数理解析研究所講究録
第 337 巻 1978 年 69-73

変分不等式について

東大 理　小西芳雄

変分不等式は次の3つの型に分類される:

楕円型変分不等式 …… 定常変分不等式
放物型変分不等式 } …… 発展変分不等式
双曲型変分不等式 }
.

Ωを$\mathbb{R}^N$の中の有界領域で十分滑らかな境界Γをもつものとする. $\psi \in H^1(\Omega)$で

$$\psi|_\Gamma \,(\in H^{1/2}(\Gamma)) \geqq 0 \;, \qquad \Delta\psi \in L^2(\Omega)$$

なるものを固定する.

$\boxed{\text{例 1}}$ ('片側'変分問題)　$f \in L^2(\Omega)$ を与えられた関数とする。$u \in L^2(\Omega)$を'変関数', $u \in H_0^1(\Omega)$で'片側制約条件' $u \leqq \psi$を満たすものを'許容関数'とする'汎関数'

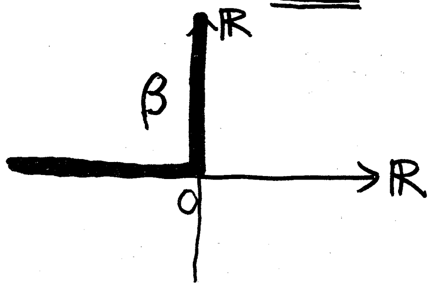
$$J[u] = \frac{1}{2}\int_\Omega |\operatorname{grad} u(x)|^2 dx - \int_\Omega f(x)\,u(x)\,dx$$

を最小にする'変分問題'の'停留関数'が一意に存在し，それは $H^2(\Omega)$ に属する(解の存在，一意性，正則性)．

この汎関数 $J[u]$ の'Eulerの方程式(不等式!)'は，楕円型変分不等式

$$-\Delta u - f \leqq 0, \quad u - \psi \leqq 0, \quad (-\Delta u - f)(u-\psi) = 0$$
$$u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$

である． $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への多価写像 β：

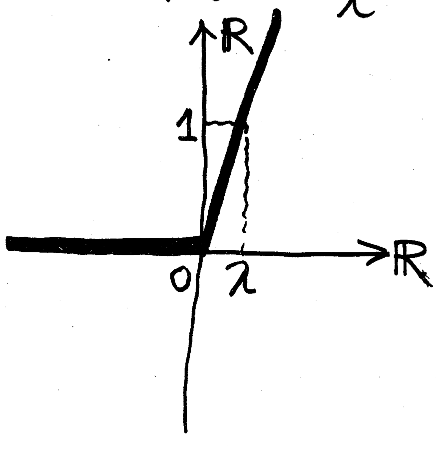


を使うと，'Eulerの(多価!)方程式'は

$$f \in -\Delta u + \beta(u-\psi) \qquad \text{a.e.} x \in \Omega$$
$$u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$

とも書ける． u は β をその'吉田近似' $\beta_\lambda(r) = \dfrac{r^+}{\lambda}$ で置換えた

$$f = -\Delta u_\lambda + \frac{(u_\lambda - \psi)^+}{\lambda}$$
$$u_\lambda \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$



の解 u_λ の $L^2(\Omega)$ での強極限 $(\lambda \downarrow 0)$ としても($\boxed{\text{処罰法}}$)，また Δ をその吉田近似 Δ_λ で置換えた

$$f \in -\Delta_\lambda u_\lambda + \beta(u_\lambda) \qquad a.e.$$

の解u_λの極限としても構成できる。

$\boxed{\text{例2}}$（放物型）任意の$a \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$，$a \leqq \psi$，に対して，$\Omega \times (0, +\infty)$内で殆ど至る処

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \leqq 0, \quad u - \psi \leqq 0, \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u\right)(u - \psi) = 0,$$

そしてΩ内で殆ど至る処

$$u(0) = a$$

を満たす解$u \in C([0, +\infty); L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, +\infty; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$で，$\partial u/\partial t \in L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega))$，各$t \geqq 0$で$u(t) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$，$u(t) \leqq \psi$なるものが一意に存在する。さらに，$a$と同じ条件を満たす$\hat{a}$に対応する解を$\hat{u}$とすると，各$t \geqq 0$で$L^2$ノルムに関して

$$\| u(t) - \hat{u}(t) \| \leqq \| a - \hat{a} \|,$$
$$\| (u(t) - \hat{u}(t))^+ \| \leqq \| (a - \hat{a})^+ \|,$$
$$\| (u(t) - \hat{u}(t))^- \| \leqq \| (a - \hat{a})^- \|$$

が成り立つ．従って，特に$a \leqq \hat{a}$ならば各$t \geqq 0$で$u(t) \leqq \hat{u}(t)$である。

［証明の方針］

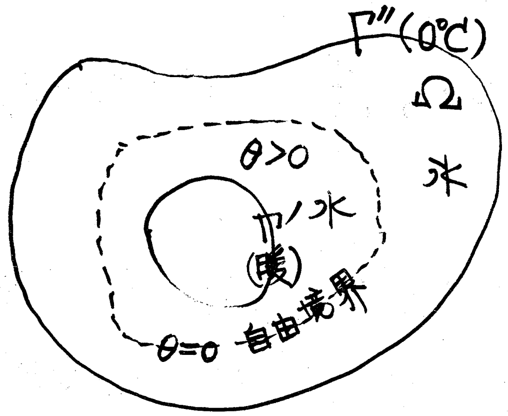
$$\varphi(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_\Omega |\operatorname{grad} u(x)|^2 dx & (u \in H_0^1(\Omega), u \leqq \psi) \\ +\infty & (\text{その他}) \end{cases}$$

とし，$u(t) = e^{-t\partial\varphi} a$ とおけ． ▨

非斉次項がつき $\psi=\psi(t)$ が時刻と共に変わる場合には

$$\begin{cases} f(t) \in \dfrac{d}{dt}u(t) + \partial\varphi^t(u(t)) \\ u(0)=a \end{cases}$$

に関する抽象論が使えて，$\boxed{\text{Stefan問題}}$ が解ける：温度θを



$\Gamma=\Gamma'\cup\Gamma''$

$$\tilde{\theta}=\begin{cases} \theta & \text{水の温度} \\ 0 & \text{氷} \end{cases}$$

と拡張。 $\boxed{\text{結氷率}}$

$$u(x,t)=\int_0^t \tilde{\theta}(x,s)\,ds$$

が放物型変分不等式により記述される。

$\boxed{\text{例3}}$（双曲型） $a\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$，$b\in H_0^1(\Omega)$，$b\leqq\psi$.

$\exists_1\, u\in C([0,+\infty);H_0^1(\Omega))\cap L^\infty_{loc}([0,+\infty);H^2(\Omega))$

$\partial u/\partial t\in L^\infty(0,+\infty;H_0^1(\Omega))$，$\partial^2u/\partial t^2\in L^\infty(0,+\infty;L^2(\Omega))$

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-\Delta u\leqq 0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}-\psi\leqq 0,\quad \left(\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-\Delta u\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\psi\right)=0$$

$$u|_{\Gamma\times(0,\infty)}=0,$$

$$u|_{t=0}=a,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=b.$$

[証明の方針] 先程の β を使って

$$0 \in \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + \beta\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \psi\right) \quad 於\ L^2(\Omega)$$

$$\Updownarrow$$

$$0 \in \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & \beta(\cdot - \psi) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{bmatrix} \quad 於\ H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

$$\therefore \begin{bmatrix} u \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{bmatrix} = e^{-t\begin{bmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & \beta(\cdot - \psi) \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \qquad ▨$$

参考

H. Brézis, Problèmes unilatéraux, J. Math. pures et appl., 51 (1972), 1–168.

高村−小西, 非線型発展方程式, 岩波講座, 基礎数学.

J.-L. Lions, Sur quelques questions d'analyse, de mécanique et de contrôle optimal, Les Presses de l'Université de Montréal, 1976.

J. Watanabe, Evolution equations associated with subdifferentials: recent developments in Japan, Colloque franco-japonais sur analyse fonctionnelle et analyse numérique, Kyoto, 1976.