数理解析研究所講究録
第 337 巻 1978 年 126-147

Gevrey 及び analytic class に於ける Lax-Mizohata の定理

京大 理学部 西谷 達雄

1. 序 $L(x,t;D_x,D_t)=P(x,t;D_x,D_t)Q(x,t;D_x,D_t)$ を Gevrey 或いは analytic な係数を持つ m 階の微分作用素とする。u は原点の近傍で $Lu=0$ を満しているとする。若し P が ν 階の楕円型作用素ならば.($\nu+\mu=m$), 準楕円性から, Qu が Gevrey 或いは analytic な class の函数となることが分かる。更に, $t=0$ なる平面が Q に対して, 非特性的ならば, $D_t^j u(x,0)$ $(0\leq j\leq \mu-1)$ が Gevrey 或いは analytic な class に属する時, $D_t^j u(x,0)$ $(\mu\leq j\leq m-1)$ も同じ class に属する。従って, このことから, L に対する初期値問題を考える時, 最初の $\mu+1$ 個の初期値を C^∞ の class で任意に与えることは不可能であることが分かる。ここでは, L. Hörmander [1] で導入された, analytic な symbol を有す局所化された擬微分作用素, 及び, L. Boutet de Monvel and P. Krée [2] で示された Gevrey 或いは analytic な symbol を有す擬微分作用素の基本

的な性質を利用して，上に示した簡単な例を，一般な微分作用素に拡張する。又，この許容される初期値と，特性方程式の実根の個数とが満たすべきある種の関係を利用して，Lax-Mizohataの定理を Gevrey 及び analytic class に拡張する。

2. 結果及び定義

定義 2.1　V を $\mathbb{R}^m$ の開集合とする。任意の compact 集合 $K \subset V$ に対して正定数 C, A があって，不等式

(2.1)　$|D^\alpha f(x)| \leqslant C A^{|\alpha|} |\alpha|!^s$　,　$x \in K$

が総ての多重指標 α に対して成立する様な $f \in C^\infty(V)$ の全体を $\gamma^{(s)}(V)$ で表わす。$(s \geqslant 1)$

定義 2.2 ([1])　$x_0 \in V \subset \mathbb{R}^m$, $\xi_0 \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, $u \in \mathcal{D}'(V)$ とする。(x_0, ξ_0) が wave front set $WF_s(u)$ に属さない，とは，次のことが成立することである。即ち，x_0 の開近傍 U, ξ_0 の開錐近傍 Γ, U 上では u に一致する compact な台を有す distribution の有界列 $\{u_N\}$ 及び正定数 C があって，次の不等式が総ての $\xi \in \Gamma$ に対して成立する。

(2.2)　$|\hat{u}_N(\xi)| \leqslant C (C N^s)^N |\xi|^{-N}$

$P(x,t;D_x,D_t) = D_t^m + \sum_{j=1}^{m} a_j(x,t;D_x) D_t^{m-j}$ を係数を $\gamma^{(s)}(W)$ に有す微分作用素とする。ここで，W は $\mathbb{R}^{n+1}$ の原点の開近傍で

あり，$a_j(x,t;D_x)$ の階数は j 以下である。以下，次の記号を使う。$D_t=i^{-1}\partial/\partial t$，$D_x=(i^{-1}\partial/\partial x_1,\cdots,i^{-1}\partial/\partial x_n)$，$x=(x_1,\cdots,x_n)$ $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$。次に $p(x,t;\xi,\lambda)$ を斉次部分に分けて次の様に書く。

$$p(x,t;\xi,\lambda)=\lambda^m+\sum_{j=1}^{m}a_j(x,t;\xi)\lambda^{m-j}=p_0(x,t;\xi,\lambda)+p_1(x,t;\xi,\lambda)+\cdots$$
$$\cdots+p_m(x,t;\xi,\lambda)$$

ここで，$p_j(x,t;\xi,\lambda)$ は (ξ,λ) に関して $m-j$ 次斉次である。

<u>定理 2.1.</u> 特性方程式 $p_0(0,0;\hat{\xi},\lambda)=0$ $(|\hat{\xi}|\neq 0)$ が μ 個の実根と ν 個の非実根 (resp. $\mathrm{Im}\,\lambda\geqq 0$ なる μ 個の根と，$\mathrm{Im}\,\lambda<0$ なる ν 個の根）$(\mu+\nu=m,\ \nu\geqq 1)$ を持つとする。u を $\mathbb{R}^{n+1}$ の原点の近傍 (resp. $\mathbb{R}^{n+1}\cap(t\geqq 0)$ の原点の近傍）で定義された，方程式 $p(x,t;D_x,D_t)u=0$ の C^∞ な解で，$D_t^j u(x,0)=0$ $0\leqq j\leqq \mu-1$ を満たすものとすると，$(0,\hat{\xi})$ は $WF_s(D_t^j u(x,0))$ $(\mu\leqq j\leqq m-1)$ に属さない。

次の問題を考える。

$$(\mathrm{P})_k\ \begin{cases} p(x,t;D_x,D_t)u=0 \\ D_t^j u(x,0)=u_j(x) \quad 0\leqq j\leqq k-1\ \ (k\leqq m)\end{cases}$$

この時，定理 2.1 から次の系を得る。

<u>系 2.1</u> 問題 $(\mathrm{P})_k$ が，任意の $(u_0(x),\cdots,u_{k-1}(x))\in\prod^k\gamma^{(t)}(\mathbb{R}^n)$ $(s<t)$ に対して，原点の近傍で C^∞ な解を有すならば，特性方程式 $p_0(0,0;\xi,\lambda)=0$ は任意の $\xi\neq 0\in\mathbb{R}^n$ に対して，

少くとも k 個の実解を有す。

<u>系 2.2</u>　$s=1$ とし，$P_0(0,0;\xi,\lambda)=0$ は任意の $\xi\neq 0\in\mathbb{R}^n$ に対して，少くとも k 個の $\mathrm{Im}\,\lambda<0$ なる根を有すと仮定する。u を問題 $(\mathrm{P})_{m-k}$ の $\mathbb{R}^{n+1}\cap(t\geqq 0)$ の原点の近傍で定義された C^∞ な解で，u_j $(0\leqq j\leqq m-k-1)$ は解析的であるとする。この時，$D_t^j u(x,0)$ $(0\leqq j\leqq m-1)$ は原点で解析的であり，而もその収束半径は，方程式 $p(x,t;D_x,D_t)$，u_j $(0\leqq j\leqq m-k-1)$ 及び解 u の定義域のみから決まる。

<u>注意</u>　系 2.1 の $s=1, k=m$ の時には，更に詳しい結果が得られている（[4]）。

<u>定義 2.3</u>　原点の或る近傍 D が存在して，次の問題

$$(2.1)\quad \begin{cases} p(x,t;D_x,D_t)\,u=0 & \text{in } D \\ D_t^j u(x,0)=u_j(x) \quad 0\leqq j\leqq m-1 & \text{in } D\cap(t=0) \end{cases}$$

が，任意の初期値 $(u_0(x),\cdots,u_{m-1}(x))\in\prod^m\gamma^{(s)}(\mathbb{R}^n)$ に対して，解 $u\in C^\infty(D)$ を有す時，初期値問題 $(\mathrm{P})_m$ は $\gamma^{(s)}$-well posed であるという。（$s\geqq 1$）

<u>定理 2.2</u>　初期値問題 $(\mathrm{P})_m$ が原点の近傍で $\gamma^{(s)}$-well posed となる為には，特性方程式 $P_0(0,0;\xi,\lambda)=0$ が任意の $\xi\neq 0\in\mathbb{R}^n$ に対して，実解だけしか有さないことが必要である。

<u>系 2.3 (c.f. [5])</u>　$s=1$ とし，特性方程式 $P_0(0,0;1,0,\cdots,0,\lambda)=0$ が少くとも1つ非実根を有すとする。この時 $\mathbb{R}^{n+1}$ の原点の如何なる近傍 W に対しても，$\mathbb{R}^n$ 上の x_1 のみに依存する実解析的な初期値が存在し，この初期値に対応する解は，$(P)_m$ の解として W 全体に解析接続することは出来ない。

3. 補題

W を $\mathbb{R}^{n+1}$ の開集合，Γ を $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ の開錐集合とし，又 $y=(x,t)$，$\zeta=(\xi,\lambda)$，$|\zeta|^2=|\xi|^2+|\lambda|^2$ と書くことにする。

<u>定義 3.1 ([2])</u>　形式的な和 $p=\sum_{k=0}^{\infty}p_k(y,\zeta)$ に於いて，各 $p_k(y,\zeta)$ が $W\times\Gamma$ 上の滑らかな函数で，ζ に関して，r_1+r_2-k 次斉次で，更に定数 C,A が存在して，不等式

(3.1)　$$\left|p_{k\,(\beta)}^{(\alpha)}(y,\zeta)\right|\leq CA^{k+|\alpha+\beta|}|\zeta|^{r_2}|\xi|^{r_1-k-|\alpha|}(k+|\beta|)!^s\alpha!$$

が総ての多重指標 α,β，任意の自然数 k 及び任意の $(y,\zeta)\in W\times\Gamma$ に対して成立するとき，$p=\sum_{k=0}^{\infty}p_k(y,\zeta)$ を $W\times\Gamma$ 上の class s order (r_1,r_2) の symbol と呼ぶ。

ここで，次の記号を使った。

$$p_{k\,(\beta)}^{(\alpha)}(y,\zeta)=\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\beta}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)^{\alpha}p_k(y,\zeta)$$

$p=\sum_{k=0}^{\infty}p_k(y,\zeta)$ を $W\times\Gamma$ 上の class s order (r_1,r_2) の symbol とするとき，[2] に従って，

(3.2)　$$N(p,T)=\sum_{k,\alpha,\beta}\frac{2(2n)^{-k}k!}{(k+|\alpha|)!(k+|\beta|)!^s}\left\|p_{k\,(\beta)}^{(\alpha)}\right\|T^{2k+|\alpha+\beta|}$$

とおく。ここで，

$$\| p_k{}^{(\alpha)}{}_{(\beta)} \| = \sup_{W\times\Gamma} \left\{ |\eta|^{-r_2} |\xi|^{-r_1+k+|\alpha|} \left| p_k{}^{(\alpha)}{}_{(\beta)}(y,\eta) \right| \right\}$$

である。この形式的normを導入すると，定義3.1と中級数(3.2)が十分小さな $T>0$ に対して収束することとは同値となる。次に $r=p\circ q$ を次の式で定義する。

(3.3) $\quad r=\sum_{k=0}^{\infty} r_k(y,\eta)\ ,\ r_k(y,\eta)=\sum_{m+l+|\gamma|=k} \frac{1}{\gamma!} p_m^{(\gamma)} q_{l(\gamma)}$

この時，[2]の補題1.2の証明から，次の補題を得る。

<u>補題3.1</u> p, q を $W\times\Gamma$ 上の class S order (r,m) の symbol とすると，$p+q$ も $W\times\Gamma$ 上の class S order (r,m) の symbol となって，

(3.4) $\quad N(p+q,T) \ll N(p,T)+N(q,T)$

が成立する。又，p, q を $W\times\Gamma$ 上の class が S で order が各々，$(r_1,m_1), (r_2,m_2)$ の symbol とするとき，$p\circ q$ は $W\times\Gamma$ 上の class S order (r_1+r_2, m_1+m_2) の symbol で

(3.5) $\quad N(p\circ q,T) \ll N(p,T)\,N(q,T)$

が成立する。

<u>注意</u> $s=pq$ $\ s=\sum_{k=0}^{\infty} s_k(y,\eta)$, $s_k(y,\eta)=\sum_{m+l=k} p_m q_l$ とおくと，補題3.1の証明から，

(3.6) $\quad N(p\circ q-pq,T) \ll 2N'(p,T)\,N'(q,T)$

の成立することが分かる。ここで，

$$N'(p,T)=\sum_{k,\,|\alpha+\beta|\geq 1}\frac{2(2n)^{-k}k!}{(k+|\alpha|)!(k+|\beta|)!^{s}}\left\|p_{k\,(\beta)}^{(\alpha)}\right\|T^{2k+|\alpha+\beta|}$$

である。更に，自明な不等式 $N'(p,T)\ll N(p,T)$ を利用すると，次の式が成立する。

(3.7) $N(pq,T)\ll 2N(p,T)N(q,T)$

補題 3.2　$p_0(0,0;\hat{\xi},\lambda)=0$ $(|\hat{\xi}|\neq 0)$ が μ 個の実根及び ν 個の非実根を有すとする（$\mu+\nu=m$）。この時 $\mathbb{R}^{n+1}$ の原点の近傍 W，$\hat{\xi}$ の $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ に於ける錐近傍 Γ 及び class が s で order が各々 $(j,0)$，$(i,0)$ である λ を含まない $W\times(\Gamma\times\mathbb{R})$ 上の symbol a^j $(1\leq j\leq\mu)$，b^i $(1\leq i\leq\nu)$ が存在して，次の等式を満たす。

(3.8) $p(x,t;\xi,\lambda)=\left(\lambda^{\mu}+\sum_{j=1}^{\mu}a^j(x,t;\xi)\lambda^{\mu-j}\right)\circ\left(\lambda^{\nu}+\sum_{i=1}^{\nu}b^i(x,t;\xi)\lambda^{\nu-i}\right)$

（等号及び $\circ$ は共に $W\times(\Gamma\times\mathbb{R})$ 上の symbol としての意味である）。ここで，$\lambda^{\mu}+\sum_{j=1}^{\mu}a_0^j(0,0;\hat{\xi})\lambda^{\mu-j}=0$，$\lambda^{\nu}+\sum_{i=1}^{\nu}b_0^i(0,0;\hat{\xi})\lambda^{\nu-i}=0$ は各々，実根及び非実根のみを有す。

補題 3.3　補題 3.1 と同じ仮定をおく。この時 $\mathbb{R}^{n+1}$ の原点の近傍 W，$\hat{\xi}$ の $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ に於ける錐近傍 Γ 及び $p\circ q=$ $=(\lambda^{\mu}+\sum_{j=1}^{\mu}a^j(y,\xi)\lambda^{\mu-j})$ を満たす，$W\times(\Gamma\times\mathbb{R})$ 上の class s order $(0,-\nu)$ なる symbol q が存在する。更に，$k+|\alpha|\geq 1$ のとき，任意の $(y,\zeta)\in W\times(\Gamma\times\mathbb{R})$ に対して，この q は次の不等式を満たす。

(3.9) $\left|q_{k(\beta)}^{(\alpha)}(y,\tau)\right| \leqslant C A^{k+|\alpha+\beta|}|\tau|^{-\nu-1}|\xi|^{1-k-|\alpha|}(k+|\beta|)!^{s}\,\alpha!$

ここで, C, A は適当な定数である。

4. 定理 2.1 の証明　補題 3.3 を仮定して, 解 u が $\mathbb{R}^{n+1}$ の原点の近傍で定義されているときに, 定理 2.1 を証明する。[1] に従って, symbol $p=\sum_{k=0}^{\infty} p_k(y,\tau)$ に対して, それに対応する微分作用素 $P_\ell(y,\tau;D)$ を次の式で定義する。

(4.1) $P_\ell(y,\tau;D)=\sum_{k+|\alpha|=\ell} \frac{1}{\alpha!} p_k^{(\alpha)}(y,\tau) D^\alpha$

q を他の symbol とし, $p\circ q=r$ とするとき,

(4.2) $R_\ell(y,\tau;D)=\sum_{j=0}^{\ell} P_{\ell-j}(y,\tau;D)\, Q_j(y,\tau;D)$

が成立することは容易に示される。

注意　p が m 次の多項式のときには,

$$e^{-i\langle y,\tau\rangle} p(y,D)\left(e^{i\langle y,\tau\rangle} v\right)=\sum_{j=0}^{m} P_j(y,\tau;D)\, v$$

が成立する。

[1] の補題 2.2 に依ると, $\mathbb{R}^{n+1}$ の任意の compact 集合 $K, \tilde{K}$ $(K \Subset \tilde{K})$ に対して, $\operatorname{supp}[v_N] \subset \tilde{K}$, $v_N \equiv 1$ on K であり, 更に, N に依らない定数 C, A があって, $|\alpha| \leqslant N$ のとき,

(4.3) $\left|D^\alpha v_N(y)\right| \leqslant C A^{|\alpha|} N^{|\alpha|} \quad (N=1,2,\cdots)$

の成立する様な函数列 $v_N(y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ が存在する。

補題 3.3 を p の転置作用素 ${}^t p$ に適用すると, $W\times(\Gamma\times\mathbb{R})$ 上の symbol q を得る。u を定理 2.1 に於ける解とすると

き，上に述べた v_N として，$\mathrm{supp}[v_N]\subset W$，$p(y,D)u=0$ on $\mathrm{supp}[v_N]$，$D_t^j u(x,0)=0$ on $\mathrm{supp}[v_N]\cap(t=0)$ $(0\leq j\leq\mu-1)$ を満たす様にとる。$w_N=\sum_{j=0}^{N-m}Q_j v_N$ とおくと，(4.2) から

$$e^{-i\langle y,\tau\rangle}\,{}^tp(y,D)\left(e^{i\langle y,\tau\rangle}w_N\right)=\sum_{j=0}^{N-m}R_j v_N+\sum_{\substack{N\geq l+k\geq N-m\\ N-m\geq k,\ m\geq l}}P_l Q_k v_N$$

の成立することが分かる。$0=e^{i\langle y,\tau\rangle}(p(y,D)u)w_N$ を積分すると，部分積分から，

$$\int e^{i\langle y,\tau\rangle}\Big(\sum_{j=0}^{N-m}R_j v_N\Big)u\,dy=-\int e^{i\langle y,\tau\rangle}\Big(\sum_{\substack{N\geq l+k\geq N-m\\ N-m\geq k,\ m\geq l}}P_l Q_k v_N\Big)u\,dy \tag{4.4}$$

が成立する。ここで，(4.4) の右辺を評価する。その為に，$h=Q_k v_N$ とおいて，積分 $\int e^{i\langle y,\tau\rangle}(P_l h)u\,dy$ を考える。$P_l h$ の中に λ^k $(k\geq1)$ を含む項があれば，$e^{i\lambda t}\lambda^k$ を $D_t^k(e^{i\lambda t})$ で置き換えて部分積分することにする。p が m 次の，係数が $\mathcal{E}^{(s)}(W)$ に属する多項式であることに注意すると，$|\xi|\geq1$ に対して次の評価を得る。

$$\left|\int e^{i\langle y,\tau\rangle}(P_l h)u\,dy\right|\leq C|\xi|^m\sup_{\tilde{K},\,j\leq m}|D_t^j u|\sup_{\tilde{K},\,j+|\alpha|\leq m}|D_t^j D_x^\alpha h| \tag{4.5}$$

ここで，定数 C は $p(y,D)$ 及び $\tilde{K}$ のみに依存する。一方，補題 3.3 の (3.9) と (4.3) から，$D^\gamma(Q_k v_N)$ は，任意の自然数 N，任意の k $(1\leq k\leq N-m)$，任意の γ $(|\gamma|\leq m)$ 及び任意の $\xi\in\Gamma$ に対して，次の様に評価される。

(4.6) $\quad |D^{\gamma}(Q_k v_N)| \leqq CA^{2N}|\eta|^{-\nu-1}|\xi|^{1-k}N^{sN}$

従って，(4.5) と (4.6) から，$k \geqq 1$ の時次の不等式が成立する。

(4.7) $$\left|\int e^{i\langle y,\eta\rangle}\Big(\sum_{\substack{N \geqq l+k \geqq N-m \\ N-m \geqq k,\ m \geqq l}} P_l Q_k v_N\Big) u\, dy\right| \leqq CA^{2N}|\eta|^{-\nu-1}|\xi|^{2m+1-N}N^{sN}$$

ここで，C は $\sup_{\tilde{K},\, j \leqq m}|D_t^j u|$ に依存するが，A は $P(y,D)$ 及び $\tilde{K}$ のみに依って決まることに注意する。

次に (4.4) の左辺を考える。$r = \lambda^{\mu} + S$ とおくと，S は λ の多項式であって，その次数は $\mu-1$ 以下である。従って，$v_N(x,0)$ の台の上では，$D_t^j u(x,0) = 0 \ (0 \leqq j \leqq \mu-1)$ となることを考慮すると，Fourier の反転公式から，

$$\int d\lambda \int e^{i\langle y,\eta\rangle}\Big(\sum_{j=0}^{N-m} S_j v_N\Big) u\, dy = 0$$

となる。故に，(4.4) の左辺の λ に依る積分は，

(4.8) $$\int d\lambda \int e^{i\langle y,\eta\rangle}\Big(\sum_{j=0}^{N-m} R_j v_N\Big) u\, dy = (-1)^{\mu}\int e^{i\langle x,\xi\rangle} v_N(x,0) D_t^{\mu} u(x,0)\, dx$$

となる。(4.4) を λ で積分して，(4.8) 及び (4.7) の評価を利用すると，任意の $\xi \in \Gamma,\ |\xi| \geqq 1$ に対して，

(4.9) $$\left|\int e^{i\langle x,\xi\rangle} D_t^{\mu} u(x,0) v_N(x,0)\, dx\right| \leqq CA^{2N}|\xi|^{2m+1-N}N^{sN}$$

となる。A は (4.7) の A と同じである。不等式 (4.9) は $(0,\hat{\xi})$ が $WF_s(D_t^{\mu} u(x,0))$ に属さないことを示している。

(4.4) 式に λ を乗じて，$(0,\hat{\xi}) \notin WF_s(D_t^{\mu} u(x,0))$ なる事実を

利用すると，同様の方法で，$(0,\hat{\xi})\notin WF_s(D_t^{\mu+1}u(x,0))$ を示すことが出来る。以下同様の議論を繰り返して定理の結論を得る。

補題 3.2, 3.3 に於いて，実解（resp. 非実解）を $\mathrm{Im}\lambda\leq 0$ $(\mathrm{Im}\lambda>0)$ なる根，と置き換えても同様の結果が成立する。即ち，$\mathbb{R}^{n+1}$ の原点の近傍 W，$-\hat{\xi}$ の $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ に於ける錐近傍 Γ 及び $W\times(\Gamma\times\mathbb{R})$ 上の symbol g, r で $p\circ g=r$ を満たすものが存在する。ここで，$r=\lambda^\mu+\sum_{j=1}^{\mu}a^j(y,\xi)\lambda^{\mu-j}$ で，各 a^j は class S order $(j,0)$ で，$\lambda^\mu+\sum_{j=1}^{\mu}a_0^j(0,\hat{\xi})\lambda^{\mu-j}=0$ は $\mathrm{Im}\lambda\leq 0$ なる根のみ有す。又，g は (3.9) を満たし，更に各 $g_k(y;\xi,\lambda)$ は $y\in W$, $\xi\in\Gamma$ を固定すると，λ の有理函数で，而も上半平面にしか極を持たない。従って，これらのことを考慮にいれると，解 u が原点の半近傍で定義されている場合にも同様の方法で定理を示すことが出来る。

5. 定理 2.2 の証明　特性方程式 $p_0(0,0;\hat{\xi},\lambda)=0$ が少くとも一つ非実解を持つとする $(|\hat{\xi}|\neq 0)$。初期値問題 $(P)_m$ が $\mathbb{R}^{n+1}$ の原点の近傍で $\gamma^{(s)}$-well posed であると仮定して矛盾を導く。

一般性を失うことなく，$p_0(0,0;1,0,\cdots,0,\lambda)=0$ が μ 個の実根と ν 個の非実根を持つ，と仮定出来る $(\nu\geq 1)$。この時，(4.9) の評価式に矛盾する様な初期値の列を容易に見出すことが出来る。例えば，

$$(5.1)\qquad g_{s,\varepsilon}(x)=\int_0^\infty e^{ixt}e^{-\varepsilon t^{1/s}}dt \qquad \varepsilon>0,\ x\in\mathbb{R}$$

と置き，次の初期条件を考える。($g_{s,\varepsilon}(x_1)\in\gamma^{(s)}(\mathbb{R}^n)$ である)

$$(5.2)\qquad \begin{cases} D_t^j u(x,0)=0 & \text{for } 0\leq j\leq m-1,\ j\neq\mu \\ D_t^\mu u(x,0)=g_{s,\varepsilon}(x_1) \end{cases}$$

今この初期条件に対する解 u_ε を考えると，定理 2.1（の証明の (4.9) 式）から，$g_{s,\varepsilon}(x_1)v_N(x,0)$ の Fourier 変換は $\pm\Gamma$ に於いて，(4.9) と同様の評価を受ける。A は ε に依存しないことに注意する。一方，次の評価は容易に導くことが出来る。

$$(5.3)\qquad |(\widehat{g_{s,\varepsilon}\tilde{v}_N})(\xi)|\leq\varepsilon^{-s}C(BN^s)^N|\xi'|^{-N}$$

ここで，$\tilde{v}_N(x)=v_N(x,0)$，$\xi'=(0,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ であり，B は ε には依らない定数である。$\pm\Gamma$ に於いては (4.9) の評価を，又 $\pm\Gamma$ の補集合に於いては，(5.3) の評価を利用することに依って，$(\widehat{g_{s,\varepsilon}\tilde{v}_N})$ は次の様に評価される。

$$(5.4)\qquad |(\widehat{g_{s,\varepsilon}\tilde{v}_N})(\xi)|\leq C_\varepsilon(AN^s)^N|\xi|^{-N} \qquad \text{for } |\xi|\geq N^s$$

ここで A は ε に依らない。

(5.4) 式を利用して，逆 Fourier 変換を評価すると，必要なら ε に依らない他の定数 A をとることに依り，任意の自然数 k に対して，次の評価を得る。

$$(5.5)\qquad \left|\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^k(g_{s,\varepsilon}\tilde{v}_N)(x)\right|\leq\varepsilon^{-s}C_\varepsilon A^k k!^s$$

一方，定義式 (5.1) を微分することに依って，次の等式を得る。

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^k g_{s,\varepsilon}(x_1)\Big|_{x_1=0} = s\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{s(k+1)}\Gamma(s(k+1))$$

Stirling の公式から，右辺は下から，$C'_\varepsilon(\varepsilon^{-s}A')^k k!^s$ で評価される。従って $\varepsilon^{-s}A' > A$ なる ε を取って固定し，その後で $k\to\infty$ とすると明らかに (5.5) 式に反する。

6. 補題 2.2 の証明　Γ を $R^n\setminus\{0\}$ の開錐集合，W を R^{n+1} の原点の開近傍とする。この節では，$W\times(\Gamma\times R)$ 上の，λ に無関係な symbol のみを考察する。

$p=\sum_{k=0}^{\infty} p_k(y,\xi)$ を symbol とするとき，次の式で定義される symbol を $p_{[\nu]}$ で表わす。

(6.1)　$p_{[\nu]} = \sum_{k=0}^{\infty}(D_t^{\nu} p_k)(y,\xi)$

定義 (3.1) から，$p_{[\nu]}$ は p と同じ class に属し，又同じ order を有す。

簡単の為，次の記号を導入する。

(6.2)　$$C^{\alpha}_{k,\nu,\beta} = \frac{2(2n)^{-k}\, k!}{(k+|\alpha|)!\,(k+\nu+|\beta|)!^s}$$

又，$C^{\alpha}_{k,0,\beta}$ を $C^{\alpha}_{k,\beta}$ と書くことにする。この時，次の命題を得る。

命題 6.1　p, q を class s の symbol とし，${}^{\nu}r = p\circ q_{[\nu]}$ とお

くと，定数 $C_{\nu,j}$ $(0\leq j\leq \nu)$ が存在して，次式が成立する。

$$(6.3)\quad \sum_{k,\alpha,\beta} C^{\alpha}_{k,\nu,\beta}\|({}^{\nu}r)^{(\alpha)}_{k\,(\beta)}\|T^{2k+\nu+|\alpha+\beta|}\ll\sum_{j=0}^{\nu}C_{\nu,j}T^{j}N(p_{[\nu]},T)N(g,T)$$

ここで，$C_{\nu,j}$ は p, g, T に依らない。

<u>証明</u> 補題 3.1 を利用すると，ν に対する帰納法に依って，容易に示すことが出来る。

<u>系 6.1</u> ${}^{\nu}r=p\circ g_{[\nu]}$，$\nu=\nu_1+\nu_2$ $(\nu_1,\nu_2\in\mathbb{N})$ とする。この時次の不等式が成立する。

$$(6.4)\quad \begin{aligned}&\sum_{k,\nu,\beta}\|({}^{\nu}r)^{(\alpha)}_{k\,(\beta)}\|T^{2k+\nu+|\alpha+\beta|}C^{\alpha}_{k,\nu,\beta}\ll\\ &\ll T^{\nu_1}\sum_{j=0}^{\nu_2}C_{\nu_2,j}T^{j}N(p_{[j]},T)N(g_{[\nu_1]},T)\end{aligned}$$

補題 3.2 の仮定から，$W\times(\Gamma\times\mathbb{R})$ 上の class S，ξ に関して，各々，斉次 j, i 次である symbol $a_0^{j}(y,\xi)$ $(1\leq j\leq \mu)$，$b_0^{i}(y,\xi)$ $(1\leq i\leq \nu)$ が存在して次式を満たす。

$$(6.5)\quad p_0(y;\xi,\lambda)=\Big(\lambda^{\mu}+\sum_{j=1}^{\mu}a_0^{j}\lambda^{\mu-j}\Big)\circ\Big(\lambda^{\nu}+\sum_{i=1}^{\nu}b_0^{i}\lambda^{\nu-i}\Big)$$

ここで，W は原点の近傍であり，Γ は $\hat{\xi}$ の錐近傍である。更に，方程式 $\lambda^{\nu}+\sum_{i=1}^{\nu}b_0^{i}(y,\xi)\lambda^{\nu-i}=0$ の任意の根 $\tau(y,\xi)$ に対して，$y\in W$，$\xi\in\Gamma\cap(|\xi|=1)$ の時，次の不等式が成立すると仮定出来る。

$$(6.6)\quad \begin{cases}|\operatorname{Im}\tau(y,\xi)|\geq c_1\,(>0)\\ \Big|\tau(y,\xi)^{\mu}+\sum_{j=1}^{\mu}a_0^{j}(y,\xi)\tau(y,\xi)^{\mu-j}\Big|\geq c_2\,(>0)\end{cases}$$

求めるべき a^j, b^i を，$a^j = a_0^j + A^j$, $b^i = b_0^i + B^i$ とおいて，A^j, B^i を class S の中で，(3.8) を満たす様に求める。その為に，vector 値の symbol $C = {}^t(A^1, \cdots, A^\mu, B^1, \cdots, B^\nu)$ を導入し，各 A^j, B^i が class S で各々 order が $(j,0), (i,0)$ であり，かつ $A_0^j = B_0^i = 0$ のとき，C を class S, order 0 ということにする。

$$L(C) = \sum_{p=0}^{\infty} L_p(C) = \sum_{p=0}^{\infty} {}^t(L_{1,p}(C), \cdots, L_{m,p}(C))$$

$$
\begin{aligned}
L_{n,p}(C) = & \sum_{t=1}^{\min(n,p)} \sum_{\substack{i+j=n-t \\ j \geq 1}} \sum_{\substack{\ell+|\alpha|=p-t \\ \ell \geq 1}} \frac{1}{\alpha!} C_t^{\mu-j} a_0^{j(\alpha)} B^i_{\ell(\alpha,t)} \\
& + \sum_{t=1}^{\min(n,p)} \sum_{\substack{i+j=n-t \\ j \geq 1}} \sum_{\substack{k+|\alpha|=p-t \\ k \geq 1}} \frac{1}{\alpha!} C_t^{\mu-j} A_k^{j(\alpha)} b^i_{0(\alpha,t)} \\
& + \sum_{t=1}^{\min(n,p)} \sum_{\substack{i+j=n-t \\ i,j \geq 1}} \sum_{\substack{k+\ell+|\alpha|=p-t \\ \ell,k \geq 1}} \frac{1}{\alpha!} C_t^{\mu-j} A_k^{j(\alpha)} B^i_{\ell(\alpha,t)}
\end{aligned} \tag{6.7}
$$

$$M(C) = \sum_{p=0}^{\infty} M_p(C) = \sum_{p=0}^{\infty} {}^t(M_{1,p}(C), \cdots, M_{m,p}(C))$$

$$
\begin{aligned}
M_{n,p}(C) = & \sum_{\substack{i+j=n \\ i \geq 1}} \sum_{\substack{\ell+|\alpha|=p \\ 1 \leq \ell \leq p-1}} \frac{1}{\alpha!} a_0^{j(\alpha)} B^i_{\ell(\alpha)} \\
& + \sum_{\substack{i+j=n \\ j \geq 1}} \sum_{\substack{k+|\alpha|=p \\ \ell \leq k \leq p-1}} \frac{1}{\alpha!} A_k^{j(\alpha)} b^i_{0(\alpha)} + \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \geq 1}} \sum_{\substack{k+\ell+|\alpha|=p \\ 1 \leq k,\ell \leq p-1}} \frac{1}{\alpha!} A_k^{j(\alpha)} B^i_{\ell(\alpha)}
\end{aligned} \tag{6.8}
$$

とおく。ここで，$B^i_{\ell(\alpha,v)} = D_x^\alpha D_t^v B^i_\ell$，$n = 1, 2, \cdots, m$，$p = 1, 2, \cdots$ であり，又，$k < 0$ のとき $\sum_{i+j=k} = 0$，$i > j$ のとき $C_i^j = 0$ と

約束する。

以上の様におくと，方程式(3.8)は次の様になる。

$$(6.8)\quad \sum_{i+j=n}(a_0^j B_p^i + A_p^j b_0^i) = -L_{n,p}(C) - M_{n,p}(C) - F_{n,p} + G_{n,p}$$

ここで，$n=1,2,\cdots,m$，$p=1,2,\cdots\cdots$ であり，

$$(6.9)\quad \begin{aligned} F_{n,p} &= \sum_{i+j=n}\sum_{|\alpha|=p}\frac{1}{\alpha!}a_0^{j(\alpha)}b_{0(\alpha)}^i \\ &+ \sum_{t=1}^{\min(n,p)}\sum_{i+j=n-t}\sum_{|\alpha|=p-t}\frac{1}{\alpha!}C_t^{\mu-j}a_0^{j(\alpha)}b_{0(\alpha,t)}^i \end{aligned}$$

であり，$G_{n,k}$ は $P_k(y;\xi,\lambda)$ の λ^{m-n} の係数である（$k=1,2,\cdots,m$）。

今，方程式(6.9)の係数行列を $H(y,\xi)$ で表わすと，$\det H(y,\xi)$ は $\lambda^\mu + a_0^1\lambda^{\mu-1}+\cdots+a_0^\mu$ と $\lambda^\nu + b_0^1\lambda^{\nu-1}+\cdots+b_0^\nu$ を λ の多項式と見た時の終結式である。従って，(6.6)から，$H(y,\xi)$ の逆行列 $D(y,\xi)=(d_{i,j}(y,\xi))_{1\le i,j\le m}$ が存在して，$D(y,\xi)$ の各要素は，次の性質を有すことが容易に示される。

(6.11)
- $1\le i\le\mu$ なる i に対して，$d_{ij}(y,\xi)$ は $W\times(\Gamma\times\mathbb{R})$ 上の class S の symbol であり，ξ に関して，斉次 $i-j$ 次である。
- $\mu+1\le i\le m$ なる i に対して，$d_{ij}(y,\xi)$ は $W\times(\Gamma\times\mathbb{R})$ 上の class S の symbol であり，ξ に関して，斉次 $i-j-\mu$ 次である。

次に，方程式(6.9)を $D(y,\xi)$ を使って，行列の形で書く。

(6.12) $C=-D(L(C)+M(C))-DF+DG$

補題 3.2 の証明を，方程式 (6.12) を逐次近似で解くことに依って行う。

vector 値の symbol C に対して，次の形式的 norm を導入する。

$$(6.13)\quad \begin{aligned} N(C,T) &= \sum_{j=1}^{\mu} N(A^j,T)+\sum_{i=1}^{\nu} N(B^i,T) \\ N_m(C,T) &= \sum_{j=1}^{\mu}\sum_{\upsilon=0}^{m} N(A^j_{[\upsilon]},T)+\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{\upsilon=0}^{m} N(B^i_{[\upsilon]},T) \end{aligned}$$

先ず最初に，C が class S, order 0 の symbol であるとき，(6.12) の右辺が同じ order, 及び同じ class の symbol を定義することを示す。$L_{n,p}(C)$ を (6.7) の順に従って，$L_{n,p}(C)=L^1_{n,p}(C)+L^2_{n,p}(C)+L^3_{n,p}(C)$ と分解して，$L^3_{n,p}$ を考える。

$$\begin{aligned} L^3_{n,p}(C) &= \sum_{t=1}^{\min(n,p)} \sum_{\substack{i+j=n-t \\ i,j\geq 1}} \sum_{\substack{k+l+|\alpha|=p-t \\ k,l\geq 1}} \frac{1}{\alpha!} C^{\mu-j}_t A^{j(\alpha)}_k B^i_{l(\alpha,t)} \\ &= \sum_{t=1}^{\min(n,p)} \sum_{\substack{i+j=n-t \\ i,j\geq 1}} C^{\mu-j}_t (A^j\circ B^i_{[t]})_{p-t} \end{aligned}$$

と書き直すと，$\upsilon\leq m$ の時は，容易に次を示すことが出来る。

$$\begin{aligned} &\sum_{p,\alpha,\beta} C^{\alpha}_{p,\beta} \left\|(D^{\upsilon}_t L^3_{n,p})^{(\alpha)}_{(\beta)}\right\| T^{2p+|\alpha+\beta|} \ll \\ &\ll \sum_{\varphi=0}^{\upsilon} C^{\upsilon}_{\varphi} \sum_{t=1}^{n} \sum_{\substack{i+j=n-t \\ i,j\geq 1}} C^{\mu-j}_t (2n)^{-t} T^t \sum_{p\geq t,\alpha,\beta} C^{\alpha}_{p-t,t,\beta} \left\|(\varphi\gamma)^{(\alpha)}_{p-t(\beta)}\right\| \times \\ &\qquad \times T^{2(p-t)+t+|\alpha+\beta|} \ll \\ &\ll \sum_{\varphi=0}^{\upsilon} C^{\upsilon}_{\varphi} \sum_{t=1}^{n} \sum_{\substack{i+j=n-t \\ i,j\geq 1}} C^{\mu-j}_t (2n)^{-t} T^t \sum_{k,\alpha,\beta} C^{\alpha}_{k,\beta} \left\|(\varphi\gamma)^{(\alpha)}_{k(\beta)}\right\| T^{2k+t+|\alpha+\beta|} \end{aligned}$$

ここで，${}^{\varphi}\gamma = A^{j}_{[\nu-\varphi]} \circ B^{i}_{[t+\varphi]}$ とおいた。従って，${}^{\varphi}\gamma$ は，t i, j に依存する。今，最後の項を次の様に二つの部分に分ける。

$$\sum_{\substack{t,\varphi \\ t+\varphi>m}} C^{\nu}_{\varphi} \sum \cdots + \sum_{\substack{t,\varphi \\ t+\varphi\leqq m}} C^{\nu}_{\varphi} \sum \cdots$$

第一項に就いては，$t+\varphi = m+t_1$ $(t \geqq t_1)$ とおいて，命題 6.1 の系を適用すると，

$$\sum_{\substack{t,\varphi \\ t+\varphi>m}} C^{\nu}_{\varphi} \cdots \ll \sum_{\substack{t,\varphi \\ t+\varphi>m}} C^{\nu}_{\varphi} \sum_{\substack{i+j=n-t \\ i,j\geqq 1}} C^{\mu-j}_{t} (2n)^{-t} T^{2t-t_1} \sum_{\theta=0}^{t_1} C_{t_1,\theta} T^{\theta} \times$$
$$\times N(A^{j}_{[\nu-\varphi+\theta]}, T)\, N(B^{i}_{[m]}, T)$$

なる評価を得る。第二項は，補題 3.1 から次の様に評価される。

$$\sum_{\substack{t,\varphi \\ t+\varphi\leqq m}} C^{\nu}_{\varphi} \cdots \ll \sum_{\substack{t,\varphi \\ t+\varphi\leqq m}} C^{\nu}_{\varphi} \sum_{\substack{i+j=n-t \\ i,j\geqq 1}} C^{\mu-j}_{t} (2n)^{-t} T^{2t} N(A^{j}_{[\nu-\varphi]}, T)\, N(B^{i}_{[t+\varphi]}, T)$$

一方，$N(M_n(C)_{[\nu]}, T)$ $(\nu \leqq m)$ は，補題 3.1 と (3.7) に依り，$TE(T)N_m(C,T) + EN_m(C,T)N_m(C,T)$ で評価されることが分かる。ここで，$E(T)$ は十分小な T で収束する T の巾級数であり，E は定数である。(共に C には依存しない)。従って，$F_{n,0} = G_{n,0} = 0$ $(1 \leqq n \leqq m)$ を考慮に入れると，(6.12) の右辺は，次の式で評価されることを示せる。

(6.14) $TE_1(T)N_m(C,T) + E_2(T)N_m(C,T)N_m(C,T) + T^2E_3(T)$

ここで，$E_i(T)$ $(i=1,2,3)$ は T の巾級数で，十分小なる T に対して収束し，又 C には依存しない。(6.14)式で評価されるということは，(6.12)の右辺が，class S, order 0 の symbol を定義することを示している。更に強く，(6.14)の評価式は次のことを示している。

$$(6.15)\left\{\begin{array}{l}\text{十分小さな } \varepsilon>0 \text{ に対して，} \delta>0 \text{ が存在し，} 0\leqq T\leqq\delta, \\ \lambda=0,1,2,\cdots \text{ に対して，} N_m({}^{\lambda}C,T)\leqq\varepsilon \text{ が成立する。}\end{array}\right.$$

ここで，${}^{\lambda}C$ は，${}^{\lambda+1}C=-D(L({}^{\lambda}C)+M({}^{\lambda}C))-DF+DG$，${}^{0}C=0$，$\lambda=1,2,3,\cdots$ に依って逐次定義される symbol である。

今迄と同様の方法に依って，$N_m({}^{\lambda+2}C-{}^{\lambda+1}C,T)$ を
$T\tilde{E}_1(T)N_m({}^{\lambda+1}C-{}^{\lambda}C,T)+\tilde{E}_2(T)(N_m({}^{\lambda}C,T)+N_m({}^{\lambda+1}C,T))N_m({}^{\lambda+1}C-{}^{\lambda}C,T)$ で評価することが出来る。$\tilde{E}_i(T)$ $(i=1,2)$ は前と同様 C には依らない。従って，この評価と，(6.15)から逐次近似の収束することが分かる。

7. 補題 3.3 の証明　補題 3.2 から，P は (3.8) の形に分解される。従って，補題 3.3 を証明するには，$r=\lambda^{\nu}+\sum_{i=1}^{\nu}b^{i}\lambda^{\nu-i}$ の逆 symbol を構成し，それが所要の性質を有すことを示せば良い。

(6.8)及び斉次性から，任意の $y\in W$，任意の $\eta\in\Gamma\times\mathbb{R}$ に対して，次の不等式が成立する，と仮定出来る。

(7.1) $|r_0(y;\xi,\lambda)| \geqslant c_0^{-1}|\zeta|^{\nu}$

ここで，c_0 は正の或る定数である。

命題 7.1　$g_0(y;\zeta) = 1/r_0(y,\zeta)$ とおくと，g_0 は $W\times(\Gamma\times\mathbb{R})$ 上の，class S, order $(0,-\nu)$ の symbol となる。更に，定数 C, A が存在して，$|\alpha+\beta|\geqslant 1$ の時，任意の $(y;\zeta)\in W\times(\Gamma\times\mathbb{R})$ に対して，次の不等式が成立する。

(7.2) $|g_{0\,(\beta)}^{\ (\alpha)}(y;\zeta)| \leqslant CA^{|\alpha+\beta|}|\zeta|^{-\nu-1}|\xi|^{1-|\alpha|}|\beta|!^{s}\alpha!$

証明　先ず最初に，j が非負な整数とするとき，order$(j,\nu-j)$ の symbol は order $(0,\nu)$ の symbol でもあることに注意する。従って，この注意と，自明な不等式

$|(\lambda^{\nu})_{(\beta)}^{(\alpha)}| \leqslant CA^{|\alpha+\beta|}|\zeta|^{\nu-1}|\xi|^{1-|\alpha|}|\beta|!^{s}\alpha!$　for $|\alpha+\beta|\geqslant 1$

から，$|\alpha+\beta|\geqslant 1$ の時，次の不等式を得る。

(7.3) $|r_{0\,(\beta)}^{\ (\alpha)}(y;\zeta)| \leqslant C(1/3)^{|\alpha+\beta|}|\zeta|^{\nu-1}|\xi|^{1-|\alpha|}|\beta|!^{s}\alpha!$

今，$|\alpha+\beta|$ に対する帰納法に依って，$|\alpha+\beta|\geqslant 1$ の時，

(7.4) $|g_{0\,(\beta)}^{\ (\alpha)}(y;\zeta)| \leqslant C_1^{|\alpha+\beta|+1}A^{|\alpha+\beta|}|\zeta|^{-\nu-1}|\xi|^{1-|\alpha|}|\beta|!^{s}|\alpha|!$

なる不等式が $W\times(\Gamma\times\mathbb{R})$ 上で成立することを示す。(7.4) が $1\leqslant|\alpha+\beta|\leqslant p$ に対して成立すると仮定して，$|\alpha+\beta| = p+1$ の時を示す。

$$0 = (r_0 g_0)_{(\beta)}^{(\alpha)} = \sum C_\gamma^\alpha C_\nu^\beta\, r_{0\,(\beta-\nu)}^{\ (\alpha-\gamma)}\, g_{0\,(\nu)}^{\ (\gamma)}$$

なる等式から，$g_{0(\beta)}^{(\alpha)}$ は次の様に書ける。

$g_{0\,(\beta)}^{\ (\alpha)} = -\sum C_\gamma^\alpha C_\nu^\beta\, r_0^{-1} r_{0\,(\beta-\nu)}^{\ (\alpha-\gamma)}\, g_{0\,(\nu)}^{\ (\gamma)}$。帰納法の仮定から，

$$|q_{0}{}^{(\alpha)}_{(\beta)}| \leqslant c_0 C C_1^{|\alpha+\beta|} |\zeta|^{-\nu-1} |\xi|^{1-|\alpha|} A^{|\alpha+\beta|} \times$$
$$\times \sum_{p=0}^{|\alpha|} \sum_{q=0}^{|\beta|} C^{|\alpha|}_{p} (|\alpha|-p)!\,p!\,(1/3)^{|\alpha|-p} C^{|\beta|}_{q} (|\beta|-q)!^{s} q!^{s} (1/3)^{|\beta|-q}$$
$$\leqslant (4c_0 C) C_1^{|\alpha+\beta|} A^{|\alpha+\beta|} |\zeta|^{-\nu-1} |\xi|^{1-|\alpha|} |\beta|!^{s} |\alpha|!$$

が成立する。従って $C_1 \geqslant 4c_0 C$ ととれば，$|\alpha+\beta| = p+1$ の時が示される（[3]の補題3.1を参照)。

<u>命題7.2</u>　$r \circ q_0 = 1 - h$ （$q_0 = 1/r_0$）とおくと，h は class s, order $(1,-1)$ なる symbol で，更に次の評価が成立する。

(7.5)　$N(h, T) \ll T^2 C(T)$

ここで，$C(T)$ は十分小な T に対して収束する T の巾級数である。

<u>証明</u>　$r = \lambda^{\nu} + s$ とおいて，$r \circ q_0 - 1 = (\lambda^{\nu} \circ q_0 - \lambda^{\nu} q_0) + (s \circ q_0 - s_0 q_0)$ と書くと，命題7.1から第二項は order $(1,-1)$ となる。又，(3.2)の定義式から，

$N(s \circ q_0 - s_0 q_0, T) = \sum_{k \geqslant 1, \alpha, \beta} C^{\alpha}_{k,\beta} \| (s \circ q_0)^{(\alpha)}_{k(\beta)} \| T^{2k+|\alpha+\beta|} \ll T^2 C(T)$ となることが分かる。一方 $\tau = \lambda^{\nu} \circ q_0 - \lambda^{\nu} q_0$ とおくと，補題3.1の証明から，

$$\sum_{k,\alpha,\beta} C^{\alpha}_{k,\beta} \sup \left\{ |\zeta| |\xi|^{-1+k+|\alpha|} |\tau_{k}{}^{(\alpha)}_{(\beta)}| \right\} \ll N'(\lambda^{\nu}, T) N'(q_0, T) \ll T^2 C(T)$$

を得る。

<u>補題3.3の証明</u>　$h^1 = h$, $h \circ h = h^2$, ---, $h^p = \overbrace{h \circ h \circ \cdots \circ h}^{p\text{回}}$ と書くと，命題7.2と補題3.1から，$\tau = h + h^2 + \cdots + h^p + \cdots$ は class s, order $(1,-1)$ の symbol を定義することが分かる。

一般に，$\circ$ なる作用が交換可能であることに注意すると，
$q = q_0 \circ (1+\tau) = q_0 + q_0 \circ \tau$ が求めるものである。評価 (3.9) は，(7.2) 及び τ が order $(1,-1)$ の symbol である，ということから導かれる。

参考文献

[1] L. Hörmander ; Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients, Comm. Pure Appl. Math. 24, 671-704, (1971)

[2] L. Boutet de Monvel and P. Krée ; Pseudo-differential operators and Gevrey classes, Ann. Inst. Fourier Grenoble, 17, 295-323, (1967)

[3] S. Mizohata ; Solutions nulles et solutions non analytiques, Jour. Math. Kyoto Univ. I-2, 271-302, (1962)

[4] K. Nishiwada ; to appear

[5] H. Komatsu ; Irregularity of characteristic elements and hyperbolicity, At the conference on Structure of Solutions of Partial Differential Equations at RIMS on October 24, (1975)