数理解析研究所講究録
第 337 巻 1978 年 171-193

境界値問題 $\Delta v+f(v)=0$, $\frac{\partial v}{\partial n}=0$ の安定な非定数解の存在について

京大 数理研 保野 博

§1. 序

Ωは$\mathbb{R}^n$内の有界領域で、その境界$\partial\Omega$は十分滑らかなものとする。 Ωにおいて次の境界値問題を考える。

$$
(1.1)\quad \begin{cases} \Delta v+f(v)=0 & \text{in } \Omega \quad \left(\Delta \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\right) \\ \frac{\partial v}{\partial n}=0 & \text{on } \partial\Omega \quad \left(\partial/\partial n \text{ は外向き法線微分}\right). \end{cases}
$$

ここに、fは$\mathbb{R}$から$\mathbb{R}$への(C^2級程度に)滑らかな関数である。 以下、本稿を通して古典解の枠内で話を進める。

(1.1)の解は、初期値境界値問題

$$
(1.2)\quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u+f(u) & \text{in } \Omega\times(0,S) \\ \frac{\partial u}{\partial n}=0 & \text{on } \partial\Omega\times(0,S) \\ u(x,0)=u_0(x) & \text{on } \bar{\Omega} \end{cases}
$$

の定常解と見なすことにより、その安定性が議論できる。

N. Chafee [1] は $n=1$ の場合に限って (1.1) を考察し、定数 (constant function) でない解はすべて不安定になることを示した。 ところで、(1.1) の定数解は f の 0 点と同一視できるから、言わば全く自明な解である。 またそれらの中から安定なものを選び出すのも頗る容易なことなので、こうして得られたものを仮に"自明な安定解"と呼んでも差しえあるまい。 してみると Chafee の結果は、$n=1$ ならば (1.1) の解で安定なものは自明な安定解に限る、と主張していることになる。 ここで f には滑らかさ以外に何の制限も置かれていないことを再び注意しておく。

さて、話を多次元 ($n \geqq 2$) に移そう。 結論から述べれば、この場合にはもはや上の主張は正しくない。 すなわち、適当に Ω と f を与えれば (1.1) は安定な非定数解を持つのである。 この辺の事情の違いを生態学上のモデルと関連づけて考えてみるとどうなるだろうか。

例えば一様な環境条件の下に棲息する或る種の微生物の個体数密度の変動は、適当にモデル化してやれば (1.2) のタイプの半線型拡散方程式で記述できることが知られている。 若し、この生物の出生、死亡、及び各個体のランダム運動からくる拡散効果の三者が各々の場所で程よく釣り合って、全域での繁殖の様相が或る平衡状態に達したとすれば、それは取

りも直さず(1.1)の解のひとつを具現していることになる。その中でもミクロな擾乱にすら耐え切れず直ぐに壊れてしまうような平衡状態は不安定な解に、簡単には壊れない平衡状態――本来これのみをこそ平衡状態と呼ぶにふさわしいのだろうが――は安定な解に対応していると考えられよう。よって(1.1)が安定な非定数解を有し得るか否かを議論することは、この生物の繁殖の様相が、その環境条件の一様性にもかかわらず、場所的に一様でない分布のまま平衡状態に陥りしかもその状態を壊さずに持続できる可能性はあるか、ということを探る意味を持つ。生活圏が1次元(的な)領域の場合にはそのような可能性がないことは、Chafeeの結果の語るところであった。ところが領域の形状が多少とも複雑で、ために内部流通がかなり悪いならば、偏った個体数密度の分布のまま状況が安定してしまう事態も十分起こりそうに思えないだろうか。(もちろん熱の拡散現象ではこのようなことは起こり得ない。実際、連結である以上領域全体は時間がたてば必ず等温になってゆくのであって、その内部流通の良し悪しは単に等温化してゆく速さを左右するに過ぎないからである。しかし生物には、それが生活してゆく上での"自然な"と言うか不正確な表現だが"好みの"個体数密度なるもの――自明な安定解に対応――が場合によっては幾

つかある。　だから、相異なる"好みの"個体数密度で２箇所に分れてこの生物が棲息しており、且つ２箇所間の流通が極めて悪いとすれば、殆どこのままの形で《従って非等密度のまま》状況が安定してしまうと考える方が自然である。）そうすると、Ωの内部流通が悪い場合には (1.1) が安定な非定数解を持つこともあり得ると考えたくなる。　一方、先の１次元領域のように内部流通の非常にスムーズな場合には、環境条件の一様性が強く効いてきて、偏った分布の状態は直ぐに崩れて均等化に向かうものと思われ、従って (1.1) の安定解は自明なものに限るという結論が下せそうに思えてくる。

詳しい説明を省いたので、いささか強引な解釈であるとの印象を与えたかもしれない。　が、こういう捉え方があながち的外れではないひとつの証拠に、以下の命題が成立する。まずChafeeの結果の拡張として、Ωが$\mathbb{R}^n$の有界凸領域（無論境界の滑らかさは仮定）ならば、fの取り方にかかわらず (1.1) の非定数解はすべて不安定になることが言える。　円環領域等の場合も同様である（[2; §5] 参照）。　これらはいずれも"内部流通の良い"領域の例と見なせるだろう。それに対し、Ωの形が例えば瓢箪状に強くくびれておれば、適当にfを選んで (1.1) が安定な非定数解を持つようにできる。　この事実は次のようにも言い換えられる。　　　す

なわち、自明な漸近安定解が２つ以上存在するべく関数fが与えられているなら（fの０点αが漸近安定であるためには$(u-\alpha)f(u)<0$ がαの近傍《但しαを除く》上で成立することが必要十分）、Ωのくびれ具合を十分大きくすることにより、(1.1)に安定な非定数解を持たせることができる。 これはまさに、生物がその"好みの"個体数密度を幾つか持っている場合に相当している。

本稿ではfの形をもう少し制限した上で、(1.1)が安定な非定数解を持つための条件を調べることにする。 §4 でΩとfに関するひとつの十分条件を与え、§5ではそれを用いて、前述の意味で"内部流通の悪い"領域の例をより具体的に描いてみる。

§2. 安定解の存在に関する一定理

解の安定性を定義するために幾つかの記号を用意しなければならない。 まず、(1.2)の初期データu_0は連続関数の空間$C(\overline{\Omega})$から選ぶ。 $C(\overline{\Omega})$のノルムは通常のmaximumノルム $\|\psi\|_\infty = \max_{x\in\overline{\Omega}}|\psi(x)|$ を採る。 各々の初期データに対する局所解の存在は周知であり、この解は可能な限り延長しておく。 従って(1.2)の右端のSの値は一般に初期データ

に依存することになるので、$S(u_0)$ と記すことにする。ちなみに $\forall u_0 \in C(\bar{\Omega})$ に対し

$$0 < S(u_0) \leqq +\infty$$

であって、とくに $S(u_0) < +\infty$ ならば解が有限時間で爆発することを意味している。次に、$C(\bar{\Omega})$ 上の作用素 $U(t)$ を各 $t \geqq 0$ に対して次式で定義する。

$$U(t)\psi = u(\cdot, t; \psi) \qquad \text{for } \forall\psi \in C(\bar{\Omega}) \text{ s.t. } S(\psi) > t.$$

ここで、$u(x, t; \psi)$ は $u_0 = \psi$ を初期データとする (1.2) の解である。$U(t)$ の定義域

$$\{\psi \in C(\bar{\Omega});\ S(\psi) > t\}$$

は t の増加とともに一般に減少し、ときに空になることもあり得るが、$\{U(t)\}_{t \geqq 0}$ は半群の基本的な性質をすべて具有している。ところで、

$$U(t)\psi \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega) \quad (0 < t < S(\psi))$$

なることに注意しておこう。

<u>定 義 1</u>

。(1.1) の解 v が<u>安定</u>であるとは、$\forall\varepsilon > 0$ に対し、$\delta > 0$ が存在して、$\|\psi - v\|_\infty < \delta$ を満たすすべての $\psi \in C(\bar{\Omega})$ に対し

$$S(\psi) = +\infty,$$

かつ

$$\|U(t)\psi - v\|_\infty < \varepsilon \quad (0 \leqq t < +\infty)$$

が成立することを言う。

◦ 安定でない (1.1) の解は<u>不安定</u>であると言われる。

周知のように、与えられた (1.1) の解が安定であるか否かは、(1.1) を線型化して得られる固有値問題の第1固有値の符号と密接な関係がある。 従って、解の安定性を判定するには、固有値の符号を調べるのがひとつの有力な手段となっている。 しかし本稿における以下の議論は、固有値問題とは全く別の枠組の中で展開される。 その際重要な役割を演ずるのが、安定解の存在に関する次の定理である。

<u>定理 A</u>

Y は $C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ の空でない部分集合とし、更に集合列 Y_1, Y_2, Y_3, $\cdots$ が存在して次の条件を満たすとする。

1) $Y_1 \supset Y_2 \supset Y_3 \supset \cdots$, $\bigcap_{m=1}^{\infty} Y_m = Y$,

2) Y_m $(m = 1, 2, \cdots)$ は $C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ の位相で閉、$C(\overline{\Omega})$ の位相で有界,

3) $\forall m \in N$ に対し、Y の $C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ における近傍 V_m と

負でない実数 T_m が存在して

$$U(t)V_m \subset Y_m \quad (t \geqq T_m)$$

が成り立つ。

このとき、Y は (1.1) の安定解を少なくともひとつ含む。

§3. 定理Aの証明

はじめに、必要となる記号を書き並べておく。w を $C(\bar{\Omega})$ の要素として、

$$X^+(w) \underset{\mathrm{def}}{=} \{\psi \in C(\bar{\Omega});\ \psi \geqq w,\ \psi \not\equiv w\},$$

$$X^-(w) \underset{\mathrm{def}}{=} \{\quad〃\quad;\ \psi \leqq w,\quad〃\quad\},$$

S : (1.1) のすべての解の集合,

$$S^+(w) \underset{\mathrm{def}}{=} S \cap X^+(w),$$

$$S^-(w) \underset{\mathrm{def}}{=} S \cap X^-(w).$$

ここで、$\psi \geqq w$ とは $\psi(x) \geqq w(x)\ (\forall x \in \bar{\Omega})$ を意味する。この順序関係により、$C(\bar{\Omega})$ やその部分集合である上記の各集合はすべて半順序集合と見なせる。このように順序構造を導入しておくと、本節の議論を進める上で便利である。ところで S が $C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ の位相で閉じていることは明らかであろう。

定義 2

○ (1.1) の解 v が<u>上から安定</u>であるとは、$\forall\varepsilon>0$ に対し、$\delta>0$ が存在して、$\|\psi-v\|_\infty<\delta$ を満たすすべての $\psi\in X^+(v)$ に対し

$$S(\psi)=+\infty,$$

かつ

$$\|U(t)\psi-v\|_\infty<\varepsilon \quad (0\leqq t<+\infty)$$

が成立することを言う。

○ 上記の $X^+(v)$ を $X^-(v)$ に置き換えることにより、<u>下から安定</u>なる性質が定義される。

○ (1.1) の解が<u>上に不安定</u>であるとは、上から安定でないことを言う。　同じく<u>下に不安定</u>であるとは、下から安定でないことを言う。

〔注〕$U(t)$ が $C(\overline{\Omega})$ の順序構造を保存する作用素であるという事実（比較定理）を用いれば、(1.1) の解に関し

安定 $\Longleftrightarrow$ 上からも下からも安定

なることが容易に証明できる。（$\Rightarrow$ の方はもとより明らか）

定義 3

$\psi\in C(\overline{\Omega})$ に対し、ψ の<u>ω-極限集合</u> $\omega(\psi)$ を

$$\omega(\psi) = \bigcap_{0<t<S(\psi)} \mathrm{closure}\{U(\tau)\psi\ ;\ t \leq \tau < S(\psi)\}$$

で定義する。　ただし、closure は $C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ の位相に関するものである。

［注］ $S(\psi) < +\infty$ のときには $\omega(\psi)$ は必ず空になる。

以上で本節で必要となる記号や言葉の定義は出そろった。更に定理Aの証明の準備として、幾つかの命題を用意する。その中で最も重要な命題2.1、命題2.1′については[2；§3]参照。　他は、比較的よく知られたものである。

命題 2.1

U は(1.1)の解で、上に不安定とする。　このとき、

i) $S^+(U) \neq \emptyset$ ならば、$S^+(U)$ は最小元を有する。　その最小元を U^+ とおくと、$\forall\psi \in X^+(U) \cap X^-(U^+)$ に対し

$$S(\psi) = +\infty,$$

$$\lim_{t\to+\infty} U(t)\psi = U^+ \quad \text{in } C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$$

が成立する。

ii) $S^+(U) = \emptyset$ ならば、$\forall\psi \in X^+(U)$ に対し

$$\lim_{t\to S(\psi)} \|U(t)\psi\|_\infty = +\infty$$

が成立する。

命題 2.1′

v は(1.1)の解で、下に不安定とする。このとき、命題2.1における $S^+(v)$ を $S^-(v)$ に、最小元を最大元に、$X^+(v)$ を $X^-(v)$ に、そして $X^+(v)\cap X^-(v^-)$ を $X^-(v)\cap X^+(v^+)$ に置き換えた命題が成立する。

命題 2.2

Sの部分集合が $C(\bar{\Omega})$ で有界だとすると、それは $C^1(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ で相対コンパクトである。

命題 2.3

i) $\forall\psi\in C(\bar{\Omega})$ に対し、$\omega(\psi)\subset S$。

ii) $\omega(\psi)$ が空でないための必要十分条件は、数列 $0<t_1<t_2<t_3<\cdots\to S(\psi)$ と正数Mが存在して

$$\|U(t_k)\psi\|_\infty \le M \quad (k=1,2,\cdots)$$

が成り立つことである。(実は $S(\psi)<+\infty$ ならば上式は成立し得ない)

系 2.4

半軌道 $\{U(t)\psi\}_{0\le t<S(\psi)}$ が $C(\bar{\Omega})$ で有界なら $\omega(\psi)\ne\phi$.

さて、いよいよ定理の証明にとりかかろう。

定理Aの証明

仮に Y が (1.1) の安定解を含まないとして矛盾を導く。任意に Y の要素 ψ をとる。定理の条件 3) より、任意の自然数 m に対し

$$U(t)\psi \in Y_m \quad (t \geqq T_m)$$

となる。Y_m は $C(\bar{\Omega})$ で有界ゆえ、系 2.4 より $\omega(\psi) \neq \phi$。また、Y_m が $C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ で閉じていることから $\omega(\psi) \subset Y_m$ なることも明らか。よって

$$Y = \bigcap_{m=1}^{\infty} Y_m \supset \omega(\psi) \neq \phi \ .$$

これと命題 2.3 i) より

$$S \cap Y \neq \phi$$

を得る。そこで今度は任意に $S \cap Y$ の要素 v_0 をとる。背理法の仮定により v_0 は不安定であるから、上または下の少なくとも一方に不安定である（定義2の後の[注]参照）。同様だから v_0 は上に不安定であるとする。

さて、$\hat{S}$ を (1.1) の解で上に不安定なものの全体とすると、これは v_0 を含むから空でない。また、$\hat{S} \cap Y \neq \phi$ である。$\hat{S} \cap Y$ には $C(\bar{\Omega})$ から誘導された順序構造がはいるが、これにより $\hat{S} \cap Y$ が帰納的順序集合になることを示そう。W を

$\hat{S}\cap Y$ の任意の全順序部分集合とする。 Wが最大元を持つ場合にはそれがWの上限となるから問題はない。 Wが最大元を持たない場合は、

$$v(x)=\sup_{w\in W} w(x) \qquad (x\in\bar{\Omega})$$

とおくと、vは各点収束の位相でのWの集積点である。 $W\subset Y$ が $C(\bar{\Omega})$ で有界なことと命題2.2を考慮して、vが $C^1(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ の位相に関してもWの集積点になっていることがわかる。 よって、S、Yが閉なることより、

$$v\in S\cap Y.$$

また、$S^-(v)\neq\phi$ であって且つ $S^-(v)$ は最大元を持たないから、命題2.1′によりvは下から安定である。 故に

$$v\in\hat{S}\cap Y.$$

従ってこの場合にもWは上限を持つ。 以上のことから$\hat{S}\cap Y$が帰納的順序集合であることがわかった。

Zornの補題により $\hat{S}\cap Y$ には極大元が存在する。 $\hat{v}$をそのひとつの極大元としよう。 $S^+(\hat{v})\neq\phi$ なることは、条件2)、3)や命題2.1 ii)、2.3を用いて容易に示すことができる。 よって命題2.1 i)より $S^+(\hat{v})$ には最小元が存在する。 それを $\hat{v}^+$ とおく。 各 $m=1,2,\cdots$ に対し

$$V_m\cap X^+(\hat{v})\cap X^-(\hat{v}^+)\neq\phi$$

であることは明らかだから、ここから代表元 ψ_m を選ぶと、

条件 2) より

$$U(t)\psi_m \in Y_m \quad (t \geq T_m).$$

一方、命題2.1 i)より、

$$\lim_{t\to+\infty} U(t)\psi_m = \hat{U}^+ \quad \text{in } C^1(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega).$$

この２式と Y_m が閉じていることから、$\hat{U}^+ \in Y_m\ (m=1,2,\cdots)$ が得られ、よって

$$\hat{U}^+ \in \bigcap_{m=1}^{\infty} Y_m = Y$$

となる。　ところで $\hat{U}^+$ が下から安定なることは明白だから、背理法の仮定により $\hat{U}^+$ は上に不安定である。　従って $\hat{U}^+ \in \hat{S}$.　これと上式より、

$$\hat{U}^+ \in \hat{S}\cap Y$$

を得る。　また $\hat{U}^+ \geq \hat{U}$ かつ $\hat{U}^+ \neq \hat{U}$ であったから、これで $\hat{U}$ は $\hat{S}\cap Y$ の極大元ではあり得ないことになり、矛盾に到達した。　　　　　（証終）

§4. 安定な非定数解の存在

いよいよ本節で、(1.1) が安定な非定数解を持つための、領域Ωと非線型項 f に対する十分条件を与える。　議論の大筋を言えば、適当な条件の下で定理Aにある集合Yを具体的に構成してみせるわけだが、その際、次に述べるところの工

ネルギーの概念が必要となる。

定義 4

境界値問題 (1.1) が与えられているとき、$w \in C^1(\bar{\Omega})$ のエネルギー $J(w)$ を

$$J(w) = \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2}|\nabla w|^2 - F(w) \right\} dx \qquad (\nabla = \mathrm{grad})$$

で定義する。 ここで $F(u) = \int_0^u f(u)\,du$ である。

命題 4.1

$\psi \in C(\bar{\Omega})$ に対し

$$\frac{d}{dt} J(U(t)\psi) = - \left\| \frac{\partial}{\partial t} U(t)\psi \right\|^2_{L^2(\Omega)}$$

が $0 < t < S(\psi)$ で成立する。 よって $J(U(t)\psi)$ は、区間 $(0, S(\psi))$ において t に関し単調減少である。 とくに $\psi \in C^1(\bar{\Omega})$ であれば、区間 $[0, S(\psi))$ において単調減少である。

よく知られた結果であるので証明は省略する。 次に記号を定義しておく。 D を $\mathbb{R}^n$ 内の勝手な有界領域として、

- $\mu(D)$: D の Lebesgue measure
- $\lambda(D) \underset{\mathrm{def}}{=} \inf_{\varphi \in L} \left(\int_D |\nabla \varphi|^2 dx \Big/ \int_D \varphi^2 dx \right)$,

ここで $L=\{\varphi\in H^1(D)\,;\ \int_D \varphi\,dx=0\}$.

［注］周知の如く、Dの境界が滑らかな場合には、$\lambda(D)$ は Dにおける Neumann 境界条件下での $-\Delta$ の第2固有値に他ならない。従って $\lambda(D)>0$ である。境界が滑らかでなくとも、例えばDが凸領域などであれば $\lambda(D)>0$ が成立する（［3; p.298〜300］参照）。

さて、関数 f の格好を大まかに定める。

仮定 1　f は C^2 級程度に滑らか。

仮定 2　$a<0<b$ なる実数 a, b があって、

$$\begin{cases} f(a)=f(0)=f(b)=0 \\ f(u)<0 \qquad (a<u<0) \\ f(u)>0 \qquad (0<u<b). \end{cases}$$

領域Ωについては、本稿を通して次の仮定が置かれていたことを思い出そう。

仮定 3　Ωは $\mathbb{R}^n$ 内の有界領域で、境界は十分滑らか。

こうして定理を述べる下地ができあがった。

<u>定 理 B</u>

f, Ω は仮定1〜3を満足するとし、Ω_1, Ω_2 を Ω の部分領域とする。 もし

(4.1) $$J(w_0) < \varepsilon_0 - \max\{F(a), F(b)\}\cdot\mu(\Omega)$$

なる $w_0 \in R[-,+]$ が存在すれば、(1.1) の安定な解で $R[-,+]$ に属するものがある。 ここに $F(u) = \int_0^u f(u)\,du$ であり、ε_0 および $R[-,+]$ は (4.2)、(4.3) で定義されるものである。

(4.2) $$R[-,+] \underset{\mathrm{def}}{=} \{w \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)\,;\ a \leq w \leq b,\ \int_{\Omega_1} w(x)\,dx < 0,\ \int_{\Omega_2} w(x)\,dx > 0\}$$

(4.3) $$\varepsilon_0 \underset{\mathrm{def}}{=} \max\{F(a), F(b)\} \times \min_{i=1,2}\left(\mu(\Omega_i)\cdot\min\{1, \frac{\lambda(\Omega_i)}{k}\}\right).$$

ただし、

$$k = \max_{a \leq u \leq b}(f(u)/u)$$

である。 ちなみに $0 < k < +\infty$ なることは明らかであろう。

[注] $R[-,+]$ は constant function を含まない。 従って $R[-,+]$ に属する解はすべて非定数解である。

上の定理の証明にあたって、補助定理をふたつ用意する。

補助定理 4.2

f, Ω, Ω_1, Ω_2, ε_0, $R[-,+]$ は定理Bの通りとする。もし $\psi \in R[-,+]$ が不等式

$$J(\psi) < \varepsilon_0 - \max\{F(a), F(b)\} \cdot \mu(\Omega)$$

を満足するなら、

$$U(t)\psi \in R[-,+] \tag{4.4}$$

が $0 \leqq t < +\infty$ で成立する。

補助定理 4.3

記号は上と同様とし、実数αに対し

$$Z_\alpha = \{ w \in R[-,+] \, ; \, J(w) \leqq \alpha \}$$

とおく。もしαが不等式

$$\alpha < \varepsilon_0 - \max\{F(a), F(b)\} \cdot \mu(\Omega)$$

を満足するなら、Z_α は $C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ の位相で閉じている。

これら補助定理の証明は割愛するが、前者に軽く触れておこう。（詳しくは[2; §6]参照） もし(4.4)が成立しないとすると、ある時刻t_1で

$$\int_{\Omega_1} U(t_1)\psi \, dx = 0 \quad \text{または} \quad \int_{\Omega_2} U(t_1)\psi \, dx = 0$$

の少なくとも一方が成り立たなければならない。　すると

$$\int_{\Omega_i} |\nabla U(t_1)\psi|^2 dx \geq \lambda(\Omega_i)\int_{\Omega_i}\{U(t_1)\psi\}^2 dx$$

が $i=1$ or 2 に対して成立することになる。　また、エネルギーの時間に関する単調減少性から

$$J(U(t_1)\psi) < \mathcal{E}_0 - max\{F(a), F(b)\}\cdot\mu(\Omega)$$

が得られ、これら２つの不等式を組み合わせて矛盾が導かれるのである。　後者も似たような考え方で証明できる。

定理Bの証明

J_0 を (4.1) の右辺とし、$m=1,2,\cdots$ に対し

$$Y_m = \{w \in R[-,+]\ ;\ J(w) \leq \frac{mJ(w_0)+J_0}{m+1}\},$$
$$Y = \bigcap_{m=1}^{\infty} Y_m$$

とおく。　Y_m が $C(\overline{\Omega})$ で有界なることはそれが $R[-,+]$ の部分集合である事実から明らかであり、また $C^1(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ の位相で閉じていることは補助定理4.3よりわかる。　よって定理Aの条件 2) は満たされており、1) もまた明白である。最後に条件 3) が満たされていることを示そう。　命題4.1より $J(U(t)\psi)$ は t に関し単調減少であるから、これと補助定理4.2より

$$U(t)\psi \in Y_m \quad (t \geq 0)$$

が $\forall\psi \in Y_m$ に対して成り立つ。 $J(w)$ の w に関する連続性（ $C^1(\bar{\Omega})$、従って $C^1(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ の位相で）から Y_m 自身 Y の近傍であるので、$V_m = Y_m$ とおいて

$$U(t)V_m \subset Y_m \quad (t \geq 0)$$

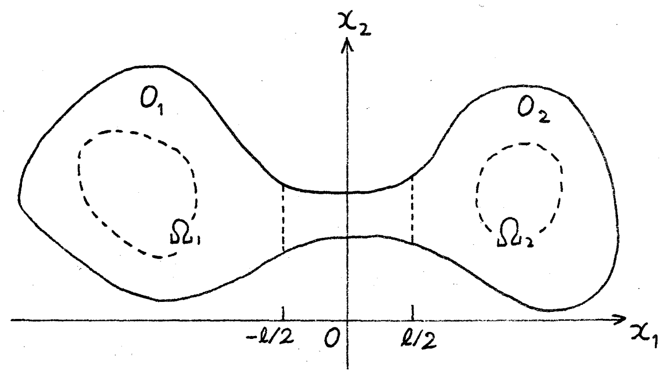
を得る。 これで条件 3) が満たされることもわかった。Y は w_0 を含むゆえ空でないから、定理Aが適用できて、(1.1) の安定解で Y に含まれるものが存在することになる。これと $Y \subset R[-,+]$ を考え合わせれば、ただちに結論が得られる。（証 終）

§5. 内部流通の悪い領域の例

――具体的形状についての条件――

前節では (1.1) が安定な非定数解を持つための十分条件を与えたが、表現がやや抽象的で視覚的に捉えにくいと思われるので、領域 Ω の形状にも直接触れた、もう少しわかりやすい条件に書き直してみようと思う。 議論を能率良く進めるには、多少の一般性を犠牲にしても、Ω の概形を初めから或る程度決めておくのがよい。 簡単のため２次元領域を扱うが、その方法は高次元の場合にも殆どそのまま適用できる。

右図のようにΩは、3つの部分O_1、O_2、および$\{(x_1,x_2)\in\Omega\,;\,-\frac{\ell}{2}\leqq x_1\leqq\frac{\ell}{2}\}$からなるとし、$\Omega_1$と$\Omega_2$はそれぞれ$O_1$、$O_2$の部分領域であるとする。また、



〔領域Ωの形状〕

$-\frac{\ell}{2}\leqq x_1\leqq\frac{\ell}{2}$の部分の幅（$x_2$軸方向に測る）は$d$を越えないとする。このとき、

定理 B′

i) $F(b)\geqq F(a)$ の場合、

$$\left\{\frac{(b-a)^2}{2\ell}+F(b)\ell\right\}d\leqq\varepsilon_0-\{F(b)-F(a)\}\mu(O_1)$$

が満たされるならば$R[-,+]$は(1.1)の安定解を含む。

ii) $F(b)<F(a)$ の場合、

$$\left\{\frac{(b-a)^2}{2\ell}+F(a)\ell\right\}d\leqq\varepsilon_0-\{F(a)-F(b)\}\mu(O_2)$$

なら$R[-,+]$は(1.1)の安定解を含む。但し、$R[-,+]$およびε_0は(4.2)、(4.3)で定義したものである。

この結果は定理Bより直ちに導かれる。実際、

$$\tilde{w} \begin{cases} = a & \text{in } O_1 \\ = a + (b-a)\dfrac{x_1 + \ell/2}{\ell} & \text{in } \{(x_1, x_2) \in \Omega \,;\, -\frac{\ell}{2} \leq x_1 \leq \frac{\ell}{2}\} \\ = b & \text{in } O_2 \end{cases}$$

で定義される $\tilde{w} \in H^1(\Omega)$ が不等式

$$J(\tilde{w}) < \varepsilon_0 - \max\{F(a), F(b)\} \cdot \mu(\Omega)$$

を満たすことは上の条件式を用いて計算すればすぐにわかるので、定理Bの w_0 として、$\tilde{w}$ に $H^1(\Omega)$ の位相で十分近い $C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ の元を取ればよい。（但し $a \leq w_0 \leq b$ なるように取っておかねばならない。）

Ω_i がとくに1辺 h の正方形であれば

$$\mu(\Omega_i) = h^2$$
$$\lambda(\Omega_i) = \pi^2/h^2$$

となる。更に、$-a = b = 1$、かつ

$$f(u) = k\,u(1 - u^{2p})$$
$$k = \pi^2/h^2$$

とおいて上の定理の条件式に代入し、$p \to +\infty$ とすれば次の結果が得られる。

<u>定　理　C</u>

Ω は先の図の通りとし、Ω_1、Ω_2 は1辺の長さが h の正方形であるとする。このとき、もし

$$(5.1) \qquad d < \frac{\ell}{(\ell/h)^2 + (2/\pi)^2}$$

であれば、適当に$f \in C^2(\mathbb{R})$を選んで$R[-,+]$が(1.1)の安定解を含むようにできる。

[注] 定理Bに立ち戻って、より精密な考察を行なえば、領域の"内部流通が悪い"ための十分条件(5.1)は次のように改良できる。

$$(5.1') \qquad d \begin{cases} < \dfrac{\ell}{(\ell/h)^2 + (2/\pi)^2 \theta \cot \theta} & (\ell < h \text{のとき}) \\ < h & (\ell \geqq h \text{のとき}) \end{cases}$$

ここで$\theta = \pi \ell/(2h)$である。

—— 参考文献 ——

[1] Chafee,N., Asymptotic behavior for solutions of a one-dimensional parabolic equation with homogeneous Neumann boundary conditions, J. Differential Equations, 18 (1975), 111-134.

[2] Matano,H., Asymptotic behavior and stability of solutions of semilinear diffusion equations, Publ. RIMS, to appear.

[3] クーラン=ヒルベルト, 数理物理学の方法4, 東京図書(斎藤利弥監訳/筒井孝胤訳).