \xi_0=\varphi_t^{\pm}(t,x),\ \xi=\varphi_x^{\pm}(t,x)\}$$

とおく。即ち $\Lambda^{\pm}$ は $K^{\pm}$ の subvariety で, そこで $K^{\pm}$ は λ^+, λ^- の両方に関して特性である。

$\tilde{\Omega}$, $\tilde{\Lambda}^{\pm}\subset\Pi^+\cap\Pi^-$ である。

さて仮定 (B) が成立つとする。そのとき,

命題 2.

1°. $K_0 = \{(t,x)\,;\ \exists\tau,\ \Phi(t,x,\tau) = \Phi_\tau(t,x,\tau) = 0\}$。

2°. $K^\pm \supsetneqq \Lambda^\pm$ (resp.), $T \supsetneqq \Omega$, $\dim \Lambda^\pm = n-1$, $\dim \Omega = n-2$。

3°. $K_0 \neq K^\pm$

4° K_0 は $\widetilde{\Lambda}^+$ (resp. $\widetilde{\Lambda}^-$) から出る λ^- (resp. λ^+) -bicharacteristic curve によって生成される。

5° K_0 は $\Lambda^\pm$ 上で $K^\pm$ に接する。K^+, K^-, K_0 は Ω 上で互いに接する。

6° K_0 は $\lambda^\pm$ に関して特性である。

一般に K_0 は regular な面ではない。

命題3. 仮定(B)が充されたとする。そのとき、Hamilton field $H_{\xi_0-\lambda^+}$, $H_{\xi_0-\lambda^-}$ の $\widetilde{\Omega}$ を通る integral manifold を $\widetilde{K}_0$ とすると、K_0 は $\widetilde{K}_0$ の (t,x)-space への projection である。

次に K_0 が regular である為の条件を述べる。

命題4

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(\lambda^+-\lambda^-)}{\partial\xi_i}\,\frac{\partial(\lambda^+-\lambda^-)}{\partial x_i}\bigg|_{(0,0\,;1,0,\cdots,0)} \neq 0$$

とする。このとき、K_0 は原点の近傍で regular である。

この条件についての幾何学的意味も与えられるが，ここでは省略する。

最後に仮定(B)が充されない簡単な判定条件及び注意を述べる。

命題5.

1°. $\pi^{+}_{(0,0)} = \pi^{-}_{(0,0)}$ のとき，仮定(B)は成立しない。

2° $T = \Omega$ のとき，(B)は成立しない。この場合，$K^{+} = K^{-}$。更に，特異コーシー問題(1)の解の特異性は $\bigcup_{i=1}^{n} K_i \cup K^{+}$ に限る。

例. $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - (x_1 a(x))^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots\cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)$。コーシー問題(1)の解の特異性は $x_1 = 0$ 上に限る。

以上の結果の証明及びより精しい結果は，Y. Hamada－G. Nakamura [10]に述べられる予定である。

References

[1] J.M.Bony et P.Schapira, Propagation des singularités analytiques pour les solutions des équations aux dérivées partielles, Ann. Inst. Fourier. 26, 1 (1976), p.81-140.

[2] J.-Cl.De Paris, Problème de Cauchy analytique à données singulières pour un opérateur differentiel bien décomposable, J. Math. pures et appl., 51, 1972, p.465-488.

[3] B.Granoff and D.Ludwig, Propagation of singularities along characteristics with non uniform multiplicities, J. Math. Anal. Appl., 21, 1968, p.556-574.

[4] Y. Hamada, J.Leray et C.Wagschal, Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples : problème de Cauchy ramifié, hyperbolicité partielle. a paraître.

[5] L.Gårding, T.Kotake et J.Leray, Uniformization et développement asymptotiques de la solution du problème de Cauchy linéaire à données holomorphes, Bull. Soc. Math. France, 92, 1964, p.263-361.

[6] J.Leray, Problème de Cauchy 1, Bull. Soc. Math. France, 85, 1957, p.389-429.

[7] G. Nakamura, The singularities of solutions of the Cauchy problems for systems whose characteristic roots are non uniform multiple. to appear.

[8] C.Wagschal, Problème de Cauchy analytique à données meromorphes, J. Math. pures et appl., 51, 1972, p.375-397.

[9] J.Vaillant, Solutios asymptotiques d'un système a caractéristiques de multiplicité variable, J. Math. pures et appl., 53, 1974, p.71-98.

[10] Y.Hamada and G.Nakamura, On the singularities of the solution of the Cauchy problem for the operator with non uniform multiple characteristic, to appear.