数理解析研究所講究録
第 337 巻 1978 年 148-170

半空間での system $\{P(D), B_j(D), j=1\cdots p\}$ に対する Liouville type theorem について

筑波大学 数学系 柴田 良弘

§1. Introduction. Rellich [11] の classical theorem によれば、reduced wave eq $\Delta u + u = 0$ outside a ball in $\mathbb{R}^n$ の解は $u(x)|x|^{(n-1)/2} \to 0$ as $x \to \infty$ であれば、$u \equiv 0$ である。この結果の拡張はより広い class の operators に対してなされた。S. Agmon [1, 2] W. Littman [5, 6], F. Trèves [12] (それらの論文の references を参照) の仕事の後，村田 [7, 8], Hörmander [3] により荒く言って次の事が示された。$P(D)$ を $D = i^{-1}\partial/\partial x$ に関する定数係数の多項式 $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ とする。

(1) $P(D)u = 0$ in $\mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{S}' \cap L^2_{loc}$ さらに u は

(1.1) $$\lim_{R\to\infty} R^{-d} \int_{\Gamma_R} |u(x)|^2 dx = 0$$

を満たせば $u \equiv 0$ である。ここで d は $A = \{\xi \in \mathbb{R}^n ; P(\xi) = 0\}$ の codimension. Γ は $\mathbb{R}^n$ の open cone ですべての A に含まれる多様体の normal plane と交わる。また $\Gamma_R = \{x \in \Gamma ; R < |x| < 2R\}$.

(2) (1) の条件に加えて P の各 irreducible factor が real

hypersurface 上で 0 となり, Γ はある その様な点での両側の normal directions を含むとする。このとき $u \in \mathcal{S}' \cap L^2_{loc}$ かつ $P(D)u \in \mathcal{E}'$ であれば u が

$$(1.2) \qquad \lim_{R\to\infty} R^{-1} \int_{\Gamma_R} |u(x)|^2 dx = 0$$

をみたせば $u \in \mathcal{E}'$ である。

(2) は Rellich theorem の拡張となっている。即ち $P(D)u = 0$ なる方程式を compact set の外側で考えたとき, u が (1.2) をみたせば その領域で $u \equiv 0$ となる。次に unbounded domain の外部領域で $P(D)u = 0$ なる方程式を考えたとき, やはり (1.2) の形で解の一意性が判定できる為の領域と $P(D)$ に対する条件がどの様なものであるかが問題になる。考える領域 Ω がある paraboloid of revolution の外部を含む場合, $L = -\Delta + q(x)$ に対して, $(L-\lambda)u = 0$ in Ω かつ $u \in L^2(\Omega)$ であれば $u \equiv 0$ in Ω なる結果が 今野 [4] により得られた。また Γ を closed convex proper cone として $\Omega = \mathbb{R}^n - \Gamma$ とおくとき, $P(\xi)$ が適当な Γ によって決まる幾何的条件を満す場合, $P(D)u = 0$ in Ω, $u \in \mathcal{S}' \cap L^2_{loc}$ なる u について, u が (1.2) を満せば $u \equiv 0$ in Ω であることが村田－柴田 [9] で得られた。一方 Ω が half-space に含まれる様な unbounded domain の場合, S. Agmon [1] により Schrödinger op の homogeneous equations の Ω での解で Dirichlet zero boundary condition を満すもの u について

$$(1.3) \qquad \lim_{R\to\infty} R^{-1}\int_{R<|x|<2R} |u(x)|^2 dx = 0$$

を満せば $u \equiv 0$ であることが知られている。更に Dirichlet zero 条件をおかなければならないことも知られている。我々はここで特に Ω が半空間の場合，任意の定数係数作用素 $P(D)$ と $P(D)$ から決まる条件をみたす boundary operators $\{B_j(D),\ j=1\cdots p\}$ に対して，$\{P(D), B_j(D), j=1\cdots p\}$ に対する homogeneous boundary problem の解 $u \in \mathcal{S}'(\bar\Omega) \cap L^2_{loc}(\bar\Omega)$ が $\{P(D), B_j(D), j=1,\cdots,p\}$ から決まる自然数 d について

$$\lim_{R\to\infty} R^{-d}\int_{R<|x|<2R} |u(x)|^2 dx = 0$$

を満せば $u \equiv 0$ であることを得たことを表わす。更に境界条件が $P(D)$ から決まる条件を満たさない場合は $\mathbb{R}^n$ の急減少関数の Ω への制限によって得られる関数で homogeneous boundary value problem の解があることが示される。(詳しくは Y. Shibata [10] を参照)。

§2. 問題と結果．　§1 とは記号を変える。$\mathbb{R}^{n+1} \ni (x, y) = (x_1,\cdots,x_n, y)$，$\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1};\ y>0\}$，$D = (D_x, D_y) = i^{-1}(\partial/\partial x_1,\cdots,\partial/\partial x_n, \partial/\partial y)$ とする。$\{P(D), B_j(D), j=1\cdots p\}$ を定数係数偏微分作用素の系とする。この system について次の斉次境界値問題を考える。

$$(2.1) \qquad P(D)u = 0, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$$

(2.2) $\quad B_j(D)u|_{y=0} = 0, \quad j=1,\cdots,p \qquad x\in\mathbb{R}^n.$

ここで $u\in C^\infty([0.\delta)\,;\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_x)) = \{u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{\overline{n+1}}_+)\,;\,\langle u|_{\mathbb{R}^n_x\times(0\delta)}, \varphi(\cdot)\rangle_x \in C^\infty([0.\delta))$ for $\forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x)\}$ $(\delta>0)$ なるもののみを考える事にする。今 $\{B_j(D),\ j=1\cdots p\}$ の満たす可き条件を示す．その為に $P(D)=P(D_x,D_y)=\sum_{j=0}^m a_j(D_x)D_y^j$ とおく。ここで $a_m(\xi)\neq 0$ when $\xi\in\mathbb{R}^n$ とする。$m\geq 1$ の場合次の条件(A.1)をおく。これは個数 p に関する条件である。

(A.1) The number of roots with positive imaginary part of the equation $P(\xi,\lambda)=0$ in λ is less than or equal to p whenever $\xi\in\mathbb{R}^n$.

ここで $m=0$ の場合は任意の $\{B_j(D),\ j=1\cdots p\}$ に対して(A.1)は満たされているとする。次に $\{B_j(D),\ j=1\cdots p\}$ のある意味での1次独立性に関する条件を述べる。その為に少し準備をする。$P(\xi,\lambda)=\prod_{j=1}^k P_j(\xi,\lambda)^{\ell_j}$，$\tilde{P}(\xi,\lambda)=\prod_{j=1}^k P_j(\xi,\lambda)$ とおく。ここで $P_j(\xi,\lambda)$ は irreducible polynomial である。Ω を $\mathbb{R}^n-\{\xi\in\mathbb{R}^n\,;\,Q(\xi)\cdot a_m(\xi)=0\}$ の connected component を表わすとする．但し $Q(\xi)$ は $\tilde{P}(\xi,\lambda)$ と $\frac{\partial\tilde{P}}{\partial\lambda}(\xi,\lambda)$ の終結式とする。Ω の中の十分小なる任意の open set を U と表わすことにする。$\xi\in U$ のとき $P(\xi,\lambda)=0$ の λ についての根を $\lambda_j(\xi)$, $j=1,\cdots,m$ と表わせば，$\lambda_j(\xi)$ は real analytic fun in U である。こうして

その imaginary part を $\mathrm{Im}\,\lambda_j(\xi)$ で表わせば、これ等も又 real analytic fun in U である。こうして $\mathrm{Im}\,\lambda_j(\xi) \not\equiv 0$ in U, $j=1\cdots\mu$. $\mathrm{Im}\,\lambda_j(\xi)\equiv 0$ in U $j=\mu+1,\ldots, m$ として一般性を失なわない。但し $\mu=0$ のときはすべての j について $\mathrm{Im}\,\lambda_j(\xi)\equiv 0$ in U と解釈する。今 $A_{U,\mathrm{Im}}=\{\xi\in U;\ \mathrm{Im}\,\lambda_t(\xi)=0$ for some $t\in\{1,\cdots\mu\}\}$ とおくと $A_{U,\mathrm{Im}}$ は空又は real analytic set である。$U-A_{U,\mathrm{Im}}$ の各 connected component を W_U で表わすことにする。$\xi\in W_U$ のとき, $P(\xi,\lambda)=0$ の λ についての根は次の3通りに分類される。$\lambda_j^0(\xi)$, $j=1,\ldots,a$, $\mathrm{Im}\,\lambda_j^0(\xi)\equiv 0$ in W_U, $\lambda_j^+(\xi)$, $j=1\cdots b$, $\mathrm{Im}\,\lambda_j^+(\xi)>0$ in W_U, $\lambda_j^-(\xi)$, $j=1,\ldots,c$, $\mathrm{Im}\,\lambda_j^-(\xi)<0$ in W_U。更にこれらは全て実解析関数であり constant multiplicity をもつ。こうして $\xi\in W_U$ のとき,

$$P(\xi,\lambda)=a_m(\xi)\prod_{j=1}^{a}(\lambda-\lambda_j^0(\xi))^{\alpha_j}\cdot\prod_{j=1}^{b}(\lambda-\lambda_j^+(\xi))^{\beta_j}\cdot\prod_{j=1}^{c}(\lambda-\lambda_j^-(\xi))^{\gamma_j}$$

と書ける。ここで $P^0(\xi,\lambda)=\prod_{j=1}^{a}(\lambda-\lambda_j^0(\xi))^{\alpha_j}$, $P^+(\xi,\lambda)=\prod_{j=1}^{b}(\lambda-\lambda_j^+(\xi))^{\beta_j}$, $P^-(\xi,\lambda)=\underbrace{\prod_{j=1}^{c}}_{a_m(\xi)}(\lambda-\lambda_j^-(\xi))^{\gamma_j}$, $\hat a=\sum_{j=1}^{a}\alpha_j$, $\hat b=\sum_{j=1}^{b}\beta_j$, $\hat c=\sum_{j=1}^{c}\gamma_j$ とおく。(A-1) の条件から $\hat b\le p$ である。$L^+_{W_U\sigma}(\xi)=\det\left((2\pi i)^{-1}\oint B_{\sigma_j}(\xi,\lambda)\lambda^{k-1}(P^+(\xi,\lambda))^{-1}d\lambda\right)_{j,k=1\cdots\hat b}$ とおく。ここで $\sigma=(\sigma_1,\cdots,\sigma_{\hat b})$ を $\{1,\cdots,p\}$ の $\hat b$ 個の元からなる subset とした。以下の準備の下で $\hat b>0$ なる U について次の条件を課する。

(A.2) 任意の $\hat{\xi}>0$ なる Γ に対して、ある $\sigma \subset \{1,\cdots,p\}$ が存在して、$L^{+}_{W_{\Gamma}\sigma}(\xi)$ は W_{Γ} で恒等的には 0 にならない。

$m=0$ のときは、(A.2) は自動的に満たされているとする。

このとき次の結果を得る。

Main Theorem (1) $\{P(D), B_j(D), j=1,\cdots,p\}$ を (A.1)、(A.2) を満す定数係数偏微分作用素の系とする。

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}^{n+1}$ の open cone Γ と自然数 N で次の性質をみたすものが $\{P(D), B_j(D), j=1,\cdots,p\}$ に応じて決まる。

"

$u(x,y) \in L^2_{loc}(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_{+}}) \cap C^{\infty}([0,\sigma);\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_x))$ $(\sigma>0)$ が (2.1)、(2.2) の解とする。もし $u(x,y)$ が

$$\lim_{R\to\infty} R^{-N}\int_{\Gamma_R} |u(x,y)|^2 dx\,dy = 0$$

を満せば、$u\equiv 0$ である。"

ここで $\Gamma_R = \{(x,y)\in\Gamma;\ y\geq 0\ \ R<|(x,y)|<2R\}$.

(2) (A.1)、(A.2) の仮定の少なくとも1方を満たさない系 $\{P(D), B_j(D), j=1,\cdots,p\}$ については $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_{+}})$ の non-trivial な元で (2.1)、(2.2) の解が存在する。図

<u>Remark</u>　Nはおおまかに言って $P(\xi)$ の real characteristic の codimension, Lopatinski determinant の zero pt の codimension から決まる．またΓは$\{\xi\in\mathbb{R}^n;\ P(\xi)=0\}$又は Lopatinski determinant の zero 点に含まれる任意の多様体の各 normal plane と交わる様な$\mathbb{R}^{n+1}$の open cone である．特に$N=1$, $\Gamma=\mathbb{R}^{n+1}$にとれば (1) は任意の (A.1)・(A.2) を満す system についてなりたつ。また N, Γ のとり方は(1)の場合 ある意味で最小にできることも知られている。詳しくは Y. Shibata [10] を参照。

§3. Main Theorem の証明の概容。 $u\in C^\infty([0,\sigma), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_x))\cap L^2_{loc}(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$ を (2.1), (2.2) を満たし，更に u の x に関する partial Fourier transform $\hat{u}(\xi,y)$ についてある $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ fun $\varphi(\xi)$ について $\varphi(\xi)\hat{u}(\xi,y)$ の台が $M\times\overline{\mathbb{R}_+}$ に含まれる場合をまず考える。ここでMは $\xi''=\mu(\xi')$, $\xi'\in\hat{\Omega}\subset\mathbb{R}^{n-r}$ で定義される実解析的多様体であり，$\mu(\xi')$は$\hat{\Omega}$で定義された実解析関数とする。但し $r=n$ の場合は,Mは$\mathbb{R}^n_\xi$の open set と解釈する。ここで $\xi'=(\xi_1,\cdots,\xi_{n-r})$, $\xi''=(\xi_{n-r+1},\cdots,\xi_n)$ とする。

<u>Lemma 3.1.</u> $f(\xi,y)\in C^\infty([0,\sigma);\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_\xi))$ とする。もし f の support が $\xi''=0$ の plane に含まれていれば，

$$f(\xi, y) = \sum_{|\alpha| \leq q} f_\alpha(\xi', y) \otimes D_{\xi''}^{\alpha} \delta$$

なる形をもつ。ここで $f_\alpha(\xi', y) \in C^\infty([0, \sigma) ; \mathcal{S}'(\mathbb{R}_{\xi'}^{n-r}))$ δ は $\mathbb{R}_{\xi''}^{r}$ の原点での Dirac measure であり $\alpha = (\alpha_{n-r+1}, \cdots \alpha_n)$ $D_{\xi''} = i^{-1}(\partial/\partial\xi_{n-r+1}, \cdots, \partial/\partial\xi_n)$ である。

この lemma 3.1 により $\phi(\xi)\hat{u}(\xi, y) = \sum_{|\alpha| \leq s} v_\alpha(\xi', y) \otimes D_{\xi''}^{\alpha} \delta$ と表わされる。そこで α を $|\alpha| = s$ に fix して $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_{\xi''}^{r})$ function で $(D^\alpha \psi)(0) = 1$. $(D^\beta \psi)(0) = 0$. $\alpha \neq \beta$, $|\beta| \leq s$ とすれば

(3.1) $\langle P(\xi', \mu(\xi'), D_y) v_\alpha(\xi', y), \ \chi(\xi')\rho(y) \rangle$

$$= \langle P(\xi, D_y)\phi(\xi)\hat{u}(\xi, y), \ \chi(\xi')\psi(\xi'' - \mu(\xi'))\rho(y) \rangle = 0$$

(3.2) $\langle B_j(\xi', \mu(\xi'), D_y) v_\alpha(\xi', y)|_{y=0}, \ \chi(\xi') \cdot \rangle$

$$= \langle B_j(\xi, D_y)\phi(\xi)\hat{u}(\xi, y)|_{y=0}, \ \chi(\xi')\psi(\xi' - \mu(\xi')) \rangle = 0$$

を任意の $\chi(\xi') \in C_0^\infty(\hat{\Omega})$, $\rho \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}_+^1})$ について得る。従って $P(\xi', \mu(\xi'), D_y) = a_0(\xi', \mu(\xi'))$ と　なる場合には Hörmander [3] の結果から次のことを得る。

<u>Proposition 3.2.</u> $u \in C^\infty([0, \sigma) ; \mathcal{S}'(\mathbb{R}_x^n)) \cap L_{loc}^2(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$ を (2.1), (2.2) の解とする. ある $\phi(\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ について supp $\phi(\xi)\hat{u}(\xi, y) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n ; \ a_j(\xi) = 0, \ j = 1, \cdots m\} \times \overline{\mathbb{R}_+^1}$ と仮定する N_1 を $\{\xi \in \mathbb{R}^n ; \ a_j(\xi) = 0, \ j = 0, 1, 2 \cdots m\} \times \mathbb{R}_+^1$ の $\mathbb{R}^{n+1}$ での

codimension. Γ_1 を $\mathbb{R}^{n+1}$ の open cone で $\{\xi\in\mathbb{R}^n;\ a_j(\xi)=0,\ j=0,\cdots,m\}\times\mathbb{R}^1$ に含まれる任意の real analytic manifold の normal と交わるものとする。もし u が

$$\lim_{R\to\infty} R^{-N_1}\int_{\Gamma_{1,R}} |u(x,y)|^2\,dx\,dy = 0$$

を満たせば，$\phi(\xi)\hat{u}(\xi,y)\equiv 0$ である。ここで $\Gamma_{1,R}=\{(x,y)\in\Gamma_1;\ y\geq 0,\ R<|(x,y)|<2R\}$ とおいた。

次に $P(\xi',\mu(\xi'),D_y)=a_e(\xi',\mu(\xi'))D_y^e+\cdots+a_0(\xi',\mu(\xi'))$ $1\leq e\leq m$ かつ $a_e(\xi',\mu(\xi'))\neq 0$ when $\xi'\in\hat{\Omega}$ の場合を考える。次の lemma を必要とする.(see S. Wakabayashi [13]).

<u>Lemma 3.3.</u> $P(\xi,\lambda)=\lambda^d+a_1(\xi)\lambda^{d-1}+\cdots+a_j(\xi)$ とする。ここで $a_k(\xi)$ は connected open set $V\subset\mathbb{R}^n$ で定義された real analytic function とする。このとき real analytic function $D(\xi)$ $(\not\equiv 0)$ in V で次の性質をみたすものが存在する。

"$P(\xi,\lambda)=0$ の λ についての根は ξ が $V-\{\xi\in V;\ D(\xi)=0\}$ の各 connected component に属するとき, constant multiplicities をもち, かつ real analytic function である。" ☒

こうして，この lemma 3.3 から §2 の条件(A.2)を述べる前に行ったのと同様の議論である $\hat{\Omega}$ の real analytic set $A_{\hat{\Omega}}$ があって $\hat{\Omega} - A_{\hat{\Omega}}$ の各 connected component ω に対して $\xi' \in \omega$ のとき $P(\xi', \mu(\xi'), \lambda) = 0$ の λ についての根は次の3通りに分類される constant multiplicities をもつ real analytic functions in ω となる。$\lambda_j^0(\xi')$, $j=1,\dots,a$, $\mathrm{Im}\,\lambda_j^0(\xi') \equiv 0$, $\lambda_j^+(\xi')$, $j=1,\dots,b$, $\mathrm{Im}\,\lambda_j^+(\xi') > 0$, $\lambda_j^-(\xi')$, $j=1,\dots,c$ $\mathrm{Im}\,\lambda_j^-(\xi') < 0$, $P(\xi', \mu(\xi'), \lambda) = a_e(\xi', \mu(\xi')) \prod_{j=1}^{a} (\lambda - \lambda_j^0(\xi')) \cdot \prod_{j=1}^{b} (\lambda - \lambda_j^+(\xi'))^{\beta_j} \prod_{j=1}^{c} (\lambda - \lambda_j^-(\xi'))^{\gamma_j}$, $\xi' \in \omega$. 但し，$\sum_{j=1}^{a} \alpha_j + \sum_{j=1}^{b} \beta_j + \sum_{j=1}^{c} \gamma_j = e$。 $P^0(\xi', D_y) = \prod_{j=1}^{a} (D_y - \lambda_j^0(\xi'))^{\alpha_j}$ $P^+(\xi', D_y) = \prod_{j=1}^{b} (D_y - \lambda_j^+(\xi'))^{\beta_j}$, $P^-(\xi', D_y) = a_e(\xi', \mu(\xi')) \prod_{j=1}^{c} (D_y - \lambda_j^-(\xi'))^{\gamma_j}$ $\xi' \in \omega$ とおく。$P^-(\xi', D_y)$については次の lemma を得る。

Lemma 3.4. 記号は今まで述べたままとする。$|\alpha| = s$ として

$$\langle P^0(\xi', D_y) P^+(\xi', D_y) v_\alpha(\xi', y),\ w(\xi', y) \rangle = 0$$

for $\forall\, w(\xi', y) \in \mathcal{S}_0(\omega \times \overline{R_+})$. ここで以下 $\mathcal{S}_0(\omega \times \overline{R_+}) = \{ f \in \mathcal{S}(\overline{R_+^{n+1}})\,;\ \mathrm{supp}\, f \subset \omega \times \overline{R_+} \}$ とする。

こうして荒く言って $P^0(\xi', D_y) P^+(\xi', D_y) v_\alpha(\xi', y) = 0$, $y > 0$ $B_j(\xi', \mu(\xi'), D_y) v_\alpha(\xi', y)|_{y=0} = 0$, $j = 1 \cdots p$ を $\xi' \in \omega$ のときみたす。このとき $D_y^j v_\alpha(\xi', y)|_{y=0} = 0$, $j = 0, \dots, e - \hat{c} - 1$ がな

りたてば，$v_\alpha(\xi',y)\equiv 0$　$\xi'\in\omega$ であることは常微分方程式の解の一意性から推察されよう。次のlemmaはそのことを裏付けるものである。

<u>Lemma 3.5.</u> 記号は今までと同じとする。$v_\alpha(\xi',y)$が

$$(3.3)\quad \langle L^0(\xi',D_y)L^+(\xi',D_y)v_\alpha(\xi',y),\ w(\xi',y)\rangle$$
$$=\langle v_\alpha(\xi',y),\ L^0(\xi',-D_y)L^+(\xi',-D_y)w(\xi',y)\rangle$$

for any $w\in\mathcal{S}_0(U\times\overline{R^1_+})$ を満たせば，

$$\langle v_\alpha(\xi',y),\ \chi(\xi')\rho(y)\rangle=0$$

for any $\chi(\xi)\in C_0^\infty(U)$ and $\rho\in C_{(0)}^\infty(\overline{R^1_+})$ である。ここで U はωの任意の open subset である。

<u>Lemma 3.6.</u> 記号は今までと同じとする。$M_j=\{(\xi',\mu(\xi'),\lambda_j^0(\xi'))\ \ \xi'\in\omega\}$，$\delta_j$，$j=1\cdots a$ を non-negative integer で $\delta_j\le\alpha_j$ なるものとする。$\theta_j=(\theta_1^j,\cdots,\theta_n^j\ \theta_{n+1}^j)\in\overline{R^{n+1}_+}$ を M_j の $(\xi_0',\mu(\xi_0'),\lambda_j^0(\xi_0'))$ での normal とする。また $\varepsilon>0$ とする。もし $u\in L^2_{loc}(\overline{R^{n+1}_+})$ が (2.1) を満たし更に，

$$(3.4)\quad \lim_{R\to\infty}R^{-(2(\alpha_j-\delta_j)+r+1)}\int_{|(x,y)/R-\theta_j|\le\varepsilon,\ y\ge 0}|u(x,y)|^2dxdy=0$$

for $\delta_j\ge 1$ を満たせば，ξ_0の十分小なる open n.b.d $\tilde\omega\subset\omega$があって

$$\left\langle \sum_{i=0}^{d} \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(i-1-k)!}{(i-1-k-\nu)!} b_i(\xi') \lambda_j^0(\xi')^{i-1-k-\nu} D_y^k Q(\xi', D_y) v_a(\xi', y)|_{y=0}, \chi(\xi') \right\rangle$$
$$= 0$$

for any $\chi(\xi') \in C_0^\infty(\hat{\omega})$ and $0 \leq \nu \leq \delta_j - 1$ をみたす。ここで $i-1-k-\nu < 0$ のときは、$\lambda_j^0(\xi')^{i-1-k-\nu} \equiv 0$ と解釈する。また $d = \sum_{j=1}^{a} \delta_j$, $\prod_{j=1}^{a} (\lambda - \lambda_j^0(\xi'))^{\delta_j} = \sum_{j=0}^{d} b_j(\xi') \lambda^j$, $b_d(\xi') = 1$, $Q(\xi', \lambda) = \prod_{j=1}^{a} (\lambda - \lambda_j^0(\xi'))^{\alpha_j - \delta_j} p^+(\xi', \lambda)$, $\xi' \in \omega$ とおいた。

次の一般化した Green's formula が必要である。

<u>Lemma 3.7.</u> (Green formula) U を $\mathbb{R}^k$ の open set. また $U' \subset\subset U$ とする。$\lambda_j(\xi)$, $j = 1 \cdots a$ を C^∞ functions in U で "$\lambda_j(\xi) \neq \lambda_{j'}(\xi)$, if $j \neq j'$ when $\xi \in U$" なるものとし、α_j, $j = 1 \cdots a$ を自然数とする。$p(\xi, \lambda) = \prod_{j=1}^{a} (\lambda - \lambda_j(\xi))^{\alpha_j} = \sum_{j=0}^{m} p_j(\xi) \lambda^j$, $\xi \in U$ とおく。β_j, $j = 1, \cdots a$ を non-negative integers で $\beta_j \leq \alpha_j$, $j = 1 \cdots a$ とする。$Q(\xi, \lambda) = \prod_{j=1}^{a} (\lambda - \lambda_j(\xi))^{\alpha_j - \beta_j}$, $m' = \sum_{j=1}^{a} \alpha_j - \beta_j$, $\prod_{j=1}^{a} (\lambda - \lambda_j(\xi))^{\beta_j} = \sum_{j=0}^{m-m'} q_j(\xi) \lambda^j$ とおく。$B_j(\xi, \lambda)$, $j = 1, \cdots, m'$ を λ について order r_j の多項式とし その係数を U で定義された C^∞ function とする。もし

$$\det\left((2\pi i)^{-1} \oint B_j(\xi, \lambda) \lambda^{k-1} (Q(\xi, \lambda))^{-1} d\lambda \right)_{j, k = 1 \cdots m'} \neq 0 \text{ in } U$$

であれば，次の関係式を成り立たせる．係数が U で定義された C^∞ function である ordinary differential operators $C_j(\xi, D_y)$, $j=0,\cdots,t-m$, $E_j(\xi, D_y)$, $j=1,\cdots,m'$, $F_{\nu,j}(\xi, D_y)$, $\nu=0,\cdots,\beta_j-1$, $j=1\cdots a$ が存在する。

$$
\begin{aligned}
&\langle P(\xi, D_y)u(\xi, y), v(\xi, y)\rangle - \langle u(\xi, y), P(\xi, -D_y)v(\xi, y)\rangle \\
&= \sum_{j=0}^{t-m} \langle D_y^j P(\xi, D_y)u(\xi, y)|_{y=0},\ C_j(\xi, D_y)v(\xi, y)|_{y=0}\rangle \\
&+ \sum_{j=1}^{m'} \langle B_j(\xi, D_y)u(\xi, y)|_{y=0},\ E_j(\xi, D_y)v(\xi, y)|_{y=0}\rangle \\
&+ \sum_{j=1}^{a}\sum_{\nu=0}^{\beta_j-1} \langle \sum_{i=0}^{m-m'}\sum_{k=0}^{i-1} \frac{(i-1-k)!}{(i-1-k-\nu)!} q_i(\xi)\lambda_j(\xi)^{i-1-k-\nu} D_y^k Q(\xi, D_y)u(\xi, y)|_{y=0}, \\
&\qquad F_{\nu,j}(\xi, D_y)v(\xi, y)|_{y=0}\rangle,
\end{aligned}
$$

for $\forall u(\xi, y) \in C^\infty([0,\delta); \mathcal{S}'(\mathbb{R}^k))$ and $\forall v(\xi, y) \in \mathcal{S}_0(U' \times \mathbb{R}_+^1)$, 但し $t = \mathrm{Max}\{r_j\ ;\ 1 \le j \le m'\}$.

<u>Lemma 3.8.</u> $\lambda \in \mathbb{C}^1$; $k(\lambda) = \lambda^\mu + a_{\mu-1}\lambda^{\mu-1} + \cdots + a_0$ $q_\nu(\lambda)$, $\nu=1\cdots\mu$ を constant coefficients の polynomials とする。$\det\left((2\pi i)^{-1}\oint q_\nu(\lambda)\lambda^{\sigma-1}(k(\lambda))^{-1}d\lambda\right)_{\nu,\sigma=1\cdots\mu} \neq 0$ を仮定する。$q_\nu(\lambda) = Q_\nu(\lambda)k(\lambda) + q_\nu'(\lambda)$, $\nu=1\cdots\mu$, $\deg q_\nu'(\lambda) \le \mu-1$ とおけば，$[\{\lambda^{\nu-1}k(\lambda), \nu=1\cdots\delta\}$ $\{q_\nu'(\lambda)\ \ \nu=1\cdots\mu\}]$ は order が $\delta+\mu$ 以下の多項式環の基底をなす。

以上の4つの lemma を用いて以下の propositions が証明される。

<u>Case 1.</u> ω において $\hat{a}=0$ and $\hat{b}>0$ の場合.

$\hat{b}\leq p$ が仮定から従うから $\sigma=(\sigma_1,\dots,\sigma_{\hat{b}})\subset\{1,\dots,p\}$ に対して $L_\sigma(\xi')=\det\left((2\pi i)^{-1}\oint B_{\sigma_j}(\xi',\lambda)\lambda^{k-1}(P^+(\xi',\lambda))^{-1}d\lambda\right)_{j,k=1,\dots,\hat{b}}$, $\xi'\in\omega$, $A_\sigma=\{\xi'\in\omega\,;\,L_\sigma(\xi')=0\}$ とおく。$B=\bigcap_\sigma A_\sigma$ とおく。$r=0$ のときは B は空集合又は real analytic set であることが条件 (A.2) から従う。また $1\leq r\leq n$ の場合には B は空集合であるか real analytic set であるか、$B=\omega$ であるかのいずれかである。$1\leq r\leq n$, $B=\omega$ のときは Hörmander [3] の結果から次のことを得る。

<u>Proposition 3.9.</u> 記号は今迄のものとする。Case 1 の条件が ω で成り立ち, $1\leq r\leq n$, $B=\omega$ を仮定する. $\Gamma_R^{(\mathrm{III})}=\{(x,y)\in\Gamma^{(\mathrm{III})}\,;\,y\geq 0,\ R<|(x,y)|<2R\}$ とおく。ここで $\Gamma^{(\mathrm{III})}$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の open cone で $(n(\xi'),0)$ をすべての $\xi'\in\omega$ に対して含む。ここで $n(\xi')$ は $\{(\xi',\mu(\xi'))\,;\,\xi'\in\omega\}$ の $(\xi',\mu(\xi'))$ での normal を表わす. もし u が $\in L^2_{loc}(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$ であり

$$\lim_{R\to\infty} R^{-n}\int_{T_R^{(\mathrm{III})}} |u(x,y)|^2 dx dy = 0$$

$$\Rightarrow \quad v_\alpha \equiv 0$$

<u>Proposition 3.10.</u> 記号は今まで通りとする。ωで case 1 の条件が満たされているとする。

(1) $B = \phi \quad \Rightarrow \quad v_\alpha \equiv 0$

(2) Bがωでのreal analytic set とする. $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ であり

$$\lim_{R\to\infty} R^{-(\nu_n + r)} \int_{T_R^{(\mathrm{II})}} |u(x,y)|^2 dx dy = 0$$

を満たす. $\Rightarrow \quad v_\alpha \equiv 0.$

ここで $\Gamma^{(\mathrm{II})}$は$\mathbb{R}^{n+1}$の open cone であってすべての real analytic manifold $C \subset B$ と$\xi' \in C$に対して$(n(\xi'), 0)$を含む。ここで$n(\xi')$は$\{(\xi', \mu(\xi'))\,;\, \xi' \in C\}$の$(\xi', \mu(\xi'))$でのある normal を示した。また $T_R^{(\mathrm{II})} = \{(x,y) \in \Gamma^{(\mathrm{II})}\,;\, y \geq 0,\ R < |(x,y)| < 2R\}$. また ν_rはBの$\mathbb{R}^{n-r}_{\xi'}$での codimension である。

次に$\hat{\alpha} > 0$ 即ち real な零点が出てくる場合を考える。

$L(p; \delta, 0)(\xi') = \det\left((2\pi i)^{-1} \oint B_{\sigma_j}(\xi'; \lambda)\lambda^{k-1} \times R\right.$

$$\sigma_x\left(\left(\prod_{j=1}^{a}(\lambda-\lambda_j^0(\xi'))^{\alpha_j-\delta_j}\, p^{+}(\xi',\lambda)\right)^{-1} d\lambda\right)_{j,k=1,\cdots,p'},\quad \xi'\in\omega$$

とおく。ここで $\delta=(\delta_1,\cdots,\delta_a)$ $(0\le\delta_j\le\alpha_j)$, $\hat{b}+1\le p'\le p$

また $\sigma=(\sigma_1,\cdots,\sigma_{p'})$ $(\subset\{1,\cdots,p\})$ とする。

<u>Case 2.</u> ω において $\hat{a}>0$ でありさらに次の性質をみたすある p',δ,σ について $L^{(p',\delta,\sigma)}(\xi')$ は ω で恒等的にはじ0にならないとする。

"(I) $\hat{b}+1\le p'\le p$

(II) $\sum_{j=1}^{a}(\alpha_j-\delta_j)+\hat{b}=p'$

(III) もし $p'<p$ であれば、任意の p'' $(p'+1\le p''\le p)$ $\sigma'=(\sigma_1',\cdots,\sigma_{p''}')$ $(\subset\{1,\cdots,p\})$, $\delta'=(\delta_1',\cdots,\delta_a')$ $(0\le\delta_j'\le\alpha_j$, $j=1,\cdots,a$, $\sum_{j=1}^{a}(\alpha_j-\delta_j')+\hat{b}=p'')$ について $L^{(p'',\delta',\sigma')}(\xi')$ は恒等的に ω で 0 である。"

$B=\{\xi'\in L^{(p',\delta,\sigma)}(\xi')=0\}$ とおく。B は空集合又は ω の real analytic set である。

<u>Proposition 3.11.</u> 今までの記号を用いる。$\sum_{j=1}^{a}\alpha_j+\hat{b}=p'$ として、Case 2の仮定が ω でなりたっているとする。

$\Rightarrow$ $\quad \mathrm{supp}\ v_\alpha(\xi',y)\subset B\times\overline{R_+^1}$.

<u>Proposition 3.12.</u> 今までの記号を用いる. ω において Case 2 の仮定がある $\delta_j>0$ について成り立つとする。それらを δ_j

>0, $j=1,\dots,k$とする。$\Gamma_{j,R}=\{(x,y)\in\Gamma_j;\ y\geq 0\ R<|(x,y)|<2R\}$ ここで Γ_j はすべての$\xi'\in\omega-B$ に対して$M_j=\{(\xi',\mu(\xi'),\lambda_j^0(\xi'));\ \xi'\in\omega-B\}$の$(\xi',\mu(\xi'),\lambda_j^0(\xi'))$でのある normal を含む open connected cone とする。もし $u\in L^2_{loc}(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$ が

$$\lim_{R\to\infty} R^{-\{2(\alpha_j-\delta_j)+r+1\}}\int_{\Gamma_{j,R}}|u(x,y)|^2dxdy=0,\ j=1,\dots,k$$

をみたす $\Rightarrow$ $\operatorname{supp} v_\alpha(\xi',y)\subset B\times\overline{\mathbb{R}_+}$.

<u>Case 3.</u> ωにおいて $\hat{a}>0$, $\hat{b}=0$ であり、さらに任意のp', δ, σについて $L^{(p',\delta,\sigma)}(\xi')$が恒等的に$\omega$で 0になる。

<u>Proposition 3.13.</u> 記号は今までのものを用いる。uが

$$\lim_{R\to\infty} R^{-(n+1)}\int_{\Gamma_{j,R}}|u(x,y)|^2dxdy=0,\quad j=1,\dots,a$$

$\Rightarrow$ $v_\alpha(\xi',y)\equiv 0$

但し $\Gamma_{j,R}$ は Prop 3.12 と同じ。

<u>Case 4.</u> ωにおいて $\hat{a}>0$, $\hat{b}>0$. 更に、任意のp', δ, σについて $L^{(p',\delta,\sigma)}(\xi')$が$\omega$で恒等的に$0$である。$B$をCase 1と同じものにする。

<u>Proposition 3.14.</u> 記号を今までと同じとする。ωで case 4 の仮定が満たされるように $1 \leq r \leq n$, $B = \omega$ とする。$u \in L^2_{loc}(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$ が

$$\lim_{R\to\infty} R^{-r}\int_{\Gamma_R^{(\mathrm{III})}} |u(x,y)|^2 dx dy = 0$$

$\Rightarrow$ $v_\alpha(\xi;y) \equiv 0$, 但し $\Gamma_R^{(\mathrm{III})}$ は Prop 3.9と同じもの。

<u>Proposition 3.15.</u> 今までと記号は同じとする。ωで case 4 の仮定が満たされているとする。

(1) $B = \emptyset$ とする。もし $u \in L^2_{loc}(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$ が

$$\lim_{R\to\infty} R^{-(n+1)}\int_{\Gamma_{j,R}} |u(x,y)|^2 dx dy = 0, \quad j = 1 \cdots a,$$

を満たせば, $\Rightarrow$ $v_\alpha(\xi;y) \equiv 0$。

(2) B が real analytic set とする。もし $u \in L^2_{loc}(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$ が

$$\lim_{R\to\infty} R^{-(n+1)}\int_{\Gamma_{j,R}} |u(x,y)|^2 dx dy = 0, \quad j = 1, \cdots a$$

$$\lim_{R\to\infty} R^{-(N_n+r)}\int_{\Gamma_R^{(\mathrm{II})}} |u(x,y)|^2 dx dy = 0$$

を満たす。$\Rightarrow$ $v_\alpha(\xi;y) \equiv 0$. 但し $\Gamma_{j,R}$, $\Gamma_R^{(\mathrm{II})}$ は Prop 3.12, Prop 3.10 とまた同じものとする。

<u>Main Theorem (1) の証明</u> $m=0$ の場合は Prop 3.2 からすぐ従う。$m\geq 1$ とする。u を (2.1), (2.2) の解で $u\in L^2_{loc}(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})\cap C^\infty([0,\sigma);\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$ $(\sigma>0)$ とする。section 2 で述べた W_U をまず考える。ここでは section 3 の Case 1〜4 のいずれかの仮定が成り立っている。従ってその後につづく Propositions を成りたたせることができるだけ N を小さく T を大きくとっておけば，W_U の real analytic set B があって ($B=\emptyset$ も含む) $(W_U-B)\times\overline{\mathbb{R}_+}$ には $\hat{u}(\xi,y)$ の台がないことがわかる。こうして $\mathbb{R}^n$ の real analytic set A of codimension ≥ 1 があって $\mathrm{supp}\,\hat{u}(\xi,y)\subset A\times\overline{\mathbb{R}_+}$ となる。次に $\phi(\xi)\in C_0^\infty(\{\xi\in\mathbb{R}^n;\ a_m(\xi)\neq 0\})$ なるものを任意にとってきて，更に $\mathrm{supp}\,\phi(\xi)$ を適当に小さく取れば，$\phi(\xi)\hat{u}(\xi,y)$ の台はある real analytic manifold M について $M\times\overline{\mathbb{R}_+}$ に含まれる。さらに $M\subset\{\xi\in\mathbb{R}^n;\ a_m(\xi)\neq 0\}$ となる。こうして Case 1〜4 のいずれかにより，N, T をその後に続く Propositions を成り立たせる様にとれば，ある real analytic set A_M of codimension ≤ 2 で $A_M\subset M$ なるものがあって，$\mathrm{supp}\,\phi(\xi)\hat{u}(\xi,y)\subset A_M\times\overline{\mathbb{R}_+}$ がいえる。以下同様にして $\mathrm{supp}\,\hat{u}(\xi,y)\subset\{\xi\in A;\ a_m(\xi)=0\}\times\overline{\mathbb{R}_+}$ がわかる。こうして，次に $\phi(\xi)\in C_0^\infty(\{\xi\in\mathbb{R}^n;\ a_{m-1}(\xi)\neq 0\})$ をとってきて，$\phi(\xi)\hat{u}(\xi,y)$ について考えれば，同様の議論

が成りたつ。以下続けて $\mathrm{supp}\,\hat{u}(\xi, y) \subset \{\xi \in A\,;\, a_m(\xi) = \cdots = a_1(\xi) = 0\} \times \overline{R_+^1}$ がわかる。従って Proposition 3.2から $\hat{u}(\xi, y) = 0$ が従う。

Main Theorem (2) の証明. (A.1)が満たされていないとする。即ち、ある $\xi_0 \in R^n$ で $P(\xi_0, \lambda) = 0$ の λ についての根で positive imaginary part をもつものの個数 $> p$ である。section 2で述べた W_U のすべての union は R^n で dense であるから、任意の open set $V \ni \xi_0$ はある W_U と交わる。こうして、ある W_U で $\hat{p} > p$ である。$A(\xi) = (f_{j,k}(\xi))_{j=1\cdots p,\, k=1\cdots \hat{p}}$ とおく。ここで $f_{j,k}(\xi) = (2\pi i)^{-1} \oint B_j(\xi, \lambda)\lambda^{k-1}(P^+(\xi, \lambda))^{-1} d\lambda$ とおいた。$\hat{p} > p$ であるから、$A(\xi)$ の rank は W_U で r $(0 \leq r \leq p)$ である。$r \neq 0$ のときは、一般性を失うことなく、$\Delta(\xi) = \det(f_{j,k}(\xi))_{j,k=1\cdots r}$ が W_U で恒等的には 0 にならないとしてよい。

$G(\xi, y) = [-\sum_{j,k=1}^{r} \Delta_{jk}(\xi) f_{j,k}(\xi)\{(2\pi i)^{-1} \oint e^{-iy\lambda}\lambda^{k-1}(P^+(\xi, \lambda))^{-1} d\lambda\} + \Delta(\xi)(2\pi i)^{-1} \oint e^{iy\lambda}\lambda^{r}(P^+(\xi, \lambda))^{-1} d\lambda]\,\phi(\xi)$ とおく。但し、$\Delta_{jk}(\xi)$ は $(f_{j,k}(\xi))_{j,k=1\cdots r}$ の (j, k) cofactor であり、$\phi(\xi) \in C_0^\infty(\{\xi \in W_U\,;\, \Delta(\xi) \neq 0\})$。また $r = 0$ のときは、$G(\xi, y) = (2\pi i)^{-1} \oint e^{iy\lambda}(P^+(\xi, \lambda))^{-1} d\lambda \cdot \phi(\xi)$, $\phi(\xi) \in C_0^\infty(W_U)$ とおく。$G(\xi, y) \neq 0$ である。$u(x, y) =$

$(2\pi)^{-n}\int G(\xi, y)\exp(ix\xi)\,d\xi$ とおけば，$u(x, y)\in\mathcal{S}(\overline{R_+^{n+1}})$ であり，さらに (2.1)，(2.2) をみたす。(A.2)を満たさない場合も同様である。

References

[1] S. Agmon, Lower bounds for solutions of Schrödinger type equations in unbounded domains, Proc. Inter. Conf. on Functional Analysis and Related Topics, Tokyo, 1969, 216-224.

[2] ————, Spectral properties of Schrödinger operators, Actes Congr. Int. Math., Vol. 2, (1970) 679-683.

[3] L. Hörmander, Lower bounds at infinity for solutions of differential equations with constant coefficients, Israel J. Math. 16 (1973), 103-116.

[4] R. Konno, Non-existence of positive eigenvalues of Schrödinger operators in infinite domains, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec IA,19 (1972), 393-402.

[5] W. Littman, Decay at infinity of solutions to partial differential equations; removal of the curvature assumption, Israel J. Math. 8 (1970), 403-407.

[6] ————, Maximal rate of decay of solutions of partial differential equations, Arch. Rational. Mech. Anal. 37 (1970), 11-20.

[7] M. Murata, A theorem of Liouville type for partial differential equations with constant coefficients, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec IA, 21 (1974), 395-404.

[8] ————, Asymptotic behaviors at infinity of solutions of certain linear partial differential equations, J Fac. Sci. univ. Tokyo. Sec IA, 23 (1976), 107-148.

[9] M. Murata and Y. Shibata, Asymptotic behaviors at infinity of solutions of partial differential equations in the exterior of a proper cone, to appear.

[10] Y. Shibata, Liouville type theorem for a system $\{ P(D), B_j(D), j = 1,\dots,p \}$ of differential operators with constant coefficients in a half space, to appear.

[11] F. Rellich, Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + k^2 u = 0$ in unendlichen Gebieten, J. Ber. Dt. Math. Ver. 53 (1943), 57-65.

[12] F. Trèves, Differential polynomials and decay at infinity, Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960), 184-186.

[13] S. Wakabayashi, Eigenfunction expansion for symmetric systems of first order in the half-space R^n_+, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 11 (1975), 67-147.