数理解析研究所講究録
第 337 巻 1978 年 92-125

# 偏微分方程式の解の構造　研究集会

1977年 11月 7日 - 11月 9日

# Doubleの特性根を持つsystemの双曲性に関する注意

京大　理学部　　松本和一郎

**§0. Introductionと定義.**　$\mathbb{R}^{n+1}$の開集合$\Omega$で与えられた．偏微分作用素　$I\frac{\partial}{\partial t}-\sum_{j=1}^{n}A^j(t,x)\frac{\partial}{\partial x_j}+A^0(t,x)$　$(N\times N)$　に対するCauchy問題を考える。（$A^j(t,x)$　$(1\leq j\leq n)$，$A^0(t,x)$ はrealかつ$C^\infty(\Omega)$とする。）作素素を$D_t=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}$，$D_{x_j}=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$を用いてかくと．

(1)　$Lu\equiv D_tu-A_1(t,x,D_x)u+A_0(t,x)u=f(t,x)$

(2)　$u(s,x)=u_0(x)$

ここに．$A_1(t,x,D_x)=\sum_{j=1}^{n}A^j(t,x)D_{x_j}$，$A_0(t,x)=-i\,A^0(t,x)$

である。

この論文において用いる用語は従来のものと異る場合が多いので、まず“ことば”を定義しよう。なお、双曲性は．局所的性質と思われるので、定義も局所的なものを採用した。

**定義1.**　Cauchy問題(1)-(2)が$(t_0,x_0)\in\Omega$で両側に弱適切である。

$\Longleftrightarrow$ $^\exists\varepsilon>0$，$^\exists K_0\subset\subset K_1\subset\subset K_2$ ; compact sets in $\mathbb{R}^n$ s.t. $I=[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]$として．$x\in\mathring{K}_0$，$I\times K_2\subset\Omega$ かつ (2)において $s=t_0$ とすると．$^\forall u_0(x)\in\mathcal{D}(K_0)$ $^\forall f(t,x)\in\mathcal{E}_t(I,\mathcal{D}(K_0))$，$\exists 1\ u(t,x)\in\mathcal{E}_t(I,\mathcal{D}(K_1))$ sol of (1) in $I\times K_2$ satisfying (2).

注] $I$ を $I_+=[t_0, t_0+\varepsilon]$ におきかえると未来に弱適切，$I_-=[t_0-\varepsilon, t_0]$ におきかえると過去に弱適切という。ここでは簡単のために両側への弱適切性のみとりあつかうが，未来への（過去への）弱適切性に対しても対応する結果がえられる。なお一般には未来への弱適切性が過去への弱適切性を保証しないことを注意しておく。（§1. 例3 参照）

定義2. $L$ が $(t_0, x_0)\in\Omega$ で ［$\Omega$ で］ 双曲である。

$\Longleftrightarrow$ $L$ に対する Cauchy 問題 (1)-(2) が $(t_0, x_0)$ で ［$\Omega$ の各点で］ 両側に弱適切である。

さて，$L$ の主要部を $L_p = ID_t - A_1(t, x, D_x)$ とおこう。

定義3. $L_p$ が形式的に双曲型である。

$\Longleftrightarrow$ $\det L_p(t, x, \tau, \xi) = 0$ が $\tau$ の方程式として $(t, x)\in\Omega$, $\xi\in\mathbb{R}^n$ において実根のみ持つ。

定義4. $L_p$ が $(t_0, x_0)\in\Omega$ で ［$\Omega$ で］ 強双曲である。

$\Longleftrightarrow$ ${}^\forall A_0(t, x)\in C^\infty(\Omega)$ に対して $L = L_p + A_0$ が $(t_0, x_0)$ で ［$\Omega$ の各点で］ 双曲的である。

定義5. $L_p$ が $(t_0, x_0)\in\Omega$ で ［$\Omega$ で］ 弱双曲である。

$\Longleftrightarrow$ ${}^\exists A_0(t, x)\in C^\infty(\Omega)$，${}^\exists A_0'(t, x)\in C^\infty(\Omega)$ に対して，$L_p + A_0$ は $(t_0, x_0)$ で ［$\Omega$ の各点で］ 双曲だが，$L_p + A_0'$ は $(t_0, x_0)$ で ［$\Omega$ のある点で］ 双曲的でない。

定義6. $L_p$ が $(t_0, x_0)\in\Omega$ で ［$\Omega$ で］ 安定的に非双曲である。

$\Longleftrightarrow$ $^{\forall} A_0(t,x) \in C^\infty(\Omega)$ に対して $L_p + A_0$ が $(t_0, x_0)$で [$\Omega$のある点で] 双曲的でない。

<u>定義 7.</u> $L$が $\Omega_0 = (T_1, T_2) \times \mathbb{R}^n$ で (一様に) $\mathcal{E}$-適切である。

$\Longleftrightarrow$ $^{\forall} s \in (T_1, T_2)$ に対して $^{\forall} u_0(x) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, $^{\forall} f(t,x) \in \mathcal{E}(\Omega_0)$, $\exists 1\, u(t,x) \in \mathcal{E}(\Omega_0)$ ; sol of (1) in $\Omega_0$ .

よく知られているように $L$が $\Omega$で双曲的なら $L$の主要部$L_p$は$\Omega$で形式的に双曲型でなければならない。(P. D. Lax [9], S. Mizohata [※]) この論文における目的は形式的に双曲型であるにもかかわらず、安定的に非双曲な作用素が $2\times2$ の systemできちんと double root をもつものにすら存在することを、双曲であるための必要条件を分析することにより示すことである。 K. Kasahara - M. Yamaguchi [6] に示唆されるように、$A_1(t,x,\xi)$の固有vector 挙動が重要な役割をはたす。

<u>仮定 1.</u> $\det L_p(t,x,\tau,\xi) = 0$ の根 $\tau = \lambda_j(t,x,\xi)$ は $(t,x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ で常に実かつ重複度一定で、double 又は simple である。

$\lambda_j(t,x,\xi)$ は $1 \le j \le r$ で double, $r+1 \le j \le s = N-r$ で simple とする。このとき次の命題が V. M. Petkov [12], H. Yamahara [13] によって証明されている。 $\tau = \xi_0$, $t = x_0$, $C^{(i)}_{(j)}(x,\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_i} D_{x_j} C(x,\xi)$ とおこう。このとき、subprincipal symbol を、$L_s = A_0 - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n} L_{p(j)}^{(j)}$ とおく。更に $\{A, B\} = \sum_{j=0}^{n} \{ \frac{\partial}{\partial \xi_j} A\, D_{x_j} B - D_{x_j} A \frac{\partial}{\partial \xi_j} B \}$ とおく。

命題1. $\mathcal{L}$ が $\Omega$ で双曲ならば．次の(3)が成り立っている。

$$(3)\qquad {}^{co}L_p \mathcal{L}_s {}^{co}L_p + \frac{1}{2}\, {}^{co}L_p \{\mathcal{L}_p, {}^{co}L_p\}\Big|_{\xi_0=\lambda_j(t,x,\xi)} \equiv 0 \quad (1\leq j\leq r),$$
$$\text{for } (t,x,\xi)\in\Omega\times\mathbb{R}^n .$$

(3)を Levi の条件という。(*) $R_j = \mathrm{rank}\, L_p(t,x,\lambda_j(t,x,\xi),\xi)$ $(1\leq j\leq r)$ とかこう。$R_j = N-2$ の点で、$\lambda_j$ についての(3)は自明となる。仮定1の下で $R_j$ $(1\leq j\leq r)$ が $\Omega\times\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ でそれぞれ一定ならば Levi の条件(3)は $\mathcal{L}$ が双曲であるための十分条件でもあることが．H. O. Kreiss [7], Petkov [12], H. Yamahara [13] によって示されている。又．$R_j$ が一定でない場合には Y. Demay [1] が一つの十分条件を与えている。(**) しかし．彼の条件が成り立ち得るのは各 $R_j$ が bicharacteristic curve に沿って一定の場合に限られるように思われる。(きちんと確めたわけではない。) 更にその場合、Demay の条件はほぼ(3)と同値であるが．完全には同値ではなく．若干より強い。 この論文においては．むしろ bicharacteristic curve に沿って $R_j$ が変わる場合を扱う。

## §1. 結果と例.

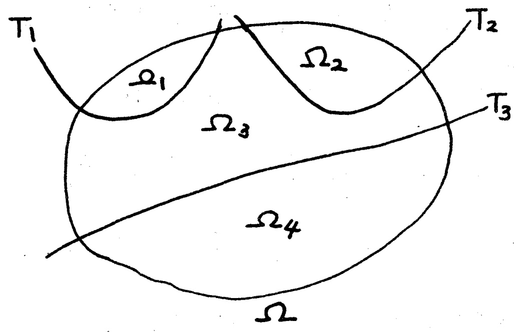
定義8. 超曲面 $T$; $t=\psi(x)\in C^\infty$ が space-like である。

$\Longleftrightarrow$ $|\nabla\psi(x)|\cdot\lambda_{max} < 1$, ここに $\lambda_{max} = \max_{\substack{\xi\in S^{n-1}\\ 1\leq j\leq s}} |\lambda_j(t,x,\xi)|$ である。

(*) (3)と H. Yamahara [13] の Levi の条件との同値性は Tarama によって示された。(unpublished)
(**) K. Kajitani [5] も参照.

<u>仮定2.</u> 次の条件を満たす．$\Omega$で互いに交らないspace-likeな超曲面族$\{T_j\}$がとれる；$\{T_j\}$で区切られる$\Omega$の連結領域を$\{\Omega_k\}$とすると，各$j$，各$\Omega_k$ごとに $R_j = \mathrm{rank}\, L_p(t,x,\lambda_j(t,x,\xi),\xi)$ が $\Omega_k \times \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 上で一定である（$1 \leq j \leq r$）。（図1参照）

注］$\partial\Omega_k \times \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ での $R_j$ は全くfreeである。すなわち，$\{T_j \times \mathbb{R}^n\backslash\{0\}\}$ がrankの変わり目である。




<u>図 1</u>

すべての$j,k$について $R_j = N-2$ (on $\Omega_k \times \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$) ならば，自然に$\Omega \times \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$であり，強双曲である（H.O. Kreiss［7］）。そこで，ある$j,k$について，$R_j = N-1$ on $\Omega_k \times \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ となる場合を考察しよう。

<u>命題2.</u> 仮定1，2の下，$L_p$が$\Omega$で弱双曲とする。このとき，$R_j = N-1$となる$j$及び$\Omega_k$に対して$\overline{\Omega_k} \times \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$における$\lambda_j$に属する$A_1(t,x,\xi)$の単位固有vector $\vec{e}(t,x,\xi)$が$C^\infty(\overline{\Omega_k} \times \mathbb{R}^n\backslash\{0\})$にとれる。

注］ $\vec{e}(t,x,\xi)$が$C^\infty(\Omega_k \times \mathbb{R}^n\backslash\{0\})$にとれることは容易であるが，命題2は自明ではない（例1，2参照）。なお，命題2の仮定の下にも，$\vec{e}(t,x,\xi)$は固有vectorとしては$\partial\Omega_k$をこえては，一般には$C^0$にさえもできない（例3参照）。

但し、$L_p(t,x,\xi)$ の係数 $A^j(t,x)$ が analytic のときは、各 $j$ ごとに $R_j \equiv N-2$ in $\Omega\times\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ か又は、$R_j = N-1$ on $\bigcup_k \Omega_k\times\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ のどちらかであり、後者の場合は $\vec{e}(t,x,\xi)$ は $\Omega\times\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ で analytic にとれる。

<u>例1.</u> $L_p = ID_t - \begin{pmatrix} -tx & t^2 \\ -x^2 & tx \end{pmatrix} D_x$ , $x\in\mathbb{R}^1$, [W. Matsumoto[10]]

$T=\{t=0\}$ である。$(t,x)=(0,0)$ において、固有 vector が $t\geqq 0$ でも、$t\leqq 0$ でも $C^0$ にならない。従って命題2により、$L_p$ は $(0,0)$ において安定的に非双曲である。

<u>例2.</u> $L_p = ID_t - \varphi(t)\begin{pmatrix} \sin(1/t) & 1 \\ -\sin^2(1/t) & \sin(1/t) \end{pmatrix} D_x$ , $x\in\mathbb{R}^1$, [W. Matsumoto[10]]

ここに、$\varphi(t)$ は $t=0$ を $\infty$ 次の0点にもち、$\varphi(t)\neq 0$ $(t\neq 0)$ である実 $C^\infty$-函数である。$T=\{t=0\}$ である。例1と同じ理由で、この $L_p$ も $(0,0)$ で安定的に非双曲である。

仮定1, 2の下 Levi の条件は $L$ が $\Omega$ で双曲であるための十分条件であろうか？おおむね十分だが次のような反例がある。

<u>例3.</u> $L_p = ID_t - \begin{pmatrix} 0 & \mu(t,x) \\ \nu(t,x) & 0 \end{pmatrix} D_x$ , $x\in\mathbb{R}^1$.

ここに、$t_j\uparrow t_0$ $(j\uparrow\infty)$ なる点列 $\{t_j\}$ があって、

(4) $\mu(t,x)\begin{cases} \neq 0 & t_{2j-1}<t<t_{2j} \ (j\geqq 1) \\ =0 & \text{その他} \end{cases}$ , $\nu(t,x)\begin{cases} \neq 0 & t_{2j}<t<t_{2j+1} \ (j\geqq 1) \\ =0 & \text{その他} \end{cases}$

かつ、$\mu,\nu$ は実、$C^\infty$ である。このとき $T_j=\{t=t_j\}$ $(j\in\mathbb{N})$ である。

$A_0 = i\begin{pmatrix} \alpha(t,x) & \beta(t,x) \\ \gamma(t,x) & \delta(t,x) \end{pmatrix}$ とする。Levi condition (3) は $\mu\gamma \equiv \nu\beta \equiv 0$ を意味する。$\Omega \ni (t_0, x_0)$ $({}^{\exists}x_0 \in \mathbb{R}^1)$ となる $\Omega$ に対して、$\Omega$ のある点で $\mu\gamma \neq 0$ 又は $\nu\beta \neq 0$ なら、その点で $L = L_P + A_0$ は双曲でない（命題1）。又、$\mu\gamma \equiv \nu\beta \equiv 0$ in $\Omega$ ならば §2で示すように、$L = L_P + A_0$ は $(t_0, x_0)$ で双曲的でない。従って $L_P$ は $\Omega$ で安定的に非双曲である。

注] 例3の $L_P$ に対してある $A_0$ が Levi の条件(3)をみたしていれば、Cauchy 問題(1)-(2)が任意の点で未来に弱適切である。しかし $(t_0, x_0)$ ($x_0$ は任意の $\mathbb{R}$ の元）においては過去には弱適切でない。更に大域的適切性については、$\Omega_0 = (t_1, t_0) \times \mathbb{R}$ においては Levi の条件の下に Cauchy 問題(1)-(2)が一様 $\mathcal{E}$-well-posed となる。しかし、$\overline{\Omega}_0 = [t_1, t_0] \times \mathbb{R}$ においては、Cauchy 問題(1)-(2)は未来に限っても、どの初期面からも、$\mathcal{E}$-wellposed でない。

<u>仮定3.</u> 仮定2における曲面族 $\{T_j\}$ について、任意の compact set $K \subset \Omega$ に対して、$K$ においては $T_j$ は集積しない。すなわち

(5) ${}^{\exists}\delta_K > 0$, $\mathrm{dist}(T_j \cap K, T_k \cap K) \geqq \delta_K$ (if $j \neq k$).

この仮定を加えると次の命題と定理が成り立つ。

<u>命題3.</u> 仮定1,2,3の下に Levi の条件(3)が成り立っていれば、$L$ は有限伝播速度 $\lambda_{max}(t,x) = \max\limits_{\substack{\xi \in S^{n-1} \\ 1 \leq j \leq s}} |\lambda_j(t,x,\xi)|$ を持つ。

以上の命題により、以下の定理が得られる。

<u>定理1</u>. 仮定1,2,3の下に、$L$が$\overbrace{\text{双曲的}}^{\Omega\text{で}}$であるための必要十分条件はLeviの条件(3)が成り立つことである。

大域的な$\mathcal{E}$-適切性についても次の定理が成り立つ。

<u>定理2</u>. $L_p$の係数$A^j(t,x)$ $(1\le j\le n)$が$C^\infty(\Omega_0)\cap\mathcal{B}^0(\Omega_0)$で且つ仮定1,2,3が成り立っているとしよう。このとき$L$に対するCauchy問題(1)-(2)がuniformly $\mathcal{E}$-well-posedであるための必要にして十分な条件はLeviの条件が$\Omega_0\times\mathbb{R}^n$で成り立つことである。

さて、以上の仮定1,2は次元$n$をsystemの大きさ$N$に関って制限する。特に$N=2$の場合、$n$は1に限られる。しかし、$N=2$の場合は、次の様な設定で任意の$n$について定理が成り立つ。

<u>仮定1′</u>. $\det L_p(t,x,\tau,\xi)=0$ は2重根 $\lambda(t,x,\xi)=\sum_{j=1}^n \lambda^j(t,x)\xi_j$ を持つ。

$\lambda(t,x,\xi)$は自然に実である。$\lambda_j I - A^j(t,x) = \begin{pmatrix} a_j(t,x) & b_j(t,x) \\ c_j(t,x) & d_j(t,x) \end{pmatrix}$ とおこう。$(1\le j\le n)$

<u>仮定2′</u>. あるspace-likeな$\overbrace{\text{超曲面}}^{\text{互いに交らない}}$の族$\{T_j\}$があって、次の条件を満たす；$\{T_j\}$で区切られる領域$\{\Omega_k\}$において、各$\Omega_k$ごとに

$$\sum_{j=1}^n b_j^2(t,x)+\sum_{j=1}^n c_j^2(t,x)\equiv 0 \quad \text{on } \Omega_k\times\mathbb{R}^n \quad \text{又は} \quad \sum_{j=1}^n b_j^2(t,x)+\sum_{j=1}^n c_j^2(t,x)\neq 0 \text{ on } \Omega_k\times\mathbb{R}^n \text{ 上の}$$

が成り立つ。

<u>定理1′</u>. 仮定1′,2′,3の下に、$L$が$\Omega$で双曲であるための必要十分条件はLeviの条件が$\Omega\times\mathbb{R}^n$で成り立つことである。

定理2′. $A^j(t,x) \in \mathcal{B}^0(\Omega_0) \cap C^\infty(\Omega_0)$ $(1 \le j \le n)$ のとき、仮定1′,2′,3 の下に、$L$ に対する Cauchy 問題 (1)-(2) が $\Omega_0$ で一様 $\mathcal{E}$-適切であるための必要十分条件は Levi の条件 (3) が $\Omega_0 \times \mathbb{R}^n$ で成り立つことである。

注1] 定理2′の仮定の下に、各 $\overline{\Omega_k}$ において $\hat{a}(t,x), \hat{b}(t,x), \hat{c}(t,x) \in C^\infty(\overline{\Omega_k})$ があって $\hat{A} = \begin{pmatrix} -\hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{a} \end{pmatrix}$ とおくと、

$$L_p = D_t - \sum_{j=1}^n \lambda^j(t,x) D_{x_j} + \hat{A}(t,x) \sum_{j=1}^n (b_j(t,x) - c_j(t,x)) D_{x_j}$$

とかけること、更に $\hat{A}(t,x)$ が $\overline{\Omega_k}$ で $C^\infty$ の単位固有 vector を持つことが、$L_p$ が $\Omega$ で弱双曲であるための必要十分条件である。ここに $\det \hat{A}(t,x) \neq 0$ on $\overline{\Omega_k}$ である。

注2] $L_p$ が仮定1′の下に弱双曲ならば、$\operatorname{rank} L_p(t,x,\lambda(t,x,\xi),\xi) = 1$ (for $\exists \xi \in S^{n-1}$) となる $(t,x)$ を通る特性曲線に沿って、はじめて $\operatorname{rank} L_p(t,x,\lambda(t,x,\xi),\xi) \equiv 0$ (for $\forall \xi \in S^{n-1}$) となる点まで、$A_1(t,x,\xi)$ の単位固有 vector が $C^\infty$ にとれる。このことにより、Demay の条件 [1] は特性曲線に沿って $\operatorname{rank} L_p(t,x,\lambda,\xi)$ が変わらない場合に限られることがわかる。

## §2. 例3において、$\mu\gamma \equiv \nu\beta \equiv 0$ の場合の $(t_0,x_0)$ における非双曲性

ここに述べる証明は定理1の十分性の証明 (§5) の model にもなるから詳しく述べる。

$L = L_p + A_0$ が $(t_0,x_0)$ で双曲とすると、$\mathcal{O}(K_0) \times \mathcal{E}(I, \mathcal{O}(K_0))$

から解の空間への写像が連続となるから．$\exists M$；自然数，$\exists C>0$，

(2-1) $\quad |u(t,x)|_0 \le C\{|u_0(x)|_M + |f(t,x)|_M\}$

が成り立つ。ここに．$|g(t,x)|_k \equiv \sum_{l=1}^{2} \sup_{\substack{(t,x)\in I\times K_1 \\ i+j\le k}} |(\frac{\partial}{\partial t})^i (\frac{\partial}{\partial x})^j g_l(t,x)|$，

$g(t,x) = {}^t(g_1(t,x), g_2(t,x))$ である。さて．

(2-2) $\quad iLu = \frac{\partial}{\partial t}u - \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \nu & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}u - \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} u$

であるから．$\zeta(x)\in\mathcal{D}(K_0)$，$\zeta(x_0)=1$ をとり．$t_{2j} > t_0-\varepsilon$ に対して．

(2-3) $\quad u(t,x) \equiv \zeta(x)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ix\xi} \quad (t_{4j}\le t\le t_0+\varepsilon)$

とおくと $iLu = \{-(i\xi\zeta(x)+\zeta'(x))\begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} - \zeta(x)\begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}\}e^{ix\xi}$

である。特に $t_{4j}\le t\le t_{4j+1}$ においては $\mu\equiv 0$，$\beta\equiv 0$ だから．

($\because \nu\ne 0 \ (t_{4j}<t<t_{4j+1})$) $\quad iLu = -\zeta(x)\delta(t,x)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{ix\xi}$ である。よって．

(2-4) $$f^j = \begin{cases} \begin{pmatrix} -\xi\mu\zeta + i\mu\zeta' + i\beta\zeta \\ i\delta\zeta \end{pmatrix} e^{ix\xi}, & t \ge t_{4j} \\ i\zeta(x)\delta(t,x)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ix\xi}, & t < t_{4j} \end{cases}$$

とおくと．$f^j \in \mathcal{E}(I, \mathcal{D}(K_0))$ である。

(2-2) $\quad iLu \equiv \frac{\partial}{\partial t}u - \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \nu & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}u - \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}u = -\zeta(x)\delta(t,x)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{ix\cdot\xi}$，

(2-5) $\quad u(t_{4j},x) = \zeta(x)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{ix\xi}$，

を過去に解く。$t_{4j-1}\le t\le t_{4j}$ において $\nu\equiv\gamma\equiv 0$ ゆえ．(2-2) は

(2-2') $$\begin{cases} \partial_t u_1 = \alpha u_1 + \mu\,\partial_x u_2 + \beta u_2, \\ \partial_t u_2 = \delta u_2 - \zeta\delta\, e^{ix\xi}, \end{cases}$$

である。したがって．$u_2(t,x) = \zeta(x)e^{ix\xi}$ である。更に $u_2$ を (2-2') に代入して．$u_1(t,x) = \{\int_{t_{4j}}^{t}(i\xi\zeta(x)\mu(s,x) + \zeta'(x)\mu(s,x) + \zeta(x)\beta(s,x))e^{\int_s^t \alpha(r,x)dr}ds\}e^{ix\xi}$

$\equiv \{ i\xi\zeta(x)\tilde{g}_1(t,x)+\hat{g}_0(t,x)\} e^{ix\cdot\xi}$ を得る。$\hat{g}_1, \hat{g}_0 \in \mathcal{E}_t(I_{4j}, \mathcal{D}(K_0))$,

$(I_{4j}=[t_{4j-1}, t_{4j}])$, $\hat{g}_1(t,x)\neq 0$ $(t_{4j-1}\leq t<t_{4j})$ である。従って

$$(2\text{-}5') \quad u(t_{4j-1}) = \begin{pmatrix} i\xi\zeta(x)g_1(x)+g_0(x) \\ \zeta(x) \end{pmatrix} e^{ix\xi},$$

ここに $g_0(x)\in\mathcal{D}(K_0)$, $g_1(x)\neq 0$ である。

次に $I_{4j-1}=[t_{4j-2}, t_{4j-1}]$ においては $\mu\equiv\beta\equiv 0$ ゆえ.

$$(2\text{-}2'') \quad \begin{cases} \partial_t u_1 = \alpha u_1, \\ \partial_t u_2 = \delta u_2 + \nu\partial_x u_1 + \gamma u_1 - \delta\zeta e^{ix\xi}, \end{cases}$$

(2-2''), (2-5') を $t_{4j-2}\leq t\leq t_{4j-1}$ で解くと.

$$u_1(t,x) = \{ i\xi\zeta(x)g_1(x)+g_0(x)\} \exp\int_{t_{4j-1}}^{t}\alpha(s,x)ds \times e^{ix\xi}$$

$$\equiv \{ i\xi\zeta(x)\tilde{\tilde{g}}_1(t,x)+O(1)\} e^{ix\xi},$$

である。よって. $\partial_t u_2 = \delta u_2 + \{ (i\xi)^2\zeta(x)g_1(x)\exp\int_{t_{4j-1}}^{t}\alpha(s,x)ds + O(\xi)\} e^{ix\xi}$

$= \delta u_2 + \{ (i\xi)^2\zeta(x)h_2(t,x)+O(\xi)\} e^{ix\xi}$, $h_2(t,x)\neq 0$ $(t_{4j-2}\leq t\leq t_{4j-1})$.

$\therefore$ $u_2(t,x) = \{ \zeta(x)\exp\int_{t_{4j-1}}^{t}\delta(s,x)ds + \int_{t_{4j-1}}^{t}\{ (i\xi)^2\zeta(x)h_2(s,x)+O(\xi)\}\exp\int_s^t\delta(r,x)dr\,ds\}$

$\times e^{ix\xi} \equiv \{ (i\xi)^2\zeta(x)\hat{g}_2(t,x)+O(\xi)\} e^{ix\xi}$.

ここに $\hat{g}_2(t,x)\neq 0$ $(t_{4j-2}\leq t<t_{4j-1})$ である。

以下同様にして.

$[t_{4j-(2k-1)}, t_{4j-(2k-2)}]$ においては

$$(2\text{-}6)_1 \quad u(t,x) = \begin{pmatrix} (i\xi)^{2k-1}\zeta(x)\tilde{g}_{2k-1}(t,x)+O(\xi^{2k-2}) \\ (i\xi)^{2k-2}\zeta(x)\hat{\hat{g}}_{2k-2}(t,x)+O(\xi^{2k-3}) \end{pmatrix} e^{ix\xi},$$

$[t_{4j-2k}, t_{4j-(2k-1)}]$ においては

$$(2\text{-}6)_2 \quad u(t,x) = \begin{pmatrix} (i\xi)^{2k-1}\zeta(x)\tilde{\tilde{g}}_{2k-1}(t,x)+O(\xi^{2k-2}) \\ (i\xi)^{2k}\zeta(x)\hat{g}_{2k}(t,x)+O(\xi^{2k-1}) \end{pmatrix} e^{ix\xi}, \quad (k\geq 1),$$

ここに．$\hat{g}_\ell(t,x)\neq 0$ $(t_{4j-\ell}\leq t<t_{4j-\ell+1})$，$\hat{\hat{g}}_{\ell-1}(t,x)\neq 0$ $(t_{4j-\ell}\leq t\leq t_{4j-\ell+1})$。

この解を $u^j(t,x)$ とかく。$(2\text{-}6)_1$, $(2\text{-}6)_2$ において $t=t_{2j}$ とおくと．

(2-7) $u^j(t_{2j},x_0)=O(\xi^{2j})$, $t_{2j}\uparrow t_0$ $(j\uparrow\infty)$ (true order),

である。一方 (2-3), (2-4) により．

(2-8) $|u^j(t_0,x)|_M=O(\xi^M)$, $|f^j(t,x)|_M=O(\xi^{M+1})$,

である。(2-7), (2-8) は (2-1) に反する。　Q.E.D.

## §3. 命題2の証明.

$L$ が Levi の条件(3) をみたすとする。

**Lemma 1.** 1) Levi の条件(3) は space-like な変換に不変である。2) $\xi$ について 0 次斉次の regular matrix $N_0(t,x,\xi)$，$-1$ 次の $N_{-1}(t,x,\xi)$, $N'_{-1}(t,x,\xi)$ に対して．$N=N_0+N_{-1}$, $N'=N_0^{-1}+N'_{-1}$ を symbol に持つ擬微分作用素 $N(t,x,D_x)$, $N'(t,x,D_x)$ とする。$L$ が Levi の条件(3) をみたせば $N(t,x,D_x)L(t,x,D_t,D_x)N'(t,x,D_x)$ も Levi の条件をみたす。

[証明] $\sigma_k(A)$ によって擬微分作用素 $A$ の $k$ 次斉次部分の symbol を表すとする。

1) については、H. Yamahara [13] による．(3) の形からも容易に推察される。2) については $\sigma_1(NLN')=N_0L_pN_0^{-1}(\equiv\tilde{L}_p)$，${}^{co}\tilde{L}_p=N_0\,{}^{co}L_p N_0^{-1}$，及び下の (3-1) に注意すれば容易である。

(3-1) $\sigma_0(NLN')=N_0A_0N_0^{-1}+\sum_{j=0}^{n}N_0L_p^{(j)}N_{0(j)}^{-1}+\sum_{j=0}^{n}N_0^{(j)}L_{p(j)}N_0^{-1}+$
$+\sum_{j=1}^{n}N_0^{(j)}L_pN_{0(j)}^{-1}+N_{-1}L_pN_0^{-1}+N_0L_pN'_{-1}$.　Q.E.D.

Lemma 2. $\forall (t,x,\xi)\in\Omega\times\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, $\exists\omega$ ; $\Omega$における$(t,x)$の近傍, $\exists\Gamma$ ; $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$における$\xi$のconicalな近傍, $\omega\times\Gamma$において. $A_1(t,x,\xi)$は$C^\infty(\omega\times\Gamma)$で実, 0次斉次in $\xi$のblock化行列$B_0(t,x,\xi)$をもつ。すなわち

(3-2) $$A_1B_0=B_0C_1', \quad ここに\ C_1'=\begin{pmatrix} \boxed{C_1^{1\prime}} & & & & & & & 0\\ & \boxed{C_1^{2\prime}} & & & & & & \\ & & \boxed{\ } & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \boxed{C_1^{r\prime}} & & & \\ & & & & & \lambda_{r+1} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & \lambda_s \end{pmatrix},$$

$C_1^{j\prime}$ ; $2\times 2$ $(1\le j\le r)$ かつ実で$\xi$に関して1次斉次の$C^\infty$函数。

[証明] $\lambda_j$のroot spaceへのprojectionが

(3-3) $$P_j=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j}(\eta I-A_1/|\xi|)^{-1}d\eta,$$ $\gamma_j$は$\lambda_j/|\xi|$のみ内部に含む円。

で与えられる。従って$1\le j\le r$において(3-3)の縦vectorのうち一次独立なものを2つ, $r+1\le j\le s$においてnon-zeroなものを1つ取り. 単位化してならべたものを$B_0$とすればよい。$\lambda_j/|\xi|$, $A_1/|\xi|$が$(t,x,\xi)$について$C^\infty$だから. $B_0$は適当なconicalな近傍$\omega\times\Gamma$で$B_0$も$C^\infty$で$\det B_0\neq 0$である。$C_1'=B_0^{-1}A_1B_0$とおけば. $C_1'$はLemma 2の要請をみたす。 Q.E.D.

Lemma 3. K. Kajitani [5]. $\forall (t,x,\xi)\in\Omega\times\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, $\exists\omega$ : n.b.d of $(t,x)$, $\exists\Gamma$: conical n.b.d. of $\xi$, $\omega\times\Gamma$において. $L(t,x,D_t,D_x)$のBlock化行列 $B(t,x,D_x)\sim\sum_{k=0}^{\infty}B_{-k}(t,x,D_x)$があり. 次の性質をもつ。

$$L(t,x,D_t,D_x)B(t,x,D_x)\equiv B(t,x,D_x)C(t,x,D_t,D_x) \mod S^{-\infty},$$

ここに $B_{-k}(t,x,D_x)$は$-k$次斉次の擬微分作用素,

$$(3\text{-}4)\quad C(t,x,D_t,D_x) = \begin{pmatrix} \boxed{C^1} & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \boxed{C^r} & & & \\ & & & c_{r+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & c_s \end{pmatrix},$$

$C^j \sim C^j_1(t,x,D_t,D_x) + \sum_{k=0}^{\infty} C^j_{-k}(t,x,D_x)$ , $2\times 2$ $(1 \le j \le r)$,

$C^j_1(t,x,D_t,D_x) = ID_t - C^{j\prime}_1(t,x,D_x)$ ,

$c^j \sim c^j_1(t,x,D_t,D_x) + \sum_{k=0}^{\infty} c^j_{-k}(t,x,D_x)$ , scalar $(r+1 \le j \le s)$,

$c^j_1(t,x,D_t,D_x) = D_t - \lambda_j(t,x,D_x)$ , in $\omega \times \Gamma$

$C^j_{-k}$ $(1 \le j \le r,\ k \ge 0)$, $c^j_{-k}$ $(r+1 \le j \le s,\ k \ge 0)$ は $-k$ 次斉次の擬微分作用素。

又、$L$ が Levi の条件を満たせば、$C$ が、従って $C^j$ が Levi の条件を満たすように $B, C$ をとれる。

[証明] $B \sim \sum_{k=0}^{\infty} B_{-k}(t,x,D_x)$ とする。

$$LB \sim L_p B_0 + \Big(\sum_{j=0}^{n} L_p^{(j)} B_{0(j)} + A_0 B_0 + L_p B_{-1}\Big) + \cdots$$

$$\sim \sum_{\substack{-j+k+|\alpha|=-1 \\ j=0,1}} \frac{1}{\alpha!} L_j^{(\alpha)} B_{-k(\alpha)}, \qquad ここに\ L_1 = L_p,\ L_0 = A_0 .$$

$$BC \sim B_0 C_1 + \Big(\sum_{j=0}^{n} B_0^{(j)} C_{1(j)} + B_0 C_0 + B_{-1} C_1\Big) + \cdots$$

$$\sim \sum_{\substack{j+k+|\alpha|=-1 \\ j \ge -1,\ k \ge 0}} \frac{1}{\alpha!} B_{-k}^{(\alpha)} C_{-j(\alpha)} .$$

よって $$L_1 B_{-m} - B_{-m} C_1 = \sum_{\substack{j+k+|\alpha|=m-1 \\ k \le m-1 \\ j \le m-2}} \frac{1}{\alpha!} B_{-k}^{(\alpha)} C_{-j(\alpha)} - \sum_{\substack{-j+k+|\alpha|=m-1 \\ k \le m-1 \\ j=0,1}} \frac{1}{\alpha!} L_j^{(\alpha)} B_{-k(\alpha)} + B_0 C_{-(m-1)} .$$

ゆえに両辺に $B_0^{-1}$ を左からかけて.

$$(3\text{-}5)\quad C_1(B_0^{-1}B_{-m}) - (B_0^{-1}B_m)C_1 = \sum_{\substack{j+k+|\alpha|=m-1\\ j\le m-2\\ k\le m-1}} \frac{1}{\alpha!} B_0^{-1} B_{-k}^{(\alpha)} C_{-j\,(\alpha)} +$$

$$- \sum_{\substack{-j+k+|\alpha|=m-1\\ k\le m-1\\ j=0,1}} \frac{1}{\alpha!} B_0^{-1} L_j^{(\alpha)} B_{-k\,(\alpha)} + C_{-(m-1)}\ .$$

$$(3\text{-}6)\quad \hat{B}_{-m} \equiv B_0^{-1}B_{-m} = \left(\begin{array}{c|c|c} B_{-m}^{11} & B_{-m}^{12} & \cdots \\ \hline B_{-m}^{21} & \cdot & \cdot\ \cdot \\ \hline \vdots & \vdots & \end{array}\right),$$

$B_{-m}^{ij}$ は $2\times 2$ $(1\le i, j\le r)$
$2\times 1$ $(1\le i\le r,\ r+1\le j\le s)$
$1\times 2$ $(r+1\le i\le s,\ 1\le j\le r)$
$1\times 1$ $(r+1\le i, j\le s)$

$$C_{-m} = \begin{pmatrix} C_{-m}^{1} & & & & 0 \\ & \boxed{\ } & & & \\ & & \boxed{C_{-m}^{r}} & & \\ & & & C_{-m}^{r+1} & \\ 0 & & & & \ddots\ C_{-m}^{s} \end{pmatrix},\quad C^j\ ;\ 2\times 2\ \ (1\le j\le r),$$

scalar $(r+1\le j\le s)$,

とおき. $B_{-m}^{ij}$, $C_{-(m-1)}^{j}$を $m$の小さい方から inductive に決める。

$C_1\ \tilde{B}_0 - \tilde{B}_0\ C_1 = 0$ ゆえ. Lemma 2 により. $\hat{B}_0 = I$,

$C_1 = \tau I - C_1'(t,x,\xi)$ とればよい。 (3-5) は (3-6) により.

$$(3\text{-}5)'\quad C_1^i B_{-m}^{ij} - B_{-m}^{ij} C_1^j = (\text{known}) + \delta_{ij} C_{-(m-1)}^{j}$$

である。(3-5)' において $i\ne j$ ならば任意の右辺について $B_{-m}^{ij}$ は一意的にとけるから. $B_{-m}^{ij}$ が決定される。 $i=j$ のときは.

右辺が 0 になるように $C_{-(m-1)}^{j}$ を与えると. $B_{-m}^{jj} = 0$ でよい。

このようにして. $B_{-m}$, $C_{-(m-1)}$ が決定される。

なお. $C_0 = B_0^{-1}(L_0 B_0 + \sum_{j=0}^{n} L_1^{(j)} B_{0(j)} + L_1 B_{-1}) - \sum B_0^{-1}(B_0^{(j)} C_{1(j)} + B_{-1} C_1)$

$$= B_0^{-1} A_0 B_0 + \sum_{j=0}^{n} B_0^{-1} L_p^{(j)} B_{0(j)} + \sum_{j=0}^{n} B_0^{-1\,(j)} L_{p(j)} B_0 + \sum B_0^{-1\,(j)} L_p B_{0(j)}$$

$$+ C_1 B_0^{-1} B_{-1} - B_0^{-1\,(j)} B_{0(j)} C_1 - B_0^{-1} B_{-1} C_1$$

であるから Lemma 1 2) と同様にして Leviの条件が保存されている

ことがわかる。又，$C$がblock化されていることから，$C$がLeviの条件をみたすことと$C^j$がLeviの条件をみたすことは同等であることがわかる。　　　　　　Q.E.D.

［命題2の証明］ Lemma 3により，$\omega\times\Gamma$において，問題は$2\times 2$ system $C^j$に帰着された。しかも，$C^j$がLeviの条件(3)をみたすとしてよい。以下しばらく，$j$を略す。$C_1 = (\tau-\lambda(t,x,\xi))I+\tilde{A}_1$，
$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} a(t,x,\xi) & b(t,x,\xi) \\ c(t,x,\xi) & d(t,x,\xi) \end{pmatrix}$ とおくと，$\tilde{A}_1$が固有値として常に$0$を2重根にもつから，

(3-7)　$d\equiv a$，　$a^2+bc\equiv 0$　in $\omega\times\Gamma$，　$\tilde{A}_1^{\,2}\equiv 0$　in $\omega\times\Gamma$

である。領域$\Omega_k$において $\mathrm{rank}\, L_p(t,x,\lambda(t,x,\xi),\xi) = N-1$，すなわち $b^2(t,x,\xi)+c^2(t,x,\xi)\neq 0$ としよう。$\partial\Omega_k$の一部が$T;\ t=\varphi(x)$から成るとしよう。$\Omega_k$は$t<\varphi(x)$の側として一般性を失わない。$\tilde{A}_1 = A$とかくとLeviの条件の左辺は

(3-8)
$$\begin{aligned}
&((\tau-\lambda)I-A)\Big(C_0-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}(\tau-\lambda)^{(j)}_{(j)}I-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}A^{(j)}_{(j)}\Big)((\tau-\lambda)I-A)\\
&\quad+\frac{1}{2}((\tau-\lambda)I-A)\Big\{\sum_{j=0}^{n}((\tau-\lambda)^{(j)}I+A^{(j)})((\tau-\lambda)_{(j)}I-A_{(j)})-\\
&\quad-\sum_{j=0}^{n}((\tau-\lambda)_{(j)}I+A_{(j)})((\tau-\lambda)^{(j)}I-A^{(j)})\Big\}\Big|_{\tau=\lambda}\\
&=A\Big(C_0+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\lambda^{(j)}_{(j)}-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}A^{(j)}_{(j)}\Big)A+\frac{1}{2}A\Big\{-\sum_{j=0}^{n}(\tau-\lambda)^{(j)}(\tau-\lambda)_{(j)}I+\sum_{j=0}^{n}(\tau-\lambda)^{(j)}A_{(j)}\\
&\quad-\sum_{j=0}^{n}(\tau-\lambda)_{(j)}A^{(j)}+A^{(j)}A_{(j)}+\sum_{j=0}^{n}(\tau-\lambda)_{(j)}(\tau-\lambda)^{(j)}I-\sum_{j=0}^{n}(\tau-\lambda)_{(j)}A^{(j)}+\sum_{j=0}^{n}(\tau-\lambda)^{(j)}A_{(j)}\Big\}\\
&\quad-A_{(j)}A^{(j)}\Big\}\\
&=AC_0A-\frac{1}{2}A\sum_{j=1}^{n}(A^{(j)}_{(j)}A+A_{(j)}A^{(j)}-A^{(j)}A_{(j)})+A\sum_{j=0}^{n}\Big\{(\tau-\lambda)^{(j)}A_{(j)}-\sum_{j=1}^{n}(\tau-\lambda)_{(j)}A^{(j)}\Big\}
\end{aligned}$$

$$= AC_0A + AA_{(0)} - \sum_{j=1}^{n} \lambda^{(j)} AA_{(j)} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{(j)} AA^{(j)} + AA^{(j)}A_{(j)}$$

ここで (3-7) を考慮して. $A = \begin{pmatrix} -a & b \\ c & a \end{pmatrix}$, $-iC_0 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ とおくと.

$a_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} a$ を使って. (3-8) = 0 は次のように書き直せる。

$b \neq 0$ の点では (3-8) の (1, 2) 成分に $\frac{1}{b^2}$ をかけて.

(3-9) $$\left(\frac{a}{b}\right)_t - \sum_{j=1}^{n} \lambda_{\xi_j} \left(\frac{a}{b}\right)_{x_j} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{x_j} \left(\frac{a}{b}\right)_{\xi_j} + \sum_{j=1}^{n} \left\{ a_{x_j} - \left(\frac{a}{b}\right) b_{x_j} \right\} \left(\frac{a}{b}\right)_{\xi_j} - \beta \left(\frac{a}{b}\right)^2 - (\alpha - \delta)\left(\frac{a}{b}\right) + \gamma = 0$$

$c \neq 0$ の点では (3-8) の (2, 1) 成分に $\frac{1}{c^2}$ をかけて.

(3-10) $$\left(-\frac{a}{c}\right)_t - \sum_{j=1}^{n} \lambda_{\xi_j} \left(-\frac{a}{c}\right)_{x_j} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{x_j} \left(-\frac{a}{c}\right)_{\xi_j} - \sum_{j=1}^{n} \left( a_{x_j} + \left(\frac{a}{c}\right) c_{x_j} \right) \left(\frac{-a}{c}\right)_{\xi_j} - \gamma \left(-\frac{a}{c}\right)^2 - (\delta - \alpha)\left(-\frac{a}{c}\right) + \beta = 0$$

ここで, $g = \frac{a}{b}$, $h = -\frac{a}{c}$ とおくと. $b \neq 0$, $c \neq 0$ の点でそれぞれ.

(3-9′) $$g_t - \sum_{j=1}^{n} \lambda_{\xi_j} g_{x_j} + \sum_{j=1}^{n} (\lambda_{x_j} + a_{x_j} - b_{x_j} g) g_{\xi_j} - \beta g^2 - (\alpha - \delta) g + \gamma = 0,$$

(3-10′) $$h_t - \sum_{j=1}^{n} \lambda_{\xi_j} h_{x_j} + \sum_{j=1}^{n} (\lambda_{x_j} - a_{x_j} - c_{x_j} h) h_{\xi_j} - \gamma h^2 - (\delta - \alpha) h + \beta = 0.$$

が成り立つ。$g \neq 0$, $h \neq 0$ なら $gh = 1$ である。

そこで $g, h$ を未知函数とみた方程式(3-9′), (3-10′) を.
特性曲線を用いて解いてみる。$\dot{a} = \frac{d}{ds} a$ とおくと.

(3-9″) $$\begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = -\nabla_\xi \lambda \\ \dot{\xi} = \nabla_x \lambda + \nabla_x a - g \nabla_x b \\ \dot{g} = \beta g^2 + (\alpha - \delta) g - \gamma \end{cases}$$

(3-10″) $$\begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = -\nabla_\xi \lambda \\ \dot{\xi} = \nabla_x \lambda - \nabla_x a - h \nabla_x c \\ \dot{h} = \gamma h^2 + (\delta - \alpha) h - \beta \end{cases}$$

今 $\omega$ が $\exists T$ ; $t = \psi(x)$ と交っている場合を考える。$\omega$ を適当に小さくとっておけば、$\omega$ は $T$ 以外の $T_k$ には交らないとしてよい。以下 $\omega \cap \Omega_k$ で考える。

(3-11) $t(0) = \psi(x^0) - \varepsilon_0 (= t^0)$, $x(0) = x^0$, $\xi(0) = \xi^0$, $(t^0, x^0, \xi^0) \in \omega \times \Gamma$

もし、$b(t^0, x^0, \xi^0) \neq 0$ ならば

(3-12) $g(0) = a(t^0, x^0, \xi^0) / b(t^0, x^0, \xi^0)$,

$c(t^0, x^0, \xi^0) \neq 0$ ならば

(3-13) $h(0) = -a(t^0, x^0, \xi^0) / b(t^0, x^0, \xi^0)$

とおく。(3-12) 又は (3-13) の一方は常に意味をもつ。

<u>Lemma 4.</u> (3-9″), (3-11), (3-12) の解 $t(s)$, $x(s)$, $\xi(s)$, $g(s)$ において $g(s) \neq 0$ であるかぎり、$t = t(s)$, $x = x(s)$, $\xi = \xi(s)$, $h = 1/g(s)$ は (3-10″), (3-11), (3-13) をみたす。逆も成り立つ。

[証明] (3-9″), (3-11), (3-12) の解 $t(s)$, $x(s)$, $\xi(s)$, $g(s)$ は解の一意性により、

(3-14) $g(s) = a(t(s), x(s), \xi(s)) / b(t(s), x(s), \xi(s))$

をみたす。$g(s) \neq 0$ は $c(t(s), x(s), \xi(s)) \neq 0$ を意味するから、

(3-15) $h = 1/g(s) = -a(t(s), x(s), \xi(s)) / c(t(s), x(s), \xi(s))$

である。$\dot{t}(s) = 1$, $\dot{x}(s) = -\nabla_\xi \lambda(t(s), x(s), \xi(s))$ はよい。

$$\dot{\xi}(s) = \nabla_x \lambda + \nabla_x a - \left(\frac{a}{b}\right) \nabla_x b \Bigg|_{\substack{t = t(s) \\ x = x(s) \\ \xi = \xi(s)}} = \nabla_x \lambda - \nabla_x a - \left(-\frac{a}{c}\right) \nabla_x c \Bigg|_{\substack{t = t(s) \\ x = x(s) \\ \xi = \xi(s)}}$$

$$\dot{h}(s) = \dot{\left(\frac{1}{g(s)}\right)} = -\frac{\dot{g}(s)}{g(s)^2} = -\frac{\beta g^2 + (\alpha - \delta) g - \gamma}{g^2} \Bigg|_{\substack{t = t(s) \\ x = x(s) \\ \xi = \xi(s) \\ g = g(s)}} = \gamma h^2 + (\delta - \alpha) g - \beta \Bigg|_{\substack{t = t(s) \\ x = x(s) \\ \xi = \xi(s) \\ h = 1/g(s)}}.$$

従って、$t(s)$, $x(s)$, $\xi(s)$, $1/g(s)$ は (3-10″), (3-11), (3-13) の解である。

逆も同様にして示される。 Q.E.D.

$$M = \sup_{(t,x,\xi)\in\omega\times S^{n-1}} \{|\nabla_\xi\lambda|, |\nabla_x\lambda|, |\nabla_x a|, |\nabla_x b|, |\nabla_x c|, |\alpha|, |\beta|, |\gamma|, |\delta|\}$$

$\theta_1 = \arctan 2$ , $\theta_2 = \arctan 3$ $(\theta_1 < \theta_2)$ とおく。

Lemma 5 $\varepsilon_0 < \frac{\theta_2-\theta_1}{M}$ に対して $\Upsilon$ ; $t=\psi(x)-\varepsilon_0$ を (3-9″), (3-10″) の初期面とする。

1) $|g(0)| = \left|a(t^0,x^0,\xi^0)/b(t^0,x^0,\xi^0)\right| \leq 1$ となる点 $(t^0,x^0,\xi^0)$ の $\Upsilon$ 上での近傍で (3-12) に意味があり、そこから出発する (3-9″), (3-11), (3-12) の解は T ; $t=\psi(x)$ をこえて $C^\infty$ である。

2) $|h(0)| = \left|a(t^0,x^0,\xi^0)/c(t^0,x^0,\xi^0)\right| \leq 1$ となる点 $(t^0,x^0,\xi^0)$ の $\Upsilon$ 上での近傍で (3-13) に意味があり、そこから出発する (3-10″), (3-11), (3-13) の解は T ; $t=\psi(x)$ をこえて $C^\infty$ である。

〔証明〕 (3-9″), (3-10″) は共通の優方程式をもつ。

$$(3\text{-}16)\begin{cases} \dot{X} = M , \\ \dot{Ⓒ} = nMⒸ(2+G) , \quad \dot{Ⓗ} = -5\sqrt{n}\,M(2+G) , \\ \dot{G} = M(G^2+1), \end{cases}$$

ゆえに、

$$(3\text{-}17)\begin{cases} X = X_0 + Ms , \quad G = \tan(Ms + \arctan G_0) \\ G \leq 3 \text{ の領域において } Ⓒ \leq Ⓒ_0 e^{5nMs} , \quad Ⓗ \geq Ⓗ_0 e^{-5\sqrt{n}Ms} . \end{cases}$$

ここで (3-9″), (3-10″) で定義される特性曲線の $(t,x)$ 空間への projection は常に $L_p$ のある base characteristic curve に接触していることに注意すれば、$\varepsilon_0 < \frac{\theta_2-\theta_1}{M}$ にとっておけば、$|g(0)|, |h(0)| \leq 2$ を $(\psi(x^0)-\varepsilon_0, x^0, \xi^0)$ $(|\xi^0|\neq 0)$ でとる解 $g(s)$,

$h(s)$ は T上で $|g(s)|, |h(s)| \le \tan\theta_2$ ゆえ、Tをこえて存在する。又その時、$|x(s)-x^0| \le M\varepsilon_0$, $|\xi^0| e^{-s\sqrt{n}M\varepsilon_0} \le \max_j |\xi_j(s)| \le |\xi^0| e^{snM\varepsilon_0}$ $|\xi|=0$ にならない。よって、解は $C^\infty$ である。　　Q.E.D.

Lemma 5 により、$\omega' \subset\subset \omega$, $\Gamma' \subset\subset \Gamma$ となる開集合をとり、$\Upsilon \cap \omega' \times \Gamma'$ を初期面にとると、$\varepsilon_0$を小さくとれば $|g(0)| \le 2$, $|h(0)| \le 2$ の解は $\omega \times \Gamma$ におさまり、$^\exists\omega'' \subset\subset \omega'$, $^\exists\Gamma'' \subset\subset \Gamma'$ なる開集合 $\omega'' \times \Gamma''$ をうめつくす。更に $(s, x^0, \xi^0) \to (t, x, \xi)$ が diffeomorph になる。したがって、$g(t,x,\xi)\Big|_{\Upsilon\cap\omega'\times\Gamma'} = a(t,x,\xi)/b(t,x,\xi)\Big|_{\Upsilon\cap\omega'\times\Gamma'} \le 2$ 又は $h(t,x,\xi)\Big|_{\Upsilon\cap\omega'\times\Gamma'} = -a(t,x,\xi)/c(t,x,\xi)\Big|_{\Upsilon\cap\omega'\times\Gamma'} \le 2$ が $\Upsilon\cap\omega'\times\Gamma'$ の各点の近傍でなり立ち、それに応じて (3-9'), (3-10') はTをこえて $C^\infty$ の解をもつ。更に $g \ne 0$ の領域では $h = 1/g$ が (3-10')の解であり、逆も成り立つ。$g(t,x,\xi)$, $h(t,x,\xi)$ は $\omega\cap\Omega_k$ では、意味のあるかぎり $g \equiv a(t,x,\xi)/b(t,x,\xi)$, $c \equiv -a(t,x,\xi)/c(t,x,\xi)$ である。ゆえに、T上では $g(t,x,\xi)$ か $h(t,x,\xi)$ の少くとも一方が存在することにより、T上では $g, h$ を用いて $\Omega_k$ での固有vector の極限を定義しよう。

$\tilde{A}_1$ の null vector $\tilde{e}$ は $\frac{\pm 1}{\sqrt{a^2+b^2}}\,{}^t(b,a) = \pm\frac{1}{\sqrt{1+g^2}}\,{}^t(1,g)$ $(b \ne 0,\ t < \psi(x))$

又は $\tilde{e} = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}}\,{}^t(-a,c) = \pm\frac{1}{\sqrt{1+h^2}}\,{}^t(h,1)$ $(c \ne 0,\ t < \psi(x))$ だから

$$(3\text{-}18)\quad \tilde{e} = \begin{cases} \pm\frac{1}{\sqrt{1+g^2}}\,{}^t(1,u) \\ \pm\frac{1}{\sqrt{1+h^2}}\,{}^t(h,1) \end{cases}$$

によって $\tilde{e}$ を定義すると、$\tilde{e}$ は $t \le \psi(x)$ で、$\tilde{A}_1$ の null vector になっている。なお (3-18) において ± は上の2式が、

$t\le\psi(x)$ で $C^\infty$ につながるように選ぶ。そうすると $\hat{e}_j=\hat{e}$ は $W''\cap\{t\le\psi(x)\}\times\Gamma''$ で定義され $C^\infty$ である。よって $A_1$ の $\lambda_j$ に属す固有vectorが $W''\cap\overline{\Omega_k}\times\Gamma''$ において、$e_j=\dfrac{B_0\hat{e}_j}{|B_0\hat{e}_j|}$ として得られた。

以上のことが、$\overline{\Omega_k}$ の各点で成り立つ。$e_j$ が real vector であること、$\Omega_k\times\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ において固有空間が一次元であることから、±だけ調節すれば、$e_j$ は $\overline{\Omega_k}\times\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 上の $C^\infty$-vector として接続される。これで命題2の証明が終わった。Q.E.D.

注] $g$, $h$ は T をこえて定義されたが、(3-18) は $t>\psi(x)$ では もはや固有vectorとは限らない。

命題2により、後の証明に用いる Cor. が得られる。

Cor. 1　$L$ が $\Omega$ で双曲ならば、$\forall\Omega_k$ において、$(t,x)\in\partial\Omega_k$、$\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ に対して conical (in $\xi$) な近傍 $\omega\times\Gamma$ があり、$\omega\cap\overline{\Omega_k}\times\Gamma$ 及び $\omega\cap\Omega_k^c\times\Gamma$ において、それぞれ Lemma 2 の $C^j$ は $C^\infty$ の Jordan の標準形化行列、$J^{j,1}$, $J^{j,2}$ をもつ。$(1\le j\le r)$、すなわち

$$
(3\text{-}19)\quad
\begin{cases}
\bullet\ C^j(t,x,D_t,D_x)J^{j,\nu}(t,x,D_x)\equiv J^{j,\nu}(t,x,D_x)\,D^j(t,x,D_t,D_x), \quad (\nu=1,2)\ \bmod S^{-\infty} \\
\bullet\ D^j(t,x,D_t,D_x)\sim D^j_1(t,x,D_t,D_x)+\sum_{k=0}^{\infty}D^j_{-k}(t,x,D_x), \\
\bullet\ D^j_1(t,x,D_t,D_x)=ID_t-\begin{pmatrix}\lambda_j(t,x,D_x) & e_j(t,x,D_x)\\ 0 & \lambda_j(t,x,D_x)\end{pmatrix} \quad \text{in } \overline{\Omega_k} \text{ or } \Omega_k^c \\
\bullet\ J^{j,\nu}(t,x,D_x)\sim\sum_{k=0}^{\infty}J^{j,\nu}_{-k}(t,x,D_x),
\end{cases}
$$

ここに. $D^j_{-k}$, $J^{j,\nu}_{-k}$ は $-k$ 次斉次である。
更に $e_j \neq 0$ in $\Omega_k$ ならば. $D^j_0(t,x,D_x) = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ である。

[証明] $C^j(t,x,\lambda_j(t,x,\xi),\xi)$ の rank が 0 ならば $J^{j,\nu} = I$ でよい。
1 ならば Prop. 2 により. $J^{j,\nu}_0$ がとれることは命題2によりよい。あとは Lemma 3 の証明と同じ。このとき $D^j_0 = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ となるのは Levi の条件 (3) の帰結である。(H. Yamahara [13]).

Q.E.D.

<u>Cor. 2.</u> $L$ が $\Omega$ で双曲ならば. $\forall \Omega_k$, $\forall (t,x,\xi) \in \Omega_k$ に対して conical (in $\xi$) な近傍 $\omega \times \Gamma$ があって. $\omega \cap \overline{\Omega_k} \times \Gamma$ における $\overset{L\text{の}}{\text{Jordan}}$ の標準形化行列 $N(t,x,D_x)$ があり. 次の 1)〜 ) をみたす。

1) $N$ は低階までこめて block 化する。

2) 主要部は Jordan の標準形に変換される。すなわち.

$$N(t,x,D_x)L(t,x,D_t,D_x) \equiv \mathcal{D}(t,x,D_t,D_x)N(t,x,D_x), \bmod S^{-\infty}$$

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}^1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \mathcal{D}^r & & \\ & & & d^{r+1} & \\ 0 & & & & \ddots \; d^s \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}^j = I D_t - \mathcal{D}^j_1 + \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}^j_{-k}, \quad \mathcal{D}^j_1 = \begin{pmatrix} \lambda_j & e_j \\ 0 & \lambda_j \end{pmatrix},$$

$$N \sim \sum_{k=0}^{\infty} N_{-k}, \quad d^j = D_t - \lambda_j + \sum_{k=0}^{\infty} d^j_{-k}.$$

3) $\operatorname{rank} L_p(t,x,\lambda_j(t,x,\xi),\xi) = N-1$ in $\Omega_k \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ならば. $N_0$ の $(2j-1)$ 行, $2j$ 行 の 2行は $\overline{\Omega}_k \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ で global にとれる。

4) $\operatorname{rank} L_p(t,x,\lambda_j(t,x,\xi),\xi) = N-2$ in $\Omega_k \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ なら $e_j \equiv 0$,
$N-1$ ならば $e_j \neq 0$ in $\Omega_k \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ で. 後者の場合 $\mathcal{D}^j_0 = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$.

なお $\mathcal{D}^j_{-k}$, $d^j_{-k}$, $N_{-k}$ はそれぞれ $-k$ 次斉次である。

[証明] 証明は Lemma 3, Cor 1 と同様である。3) については.

$N_0$の $2j$行が $\lambda_j$ の左固有vectorであるから命題2により. 又. $(2j-1)$行は root vector であり. root space が2次元であることから. 固有vector に直交するようにとっていくことにより従う。

Q.E.D.

§4. 命題3の証明. 局所一意性さえ示せば. Leviの条件は space-like な変換に不変だから命題3が従う。

Lemma 6. 仮定1, 2, 3 の下で Leviの条件が成り立っているとする。Lに対する Cauchy 問題(1)-(2) の解に対して. 各$\Omega_k$ において局所一意性が成り立つ。

〔証明〕 $(s, x_0) \in \Omega_k$ の近傍$\omega'$において $u_0(x) \equiv 0$ on $\omega \cap \{t=s\}$, $f(t,x) \equiv 0$ in $\omega'$ としよう。Holmgren変換により. $u_0 \equiv 0$ in $\mathbb{R}^n$, $f(t,x) \equiv 0$ in $[s, s+\varepsilon] \times \mathbb{R}^n$, $u(t,x) \in C^1(I_\varepsilon \times \mathbb{R}^n)$ としてよい。($I_\varepsilon = [s, s+\varepsilon]$)

$\omega$を $\omega \subset \Omega_k$ であり. $\omega \times \Gamma_i$ において. Cor 2. の $N$ が構成できる $(s, x_0)$ の近傍とする。 $\varepsilon$を小さくとることにより. $\bigcup_{t \in I_\varepsilon} \operatorname{supp} u(t,x) \subset \omega$ とできる。 $\{\Gamma_i\}$に属する単位の分解で. $\xi$について0次斉次のものを $\{\alpha_i(\xi)\}$ としよう。方針は H. Yamahara [13] の energy estimate と同じである。

$\omega \times \Gamma$における$N$を$N^i$としよう。 $v_{\langle i \rangle} = N^i u$ とおくと.

$$(4\text{-}1)\quad \begin{cases} \mathcal{D}(t, x, D_t, D_x)\, v_{\langle i \rangle}(t,x) \equiv 0 & \bmod S^{-m} \\ v_{\langle i \rangle}(s, x) = 0 & \end{cases} \quad \text{on } \omega \times \Gamma$$

後で. $\alpha_i(D)$を(4-1)の両辺にかけるので. $\omega \times \Gamma$の外はすべて$S^{-\infty}$

の影響しかうけない。よって $I_\varepsilon \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ で (4-1) と思ってよい。

以下しばらく $i$ を略す。$\|w(t)\| = \|w(t,x)\|_{L^2_x}$, $(g(t), h(t)) = (g(t,x), h(t,x))_{L^2_x}$,

とかく。又、$v = {}^t(v_1, \cdots, v_N)$ のとき、$v^j = \begin{cases} {}^t(v_{2j-1}, v_{2j}), & (1 \le j \le r), \\ v_{r+j} & , (r+1 \le j \le s), \end{cases}$

とおく。各 $v^j$ ごとに考えればよいから.

$\sigma(\Lambda) = \sqrt{1+|\xi|^2}$ として. $j$ を略して. $r+1 \le j \le s$ の場合

$$(4\text{-}2)_1 \qquad \frac{d}{dt}\|\alpha v\| \le C\Big(\|\alpha v\| + \sum_{\ell=1}^n \|\alpha^{(\ell)} \Lambda v\| + \|v\|_{-1}\Big).$$

$1 \le j \le r$ で 主要部が対角のとき

$$(4\text{-}2)_2 \qquad \frac{d}{dt}\|\alpha v\| \le C\Big(\|\alpha v\| + \sum_{\ell=1}^n \|\alpha^{(\ell)} \Lambda v\| + \|v\|_{-1}\Big).$$

$1 \le j \le r$ で 主要部が対角でないとき. $M = \begin{pmatrix} \Lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $w = Mv$

とおく。

$M\mathscr{L}v = \Delta(Mv)$, $\Delta \sim \sum_{k=-1}^{\infty} \Delta_{-k}$, $\Delta_1 = I(D_t - \lambda(t,x,D_x))$ である。

よって $(4\text{-}2)_2$ と同様に.

$$(4\text{-}2)_3 \quad \frac{d}{dt}\|\alpha w\| \le C\Big(\|\alpha w\| + \sum_{\ell=1}^n \|\alpha^{(\ell)} \Lambda v\| + \|w\|_{-1}\Big).$$

対角の $\mathscr{L}_i^{j'}$ については $\|\alpha v^{j'}\|$ を、対角でない $\mathscr{L}_i^{j''}$ は $\|\alpha w^{j''}\|$ を用いて.

$$(4\text{-}3) \qquad E(t) = \sum_i \Big( \sum_{j'} \|\alpha_i v^{j'}_{\langle i \rangle}\| + \sum_{j''} \|\alpha_i w^{j''}_{\langle i \rangle}\| + \sum_{j=r+1}^{s} \|\alpha_i v^j_{\langle i \rangle}\| \Big\} + C_0 \|u\|_{-1}$$

とおく。$C_0$ を十分大きくとっておけば $C_1\|u(t)\|_{-1} \le E(t) \le C_2 \|u(t)\|$.

$N_0^i = (n^i_{k,m})_{1 \le k,m \le N}$ とおく。$(4\text{-}2)_2$ の $\alpha^{(\ell)}\Lambda v$ について. $k = 2j'-1, 2j'$ として. $\mathrm{mod}\ \|u\|_{-1}$ で考えていく。

$$\alpha_i^{(\ell)} \Lambda v_{\langle i \rangle, k} \equiv \sum_{m=1}^N \alpha_i^{(\ell)} \Lambda n^i_{k,m} u_m \equiv \sum_m n^i_{km} \alpha_i^{(\ell)} \Lambda u_m = \sum_m n^i_{km} \alpha_i^{(\ell)} \Lambda \Big(\sum_h \alpha_h u_m\Big)$$

$$\equiv \alpha_i^{(\ell)} \Lambda \sum_h \Big(\sum_m n^i_{km} \alpha_h u_m\Big)$$

ここで、$(n^i_{k,m})_{1 \le m \le N} = \beta^h_{k1} (n^h_{km})_{1 \le m \le N} + \beta^h_{k,2} (n^h_{km})_{1 \le m \le N}$, $\beta^h_{ki}$ : 0 次斉次である。

$(\because (n^{h}_{k,m})_{1\le m\le N}$ は $\lambda_{j'}$ に属する左固有 vector の $\mathrm{supp}\,\alpha_h$ 上の basis.)

$\therefore$

$$\alpha_i^{(\ell)}\Lambda v_{\langle i\rangle,k} \equiv \alpha_i^{(\ell)}\Lambda \sum_h \alpha_h \sum_m (\beta^h_{k1} n_{2j'-1,m} + \beta^h_{k2} n_{2j',m}) u_m$$

$$\equiv \sum_h \{ \alpha_i^{(\ell)}\Lambda \beta^h_{k1}(\alpha_h v_{\langle h\rangle,2j'-1}) + \alpha_i^{(\ell)}\Lambda \beta^h_{k2}(\alpha_h v_{\langle h\rangle,2j'})\}$$

よって.

$$(4\text{-}4)\quad \|\alpha_i^{(\ell)}\Lambda v_{\langle i\rangle,k}\| \le C\sum_h (\|\alpha_h v_{\langle h\rangle,2j'-1}\| + \|\alpha_h v_{\langle h\rangle,2j'}\|) + C\|u\|_{-1}.$$

$(4\text{-}2)_1$ の $\alpha_i^{(\ell)}\Lambda v_{\langle i\rangle}$ についても同様である。

$(4\text{-}2)_3$ の $\alpha_i^{(\ell)}\Lambda w_{\langle i\rangle}$ について。Cor 2 により. $(n^i_{k\,m}) = (n^h_{k,m})$ $(\forall h)$ ゆえ.

$$\alpha_i^{(\ell)}\Lambda w_{\langle i\rangle,2j''} \equiv \alpha_i^{(\ell)}\Lambda \sum_m n^i_{2j'',m} u_m \equiv \sum_h\sum_m \alpha_i^{(\ell)}\Lambda n^i_{2j'',m}(\alpha_h u_m)$$

$$\equiv \alpha_i^{(\ell)}\Lambda \sum_h \alpha_h (\sum_m n^h_{2j'',m} u_m) \equiv \alpha_i^{(\ell)}\Lambda \sum_h \alpha_h w_{\langle h\rangle,2j''}$$

$\alpha_i^{(\ell)}\Lambda w_{\langle i\rangle,2j''-1}$ についても同様にできるが. $\|\alpha_i^{(\ell)}\Lambda w_{\langle i\rangle,2j''-1}\| \le C\|u\|_{-1}$

も成り立つ。いずれにしても

$$(4\text{-}4')\quad \|\alpha_i^{(\ell)}\Lambda w_{\langle i\rangle,k}\| \le C(\sum_h \|\alpha_h w_{\langle h\rangle,k}\| + \|u\|_{-1}),\ (k=2j''-1,\ 2j'').$$

ゆえに $(4\text{-}2)_1$, $(4\text{-}2)_2$, $(4\text{-}2)_3$, (4-3), (4-4), (4-4') により.

$$\frac{d}{dt}E(t) \le C\,E(t).$$

ところで $E(s)=0$ ゆえ. $E(t)\equiv 0$ が従い. $u(t,x)\equiv 0$ $[s,s+\varepsilon]\times\mathbb{R}^n$ である。

Q.E.D.

Lemma 7. Lemma 6 の仮定の下に. 実は $\Omega$ で局所一意性が. 成り立つ。

[証明] Lemma 6 により. 各 $\Omega_k$ では伝播速度 $\lambda_{max}$ で持つことがわかる。ゆえに $\partial\Omega_k$ の上の点について議論しよう。$\partial\Omega_k$ の一部 T 上に $(s,x_0)$ があり、その近傍 $\omega$ において $u_0\equiv 0$ on $\omega\cap\{t=s\}$, $f(t,x)\equiv 0$ in $\omega$ としよう。$\Omega_k$ 内では有限伝播速度を持つから. 図 2 の斜線部 $M_1, M_2$ で $u\equiv 0$ である。 $u$ の連続性により.

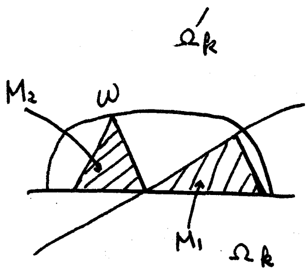



図2

$M_1, M_2$ の境界までこめて $0$ である。$t\le s$ で $u\equiv 0$ とおいてやれば, T上の $(s, x_0)$ の近傍で $u|_T \equiv 0$ となる。そこで, 初期面を T とみて再び Lemma 6 を適用すれば, $\partial\Omega_k$ 上の点の近傍でも局所一意性が成り立つことがわかる。 Q.E.D.

§5. 定理1の十分性の証明. $(t_0, x_0)$ での $L$ の双曲性を示す。

1° reduction. $(t_0, x_0)$ の近傍で考えよう。$(t_0, x_0) \in \overline{\Omega_1}$ とする。

$$(5\text{-}1) \quad \begin{cases} L(t,x,D_t,D_x)\, U_i(t,s,x,y,D_y) \equiv 0, & \mathrm{mod}\, S^{-\infty}, \\ U_i(s,s,x,y,D_y) = \zeta(x) E_i, & E_i = {}^t(0,0,\cdots,0,\overset{i}{1},0,\cdots,0) \end{cases}$$

を満たす Fourier integral operator を求める (L. Hörmander [2], [3], [4]).

Lemma 3, Cor 1 の成り立つ $\omega$, $\Gamma_j$ として $\cup \Gamma_j = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\Gamma_j$ は有限個ととれる。$\omega$ の内部に高々 1つの $T_k = T$ としか交らないように $[t_0-\varepsilon_0, t_0+\varepsilon_0]\times K_4$ をとる。$I_{\varepsilon_0} = [t_0-\varepsilon_0, t_0+\varepsilon_0]$ としよう。$K_4$ は $\mathbb{R}^n$ の compact set である。$K_4 \supset\supset K_3 \supset\supset K_2 \supset\supset K_1 \supset\supset K_0$ となるように compact set $K_i$ $(0\le i\le 3)$ をとる。又, $\varepsilon_1 (<\varepsilon_0)$ を $K_i \supset\supset \{x \mid \mathrm{dist}(x, K_{j-1}) \le \varepsilon_1 \overline{\lambda}_{max}\}$ $(i=1,2,3,4)$ となるようにとる。ここに $\overline{\lambda}_{max} = \max\limits_{\substack{(t,x,\xi)\in I_{\varepsilon_0}\times K_4\times S^{n-1} \\ 1\le j\le s}} |\lambda_j(t,x,\xi)|$ である。$\zeta(x) \in C_0^\infty(K_3)$ を $\zeta(x)\equiv 1$ on $K_2$ となるようにとろう。$I_1 = [t_0-\varepsilon_1, t_0+\varepsilon_1]$ とおく。以下添字 $i$ を省略する。$\{\Gamma_j\}$ に属する 0次斉次の単位の分解を $\{\eta_j(\xi)\}$ とする。

$$(5\text{-}1')\left\{\begin{array}{ll} L(t,x,D_t,D_x)\,U^j(t,s,x,y,D_y)\equiv 0 & \mathrm{mod}\ S^{-\infty}, \\ U^j(s,s,x,y,D_y) = \zeta(x)\,\eta_j(D_x)\,E_i & . \end{array}\right.$$

の解を重ねあわせて (5-1) の解を得る。以下 $j$ も略す。

Lemma 3 の $B(t,x,D_x)$ を用いて、$U = BV$ とおくと、

$0 \equiv L(BV) \equiv BCV \quad \mathrm{mod}\ S^{-\infty}$ であるから、

$$(5\text{-}2)\qquad C(t,x,D_t,D_x)\,V(t,s,x,y,D_y)\equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\ S^{-\infty}$$

を解けばよい。すなわち、$V=(V_1,\cdots,V_N)$，$V^j=(V_{2j-1},V_{2j})$ $(1\le j\le r)$,

$V^j = V_{j+r}$ $(r+1\le j\le s)$ とすると、

$$(5\text{-}2')\qquad C^j(t,x,D_t,D_x)\,V^j(t,s,x,y,D_y)\equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\ S^{-\infty}$$

を解けばよい。以下 $1\le j\le r$ の場合を考察する。$r+1\le j\le s$ の場合は容易であるから略す。

<u>2° $(I\times K_4)\cap\overline{\Omega_i}\times\Gamma$ における $V^j$ の決定.</u> しばらく $j$ を省略しよう。

まず、$\omega\cap\overline{\Omega_1}\times\Gamma$ で考える。Cor 1 の $J^1$ を $(\omega\times R^n\setminus\{0\})\setminus(\omega\cap\overline{\Omega_1})\times\Gamma$ において 0 次に適当に拡張する。$(\omega\cap\overline{\Omega_1})\times\Gamma$ において、

$$(5\text{-}3)\qquad V(t,s,x,y,D_y)\equiv J^1(t,x,D_x)\,W(t,s,x,y,D_y) \qquad \mathrm{mod}\ S^{-\infty},$$

として求める。次の (5-4) を解けばよい。

$$(5\text{-}4)\qquad D(t,x,D_t,D_x)\,W(t,s,x,y,D_y)\equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\ S^{-\infty}$$

$$(5\text{-}5)\left\{\begin{array}{l} W \text{ の symbol を } W(t,s,x,y,\xi) = w(t,s,x,\xi)\,e^{i\phi(t,s,x,\xi)-iy\cdot\xi}, \\ w(t,s,x,\xi)\sim\sum_{k=-1}^{\infty} w_{-k}(t,s,x,\xi) \quad , \ w_{-k} \text{ は } \xi \text{ に関して } -k \text{ 次斉次.} \end{array}\right.$$

としよう。ここに $\phi$ は

$$(5\text{-}6)\qquad \partial_t\phi-\lambda(t,x,\nabla_x\phi)=0 \ \ \text{in } I\times K_4,\quad \phi(s,s,x,\xi)=x\cdot\xi$$

の解である。$\phi$ の存在する範囲を $[s-\varepsilon_2, s+\varepsilon_2]$ とする。このとき $\varepsilon_2$ は $I_1\times K_4$ において $s$ によらずにとれる。$\min\{\varepsilon_1, \frac{\varepsilon_2}{2}\}=\varepsilon$ として $I=[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$ としよう。 $\nabla_x=\nabla$ とかく。

(5-7) $h(t,x,\xi)\equiv h(t,s,y,x,\xi)=\phi(t,s,y,\xi)-\phi(t,s,x,\xi)-(y-x)\cdot\nabla\phi(t,s,x,\xi)$.

Hörmander [2] により

(5-8) $$e^{-i\phi(t,x,\xi)}DW\sim\sum_{j,k\geq -1}D_{-j}(t,x,\partial_t\phi,\nabla\phi)W_{-k}(t,x,\xi)+\sum_{k\geq -1}D_tW_{-k}(t,x,\xi)$$
$$+\sum_{j,k,|\alpha|\geq -1}\frac{1}{\alpha!}D_{-j}^{(\alpha)}(t,x,\nabla\phi)\left(W_{-k}(t,y,\xi)e^{ih(t,y,x,\xi)}\right)_{(\alpha)}\Big|_{y=x}$$
$$\sim D_1(t,x,\partial_t\phi,\nabla\phi)W_1(t,x,\xi)+\Big\{D_tW_1+\sum_{j=1}^{n}D_1^{(j)}(t,x,\nabla\phi)D_{x_j}W_1(t,x,\xi)$$
$$+D_0(t,x,\nabla\phi)W_1(t,x,\xi)+D_1(t,x,\partial_t\phi,\nabla\phi)W_0(t,x,\xi)\Big\}$$
$$+\Big\{D_tW_0+\sum_{j=1}^{n}D_1^{(j)}(t,x,\nabla\phi)D_{x_j}W_0(t,x,\xi)+D_1(t,x,\partial_t\phi,\nabla\phi)W_{-1}(t,x,\xi)$$
$$+D_0(t,x,\nabla\phi)W_0(t,x,\xi)+D_{-1}(t,x,\nabla\phi)W_1(t,x,\xi)+\sum_{j=1}^{n}D_0^{(j)}(t,x,\nabla\phi)D_{x_j}W_1(t,x,\xi)$$
$$+\sum_{|\alpha|=2}\frac{i}{\alpha!}D_1^{(\alpha)}(t,x,\nabla\phi)\phi_{(\alpha)}(t,x,\xi)W_1(t,x,\xi)\Big\}+\cdots\cdots$$

ここに $D_1(t,x,\partial_t\phi,\nabla\phi)=\begin{pmatrix}0 & -e(t,x,\nabla\phi)\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, (5-6) による)。

これらは $(\omega\cap\bar{\Omega}_1)\times\Gamma$ において成り立つが以下 $\omega\times\Gamma$ で成り立つと見なして $W_{-k}(t,x,\xi)$ $(k\geq -1)$ を求める。$V(t,s,x,y,\xi)=V(t,x,\xi)$ とかく。

一方初期値は $B(s,x,D_x)V(s,x,\xi)\sim\zeta(x)\eta(\xi)e^{i(x-y)\cdot\xi}E_i$

$V(s,x,\xi)\sim\sum_{k=-1}^{\infty}V_{-k}(s,x,\xi)e^{i(x-y)\cdot\xi}$ とおくと、

(5-9) $$\begin{cases}V_1(s,x,\xi)=0, & V_0(s,x,\xi)=\zeta(x)\eta(\xi)B_0^{-1}E_i\\ V_{-k}(s,x,\xi)=B_0^{-1}G(x,\xi,V_{-l}\ ;\ 0\leq l\leq k-1)\end{cases}$$

と一意的に定る。更に $W^j(s,x,\xi)=\sum_{k=-1}^{\infty}W_{-k}^j(s,x,\xi)e^{ix\cdot\xi}$ であっ

だから．$\sum_{k=-1}^{\infty} v_{-k}^{j}(s,x,\xi) \sim \sum_{\substack{i\geq 0\\ \ell\geq -1\\ |\alpha|\geq 0}} \frac{1}{\alpha!} J_{-i}^{1,j\,(\alpha)}(s,x,\xi)\, w_{-\ell\,(\alpha)}^{j}(s,x,\xi)$ ．

$j$ を略して．

$$(5\text{-}10)\quad \begin{aligned} &w_1(s,x,\xi)=0\ ,\ w_0(s,x,\xi)=\zeta(x)\eta(\xi)\,J_0^{-1}B_0^{-1}E_i \text{ の } (2j-1,2j) \text{ 部分},\\ &w_{-k}(s,x,\xi)=\tilde{G}(x,\xi,w_{-\ell};\ 0\leq \ell\leq k-1)\ .\end{aligned}$$

したがって $w_{-k}(s,x,\xi)$ も inductive に定る。

1) $e\equiv 0$ on $\omega\cap\overline{\Omega_1}$ のとき．(5-8) $=0$ とおいて．

$$(5\text{-}11)\quad \begin{aligned} &D_t w_{-k} - \lambda^{(j)} D_{x_j} w_{-k} + D_0 w_{-k} - i\sum_{|\alpha|=2}\frac{1}{\alpha!}\lambda^{(\alpha)}\phi_{(\alpha)}\, w_{-k}\\ &= F_k\bigl(t,x,\phi_{(\alpha)}\ (|\alpha|\leq k+2),\ w_{-\ell}\ (-1\leq \ell\leq k-1)\bigr)\end{aligned}$$

である。(5-11) は主要部が対角ゆえ．$w_{-\ell}$ $(-1\leq\ell\leq k-1)$ を既知とすると解ける。なお (5-10) により．$w_1\equiv 0$。(5-11) の伝播速度を考慮すると．$\mathrm{supp}\, w_{-k}\subset I\times K_4\times\Gamma$ も明か。

2) $e\not\equiv 0$ in $\omega\cap\Omega_1$ のとき．(5-8) において．$D_1(t,x,\partial_t\phi,\nabla\phi)=\begin{pmatrix}0 & -e(t,x,\nabla\phi)\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$D_0(t,x,\nabla\phi)=\begin{pmatrix}d_1 & d_2\\ 0 & d_4\end{pmatrix}\Big|_{\xi=\nabla\phi}$ , $D_{-1}(t,x,\nabla\phi)=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\Big|_{\xi=\nabla\phi}$ であるから（Cor 1 参照）$w_{-k}={}^t(w_{-k}^1, w_{-k}^2)$ とおくと．

$$(5\text{-}12)_1\quad \begin{aligned} &D_t w_{-k+1}^1 - \sum_{j=1}^{n}\lambda^{(j)} D_{x_j} w_{-k+1}^1 + d_1 w_{-k+1}^1 - i\sum_{|\alpha|=2}\lambda^{(\alpha)}\phi_{(\alpha)}/\alpha!\ w_{-k+1}^1 - e w_{-k}^2\\ &= F_{k-1}^1\bigl(t,x,\phi_{(\alpha)}\ (|\alpha|\leq k+2),\ w_{-\ell}^i\ \bigl({}^{i=1,2}_{-1\leq\ell\leq k-2}\bigr),\ w_{-k+1}^2\bigr).\end{aligned}$$

$$(5\text{-}12)_2\quad \begin{aligned} &D_t w_{-k}^2 - \sum_{j=1}^{n}\lambda^{(j)} D_{x_j} w_{-k}^2 + d_4 w_{-k}^2 - i\sum_{|\alpha|=2}\frac{1}{\alpha!}\lambda^{(\alpha)}\phi_{(\alpha)}\, w_{-k}^2 + \gamma w_{-k+1}^1\\ &= F_k^2\bigl(t,x,\phi_{(\alpha)}\ (|\alpha|\leq k+3),\ w_{-\ell}^i\ \bigl({}^{i=1,2}_{-1\leq\ell\leq k-2}\bigr),\ w_{-k+1}^2\bigr).\end{aligned}$$

すなわち $w_{\langle k\rangle}={}^t(w_{-k+1}^1, w_{-k}^2)$ , $F_{\langle k\rangle}={}^t(F_{k-1}^1, F_k^2)$ とおくと．

$$(5\text{-}12)\quad \begin{aligned} &D_t w_{\langle k\rangle} - \sum_{j=1}^{n}\lambda^{(j)} D_{x_j} w_{\langle k\rangle} + \begin{pmatrix} d_1 - i\sum_{|\alpha|=2}(1/\alpha!)\lambda^{(\alpha)}\phi_{(\alpha)} & -e\\ \gamma & d_4 - i\sum_{|\alpha|=2}(1/\alpha!)\lambda^{(\alpha)}\phi_{(\alpha)}\end{pmatrix} w_{\langle k\rangle}\\ &= F_{\langle k\rangle}\ ,\end{aligned}$$

ここに $w_1^2\equiv 0$ となるから．あとは (5-12) が主要部対角である

ことから inductive に決まる。supp $w_{-k}^{i} \subset I\times K_\varepsilon \times \Gamma$ も明か。$\left(\begin{smallmatrix} i=1,2 \\ k\geq -1 \end{smallmatrix}\right)$

1), 2) いずれにしても $w_{-k}(t,x,\xi)$ $(k\geq -1)$ が決定された。

この解は (5-11), (5-12) の伝播速度 $\bar{\lambda}_{max}$ を考慮すると、図3の斜線の領域 $M_1$ で、境界までこめて (5-8)〜0, (5-10) をみたす。

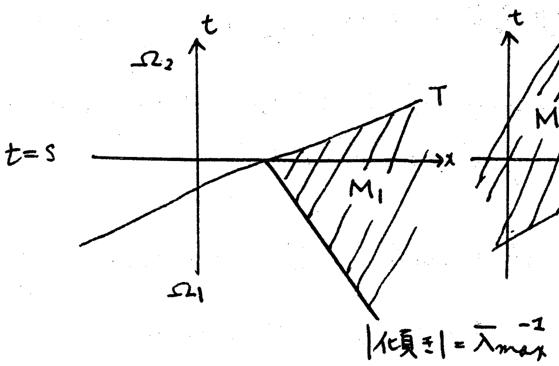



図3

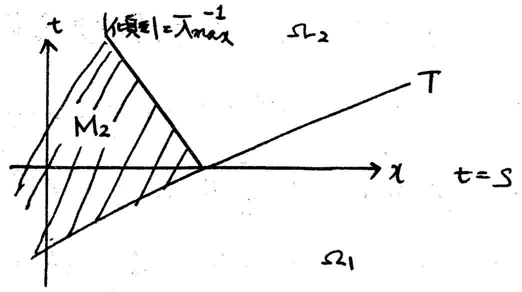



図4

$\overline{M_1}$ において、$v^j(t,x,\xi) \sim \sum \frac{1}{\alpha!} J^{(\alpha)}_{-k}(t,x,\xi)\left(w^j_{-\ell}(t,y,\xi)\,e^{ik_j(t,y,x,\xi)}\right)_{(\alpha)}\Big|_{y=x} e^{i\phi_j}$

とおく。これは $\overline{M_1}$ において (5-2') をみたす。

同様のことを $\overline{\Omega_2}$ においても行うと、図4、$\overline{M_2}$ においても、$v^j$ が決定される。しかもその2つは $T\cap\{t=s\}$ 上で $C^\infty$ で接続されている。(もちろん漸近展開が)。それは2つの $v^j$ が共に $T\cap\{t=s\}=\overline{M_1}\cap\overline{M_2}$ で (5-2') を漸近的に満たしていることによる。したがって T 上での $v^j$ の漸近展開が得られたから、それを初期値として $\overline{\Omega_1}\cap\omega\times\Gamma$ と $\overline{\Omega_2}\cap\omega\times\Gamma$ で再び (5-2') を解き直せば、少くとも $I\times K_\varepsilon\times\Gamma$ においては、$V(t,s,x,y,\xi)$ が得られる。(一般に、$V(t,x,\xi)$ は $\xi$ の2次の項から始る。それは T を初期面として解を直すときに $v^j_2(t,x,\xi)$

が必要となる。） $I_j = {}^t(0,\cdots,0,\overset{\overset{r+j}{\vee}}{1},0,\cdots,0)$ $(r+1\leq j\leq s)$,

$I_j = {}^t\begin{pmatrix} 0,0,\cdots,0,\overset{2j-1,\,2j}{1},0,\cdots,0 \\ 0,\cdots\cdots 0,0\ \ 1,0,\cdots 0\end{pmatrix}_{(1\leq j\leq s)}$, $\hat{v}^j = I_j v^j(t,x,\xi)$ とおく。

(5-13) $\quad u^j(t,x,\xi) \sim \sum_{\substack{k\geq 0\\ \ell\geq -2}} B_{-k}{}^{(\kappa)}(t,x,\xi)\left(\tilde{v}^j_{-\ell}(t,y,\xi)\, e^{i h_j(t,y,x,\xi)}\right)_{(\kappa)}\Big|_{y=x}$

とおく。(5-13) の右辺を漸近展開にもつように $u^j(t,x,\xi)$ を決める。このとき $u^j(t,x,\xi)$ の support は $I\times K_4\times\Gamma$ にあるとしてよい。

(5-14) $\quad U_i(t,s,x,y,\xi) = \sum_{j=1}^{s} u^j(t,s,x,\xi)\, e^{i\phi_j(t,s,x,\xi) - i y\cdot\xi}$

を symbol にもつ Fourier integral operator を $U_i(t,s,x,y,D_y)$ とすれば、(5-1) の解が得られた。$U = (U_1,\cdots,U_N)$ とおこう。

3°) Fundamental matrix の構成. H. Kumanogo [8] による。

(5-15) $\mathcal{L}(t,x,D_t,D_x)U_i(t,s,x,y,D_y) = R(t,s,x,y,D_y) \equiv R(t,s) \in S^{-\infty}$

である。. $R_1(t,s) = -iR(t,s)$ とおく。

$$R_k(t,s) = \int_s^t R_1(t,\tau,x,x',D_{x'})\, R_{k-1}(\tau,s,x',y,D_y)\, d\tau\ ,$$

(5-16) $\quad \hat{R}(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} R_k(t,s)\ ,$

とおくと. $\hat{R}$ (5-16) の右辺は収束し、したがって.

(5-17) $\quad \tilde{R}(t,s) = -iR(t,s) - i\int_s^t R(t,\tau,x,x',D_{x'})\,\hat{R}(\tau,s,x',y,D_y)\,d\tau$

をみたす。よって.

(5-18) $\quad U^\infty = \int_s^t U(t,\tau,x,x',D_{x'})\,\hat{R}(\tau,s,x',y,D_y)\,d\tau\ ,\quad \hat{U} = U + U^\infty,$

とおこう。明かに $\hat{U}(s,s,x,y,D_y) = \zeta(x)\, I$ であり.

(5-19) $\mathcal{L}(t,x,D_t,D_x)\hat{U}(t,s,x,y,D_y) = i(1-\zeta(x))\,\tilde{R}(t,s,x,y,D_y)$

$(\equiv 0 \quad on\ \ I\times K_2)$ である。

$u_0(x) \in \mathcal{D}(K_0)$, $f(t,x) \in \mathcal{E}_t(I, \mathcal{D}(K_0))$ に対して，

$$(5\text{-}20) \quad \tilde{u}(t,x) = \tilde{U}(t,t_0,x,y,D_y)u_0(y) + i\int_{t_0}^{t} \tilde{U}(t,s,x,y,D_y)f(s,y)\,ds$$

とおく。命題3 と (5-19) 及び $K_0, K_1, K_2$ のとり方から，

$\gamma(x) \in C_0^\infty(\{x \mid dist(x,K_1) \leq \varepsilon\})$，$\gamma(x) \equiv 1$ on $K_1$ ととると，

$u(t,x) = \gamma(x)\tilde{u}(t,x)$ は (1)，(2) の $I \times \mathbb{R}^n$ の解である。これで定理1の十分性が証明された。　　　Q.E.D.

## §6. 定理2について.

有限伝播速度 $\bar{\lambda}_{max} = \max_{\substack{(t,x,\xi) \in \Omega_0 \times S^{n-1} \\ 1 \leq j \leq s}} |\lambda_j(t,x,\xi)|$

が保証されているから，data を compact set 上に局所化して考察すれば十分である。$I = [T_1+\varepsilon, T_2-\varepsilon]$ とし，定理1の証明で

$K_j = \{x;\ dist(x,K_{j-1}) \leq 3\bar{\lambda}_{max}(T_2-T_1)\}$ ととれば，

議論が $I \times K_4$ の内部で行える。data を更に細分して定理1を適用すれば，任意の初期面から少しとける。この解ける幅が $\mathcal{D}(K_0)$ の $u_0(x)$，$\mathcal{E}_t(I, \mathcal{D}(K_0))$ の $f(t,x)$ に対しては $I \times K_4$ で，一様であるから，有限回のくり返しで $I \times K_4$ での解が得られる。(H. Kumano-go [8])，$\varepsilon$ は任意だから，$(T_1,T_2) \times K_4$ で解ける。

## §7. 定理1′，2′について.

$\lambda^j(t,x)I - A^j(t,x) = \begin{pmatrix} -a_j(t,x) & b_j(t,x) \\ c_j(t,x) & d_j(t,x) \end{pmatrix}$

とおくと，仮定1′により，

$$(7\text{-}1)\quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j(t,x)\xi_j \equiv \sum_{j=1}^{n} d_j(t,x)\xi_j \\ \left(\sum_{j=1}^{n} a_j(t,x)\xi_j\right)^2 + \left(\sum b_j(t,x)\xi_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} c_j(t,x)\xi_j\right) \equiv 0 \end{cases}$$

$\mathbb{R}[\xi]$ は素元分解環だから．$\exists j_0$，$b_{j_0}(t,x) \neq 0$ の点では．

$$(7\text{-}2)\quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j(t,x)\xi_j = a(t,x)\sum_{j=1}^{n} b_j(t,x)\xi_j, \\ \sum_{j=1}^{n} c_j(t,x)\xi_j = c(t,x)\sum_{j=1}^{n} c_j(t,x)\xi_j, \end{cases}$$

更に (7-1) により $c = -a^2$ だから．

$$(7\text{-}3)_1\quad L_p = ID_t - \sum_{j=1}^{n} A^j(t,x)D_{x_j} = I\left(D_t - \sum_{j=1}^{n}\lambda^j(t,x)D_{x_j}\right) + \begin{pmatrix} -a & 1 \\ -a^2 & a \end{pmatrix}\left(\sum_{j=1}^{n} b_j(t,x)D_{x_j}\right)$$

となる。なお $a(t,x) = \dfrac{a_{j_0}(t,x)}{b_{j_0}(t,x)}$ ゆえ，$a(t,x)$ は近傍で $C^\infty$ である。

一方 $c_{j_0}(t,x) \neq 0$ の点の近傍でも $C^\infty$ の $\hat{a}(t,x)$ があって

$$(7\text{-}3)_2\quad L_p = ID_t - \sum_{j=1}^{n} A^j(t,x)D_{x_j} = I\left(D_t - \sum_{j=1}^{n}\lambda^j(t,x)D_{x_j}\right) + \begin{pmatrix} \hat{a} & -\hat{a}^2 \\ 1 & -\hat{a} \end{pmatrix}\left(\sum_{j=1}^{n} c_j D_{x_j}\right)$$

とかける。

よって $g = a$，$h = \hat{a}$ に対する (3-9′)，(3-10′) が成り立ち．命題 2 を得る。但し．このときは $g$，$h$ が $\xi$ に無関係であるから．(3-9″)，(3-10″) は $\lambda(t,x,\xi)$ の特性曲線を定義する方程式と全く同じになる。

Q.E.D.

## 文献表


1. Y. Demay ; Le problème de Cauchy pour les système hyperboliques à caracteristiques doubles. C.R. Acad. Sc. Paris t278 no.11 ('74)

2. L. Hörmander ; Pseudo-differential operators. Comm. P. A. Math vol 18 ('65).

3. ———— ; The spectral function of an elliptic operator. Acta Math. vol 121 ('68).

4. ———— ; Fourier integral operators I. Acta Math. vol 127 ('71).

5. K. Kajitani ; Cauchy problem for non-strictly hyperbolic systems. (to appear)

6. K. Kasahara and M. Yamaguchi ; Strongly hyperbolic systems of linear partial differential equations with constant coefficients. Mem. Coll. Sci. U. Kyoto, Series A vol 33 Math. no.1 ('60).

7. H. O. Kreiss ; Über sachgemässe Cauchyprobleme. Math. Scand. vol 13 ('63).

8. H. Kumano-go ; A calculus of Fourier integral operators on $R^n$ and the fundamental solution for an operators of hyperbolic type. Comm. P.D.E. vol 1 (1) ('76).

9. P. D. Lax ; Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems. Duke Math. J. vol 24 ('57).

10. W. Matsumoto ; Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations with multiple characteristic roots. J. Math. Kyoto U. vol 15 ('75).

11. S. Mizohata ; Some remarks on the Cauchy problem. J. Math. Kyoto U. vol 1 ('61-'62).

12. V. M. Pethkov ; On the Cauchy problem for first-order hyperbolic systems with multiple characteristics. Dokl. Acad. Nauk SSSR t.209 ('73), (Russian), Soviet Math. Dokl. vol 14 ('73).

13. H. Yamahara ; On the Cauchy problems for weakly hyperbolic systems. R.I.M.S. Kyoto U. vol 12, no.2 ('76).