数理解析研究所講究録
第 337 巻 1978 年 194-210



# 超可微分函数に対する Cauchy-Kowalevsky の定理とその双対

東大 理学部 小松彦三郎

## §1 Cauchy-Kowalevsky の定理の一般化

古典的な Cauchy-Kowalevsky の定理は次のことを主張している.

(1) $$P(x, \partial) = \sum_{|\alpha| \leqq m} a_\alpha(x)\, \partial^\alpha$$

を $\mathbb{R}^n$ の開集合 $\Omega$ 上で定義された偏微分作用素とする. 簡単のため線型と仮定する. ここで $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ は $\alpha_i = 0, 1, 2, \cdots$ を成分とする重複指数,

(2) $$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$$

(3) $$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$

である. 次のことを仮定する.

(i) 超平面

(4) $$\Omega' = \{x \in \Omega ;\ x_n = 0\}$$

は非特性的である．すなわち

(5) $$a_{(0,\cdots,0,m)}(x',0)\neq 0,\quad x'\in\Omega'.$$

ここで $\Omega'$ は $R^{n-1}$ における開集合とも同一視する．

(ii) 係数

(6) $$a_\alpha(x)\in\mathcal{A}(\Omega).$$

但し $\mathcal{A}(\Omega)$ は $\Omega$ 上の実解析函数全体の空間を表わす．

このとき，次のことが結論される．

各 Cauchy data

(7) $$g_1(x'),\ \cdots,\ g_m(x')\in\mathcal{A}(\Omega')$$

と

(8) $$f(x)\in\mathcal{A}(\Omega)$$

に対して Cauchy 問題

(9) $$\partial_n^{\,j-1}u(x',0)=g_j(x'),\quad j=1,\cdots,m,$$

(10) $$P(x,\partial)u(x)=f(x)$$

は $\Omega$ における $\Omega'$ の近傍 $\Omega_1$ で定義された唯一つの解

(11) $$u(x)\in\mathcal{A}(\Omega_1)$$

をもつ.

これを実解析函数より広い函数族に対してなりたつように拡張したい. 具体的には次の函数族を考える.

$M_p$, $p=0,1,2,\cdots$, を正数列とする. $\Omega$ 上無限回可微分函数 $f(x)$ が <u>$(M_p)$ 族の超可微分函数</u> (<u>$\{M_p\}$ 族の超可微分函数</u>) とは, 任意のコンパクト集合 $K\subset\Omega$ と $h>0$ に対して定数 $C$ が存在し (定数 $h$ および $C$ が存在し)

$$(12) \qquad \sup_{x\in K}|\partial^\alpha f(x)| \leqq C h^{|\alpha|} M_{|\alpha|}, \quad |\alpha|=0,1,\cdots,$$

となることであると定義する.

以下 $*$ でもって $(M_p)$ または $\{M_p\}$ を表すこととし, $\mathcal{E}^*(\Omega)$ および $\mathcal{D}^*(\Omega)$ でもって, $\Omega$ 上の $*$ 族の超可微分函数全体の線型空間およびそのうちコンパクト台のもののなす線型部分空間を表す.

よく知られているように $\mathcal{E}^{\{p!\}}(\Omega)$ は $\mathcal{A}(\Omega)$ であり, $\Omega$ が連結ならば $\mathcal{E}^{(p!)}(\Omega)$ は整函数全体を $\Omega$ に制限したものと一致する. しかし, 超可微分という言葉は可微分と実解析函数の間の意味で使いたいので, $M_p$ に対して次の条件を課すことにする.

$$(\mathrm{M}.0) \qquad M_0 = M_1 = 1\ ;$$

(M. 1) $$M_p{}^2 \leqq M_{p-1} M_{p+1}, \quad p = 1, 2, \cdots;$$

(M. 2) $$M_p \leqq A H^p \min_{0 \leqq q \leqq p} M_q M_{p-q}, \quad p = 1, 2, \cdots;$$

(M. 3) $$\sum_{q=p}^{\infty} \frac{M_q}{M_{q+1}} \leqq A p \frac{M_p}{M_{p+1}}, \quad p = 1, 2, \cdots;$$

(M. 4) $$\left(\frac{M_p}{p!}\right)^2 \leqq \left(\frac{M_{p-1}}{(p-1)!}\right)\left(\frac{M_{p+1}}{(p+1)!}\right), \quad p = 1, 2, \cdots,$$

$p \to \infty$ のとき $p M_{p-1}/M_p \to 0$ かつ $M_{p+1} \leqq A H^p M_p$, $p = 0, 1, \cdots$.

以上の条件，特に(M. 4)の諸条件は他と独立ではないが，これは他の条件とは異る意味あいで使われるためである。

典型的な例は列

(13) $$M_p = (p!)^s, \quad s > 1,$$

であり，このときは $(M_p)$ および $\{M_p\}$ を略して $(s)$ および $\{s\}$ と書く。$\{s\}$ 族の超可微分函数は古典的な Gevrey 族の函数である。$(s)$ 族のは Hörmander らにより用いられている。

方程式の理論は対応する作用素の理論であり，線型方程式(10)の場合は作用素 $P(x, \partial)$ の像と核を決定することが最初の問題となる。Cauchy-Kowalevsky の定理は，すべて

が実解析的であるという条件の下で，これらの問題に理想的な解答を与えている．また，これからHolmgrenの一意性定理など重要な結果が導き出される．

周知のように常微分方程式に対しては対応する存在定理が $k$ 回連続可微分函数のカテゴリでもなりたち，常微分方程式論の基礎となっている．偏微分方程式に対しても解析性の条件をゆるめることができるかどうかは当然考えられるべき問題である．南雲道夫[6]とF. Trèves[7]は方程式およびデータの時間 $x_n$ に関する依存性は $k$ 回連続可微分でよいことを示した．常微分方程式の場合はこれ以外の変数はないから，これは常微分方程式に対する上の存在定理の拡張ともなっている．しかし，残念ながらこの拡張の有用な応用は知られていないようである．

ところで，(6)，(7)，(8)，(11)において単純に $\mathcal{A}$ を $\mathcal{E}^*$ におきかえた定理は成立しないことに注意する．例えば $P(x, \partial)$ が楕円型かつ係数 $a_\alpha(x)$ および $f(x)$ が実解析的ならば，すべての解 $u(x)$ は実解析的であることが知られている．したがってCauchyデータ $g_i(x)$ は実解析的でなければならない．

定理の結論が $\mathcal{A}$ を $\mathcal{E}^*$ におきかえて成立するとき，作用素 $P(x, \partial)$ は<u>$*$双曲型</u>であるという．$(s)$-双曲型およ

び{1/7}-双曲型であるための必要条件および十分条件はいろいろ知られている（例えば［3］をみよ）が，これらの条件は作用素 $P(x,\partial)$ が非常に限定されたものでなければならないことを示している．

しかし，定理の結論をゆるめるならば，次のように作用素の型にかかわりのない拡張がなりたつ．

定理 1. $*$ は $(M_p)$ または $\{M_p\}$ であるとし，$M_p$ は (M.0)–(M.4) をみたす正数列であるとする．$P(x,\partial)$ が係数 $a_\alpha(x)\in\mathcal{E}^*(\Omega)$ をもつ線型偏微分作用素であり，$\Omega'$ が非特性的であるならば，任意の Cauchy データ $g_i(x')\in\mathcal{E}^*(\Omega')$，$i=1,\cdots,m$，および $f(x)\in\mathcal{E}^*(\Omega)$ に対して (9) および

$$(14)\qquad \partial^\gamma\big(P(x,\partial)u(x)-f(x)\big)=0,\quad x\in\Omega',$$

がすべての重複指数 $\gamma$ に対してなりたつような $u(x)\in\mathcal{E}^*(\Omega)$ が存在する．

実解析的の場合は (14) は (10) と同等であることに注意する．証明も同様である．形式解を構成し，その後で係数を評価する．この目的のため次のような $\mathcal{E}^*(\Omega')$ を係数環とする $x_n$ に関する形式的巾級数の空間を導入する．

定義 1. $f_j(x')\in\mathcal{E}^*(\Omega')$ を係数とする $x_n$ に関する形式的巾級数

$$(15)\qquad f(x', \{\{x_n\}\}) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x') \frac{{x_n}^j}{j!}$$

が空間 $\mathcal{E}^{(M_p)}{}_{\Omega}(\Omega')$ （$\mathcal{E}^{\{M_p\}}{}_{\Omega}(\Omega')$）に属するとは，任意のコンパクト集合 $K' \subset \Omega'$ および $h > 0$ に対して定数 $C$ が存在し（定数 $h$ および $C$ が存在して）

$$(16)\qquad \sup_{x' \in K'} |\partial^{\alpha'} f_j(x')| \leq C h^{|\alpha'|+j} M_{|\alpha'|+j}$$

がすべての重複指数 $\alpha' = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})$ に対してなりたつことであると定義する．このとき，$f$ の台を

$$(17)\qquad \operatorname{supp} f = \overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} \operatorname{supp} f_j}$$

で定義する．コンパクト台をもつ元全体からなる $\mathcal{E}^*{}_{\Omega}(\Omega')$ の線型部分空間を $\mathcal{D}^*{}_{\Omega}(\Omega')$ と書く．

線型空間 $\mathcal{E}^*(\Omega)$，$\mathcal{D}^*(\Omega)$，$\mathcal{E}^*{}_{\Omega}(\Omega')$ および $\mathcal{D}^*{}_{\Omega}(\Omega')$ には自然な局所凸位相を与えることができ，$f \in \mathcal{E}^*(\Omega)$（$\mathcal{D}^*(\Omega)$）を

$$(18)\qquad \rho(f) = \sum_{j=0}^{\infty} \partial_n{}^j f(x', 0) \frac{{x_n}^j}{j!}$$

にうつす写像 $\rho$ はこれらの位相の下で連続な代数的準同型となる．次の補題は [2] で証明されている Whitney 型の拡張定理の特別な場合である．

補題1. $M_p$ が $(M.0)-(M.3)$ をみたすならば，制限写像

$$(19)\qquad \rho: \mathcal{E}^*(\Omega) \longrightarrow \mathcal{E}^*_\Omega(\Omega'),$$

$$(20)\qquad \rho: \mathcal{D}^*(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}^*_\Omega(\Omega')$$

は位相的全射である．

これを考慮すれば，定理1は次の $\mathcal{E}^*_\Omega(\Omega')$ に対する Cauchy-Kowalevsky の定理に帰着される．

定理2. $M_p$ が $(M.4)$ をみたすならば，

$$(21)\qquad \begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & \mathcal{E}^*_\Omega(\Omega')^P & \longrightarrow & \mathcal{E}^*_\Omega(\Omega') & \xrightarrow{P(x,\partial)} & \mathcal{E}^*_\Omega(\Omega') \longrightarrow 0 \\ & \cong & \swarrow_{\Gamma_m} & & & \\ & \mathcal{E}^*(\Omega')^m & & & & \end{array}$$

は局所凸空間の分裂位相的完全列になる．ここで $\mathcal{E}^*_\Omega(\Omega')^P$ は $Pu=0$ の解 $u \in \mathcal{E}^*_\Omega(\Omega')$ 全体のなす線型部分空間を表し，$\Gamma_m$ は初期値をとる写像 $\sum u_j(x')x_n{}^j/j! \longmapsto (u_{j-1}(x'))_{j=1,\cdots,m}$ である．

このとき，$u \in \mathcal{E}^*_\Omega(\Omega')$ に対し

$$(22)\qquad \operatorname{supp} u = \operatorname{supp} Pu \cup \operatorname{supp} \Gamma_m u$$

がなりたち，(21) においてすべての $\mathcal{E}^*$ を $\mathcal{D}^*$ におきか

えたものも局所凸空間の分裂位相的完全列になる．

いいかえれば，$g_1(x'), \cdots, g_m(x') \in \mathcal{E}^*(\Omega')$ および $f(x', \langle\langle x_n\rangle\rangle) \in \mathcal{E}^*_\Omega(\Omega')$ がよえられたとき，

(23) $$u_j(x') = g_{j-1}(x'), \quad j = 0, 1, \cdots, m-1,$$

および

(24) $$P(x, \partial)u(x', \langle\langle x_n\rangle\rangle) = f(x', \langle\langle x_n\rangle\rangle)$$

をみたす $u(x', \langle\langle x_n\rangle\rangle) \in \mathcal{E}^*_\Omega(\Omega')$ が唯一つ存在し，対応 $u \longleftrightarrow (g_1, \cdots, g_m ; f)$ は位相的であると共に台を保つ．$\mathcal{E}^*$ を $\mathcal{D}^*$ におきかえても同様である．

$\Omega'$ は非特性的であるから，(24) は

(25) $$\partial_n^m u(x', \langle\langle x_n\rangle\rangle) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ \alpha_n < m}} b_\alpha(x, \langle\langle x_n\rangle\rangle)\partial^\alpha u(x', \langle\langle x_n\rangle\rangle) + g(x', \langle\langle x_n\rangle\rangle)$$

と同等になる．但し $b_\alpha = \rho(-a_\alpha / a_{(0,\cdots,0,m)})$，$g = f\cdot\rho(1/a_{(0,\cdots,0,m)})$ である．

$u$ の係数 $u_j(x')$ のうち最初の $m$ 個は (23) でよえられる．その後のものは (25) および (25) を $x_n$ に関して形式的に微分して得られる等式により帰納的に唯一つ決定される．こうして $u_j(x')$ を定めるにはデータを微分するか函数を掛ける操作が必要なだけであるから $\operatorname{supp} u \subset \operatorname{supp} g_1$

$\cup \cdots \cup \operatorname{supp} g_m \cup \operatorname{supp} f$ がわかる．反対の包含関係は明らかである．

最後に $u$ が (16) をみたすことおよび $g_i(x')$, $f(x', \{\{x_n\}\})$ に $u(x', \{\{x_n\}\})$ を対応させる写像が連続であることは，古典的な場合と同様優級数の方法で証明することができる．大体は古典的な評価で優級数 $(1-t)^{-1} = \sum_{p=0}^{\infty} p!\, t^p/p!$ があらわれるところを $\sum_{p=0}^{\infty} M_p t^p/p!$ でおきかえればよい．

## §2 超平面に台のある超分布の割算定理

定義 2. 局所凸空間 $\mathcal{D}^*(\Omega)$ 上の連続線型汎函数を $*$ 族の超分布（ultradistribution）といい，$\Omega$ 上の $*$ 族の超分布全体の空間を $\mathcal{D}^{*\prime}(\Omega)$ と書く．$\mathcal{D}^{*\prime}(\Omega)$ には $\mathcal{D}^*(\Omega)$ の双対空間としての強位相を与える．

$\Omega_1$ が $\Omega$ の開部分集合であるとき，超分布の定義域の制限写像 $\mathcal{D}^{*\prime}(\Omega) \to \mathcal{D}^{*\prime}(\Omega_1)$ を連続な埋込み写像 $\mathcal{D}^*(\Omega_1) \to \mathcal{D}^*(\Omega)$ の双対写像として定義する．任意の開被覆に対しそれに従属する 1 の分割が $\mathcal{D}^*(\Omega)$ の函数で構成できることから，超分布は上で定義した制限写像の下で層をなすことが導かれる．特に超分布の台が定義できる．$\mathcal{E}^*(\Omega)$ の双対空間 $\mathcal{E}^{*\prime}(\Omega)$ は $\mathcal{D}^{*\prime}(\Omega)$ のコンパクト台をもつ元全体のなす部分空間と自然に同一視される．

$\Omega'$ の中に台のある超分布の空間を

$$(26) \qquad \mathcal{D}^{*\prime}_{\Omega'}(\Omega) = \{ f \in \mathcal{D}^{*\prime}(\Omega) ; \ \mathrm{supp}\, f \subset \Omega' \},$$

$\mathcal{E}^{*\prime}_{\Omega'}(\Omega) = \mathcal{E}^{*\prime}(\Omega) \cap \mathcal{D}^{*\prime}_{\Omega'}(\Omega)$ と書く．このとき，[2] で証明された部分多様体に台のある超分布の構造定理の特別な場合として次の補題が成立する．

<u>補題 2</u>．$M_p$ <u>が</u> (M.0)－(M.3) <u>をみたすならば</u>，$\mathcal{D}^{*\prime}(\Omega)$ <u>の閉線型部分空間</u> $\mathcal{D}^{*\prime}_{\Omega'}(\Omega)$ （$\mathcal{E}^{*\prime}(\Omega)$ <u>の閉線型部分空間</u> $\mathcal{E}^{*\prime}_{\Omega'}(\Omega)$） <u>は</u> $\mathcal{D}^{*}_{\Omega}(\Omega')$ （$\mathcal{E}^{*}_{\Omega}(\Omega')$） <u>の強双対空間と自然に同型である</u>．

分布の場合と同様，線型微分作用素

$$(27) \qquad Q(x, \partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} b_\alpha(x)\, \partial^\alpha$$

の $\mathcal{D}^{*\prime}(\Omega)$ における作用を形式的双対作用素 $Q'(x, \partial) : \mathcal{D}^{*}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}^{*}(\Omega)$ の双対作用素として定義する．但し，係数 $b_\alpha(x) \in \mathcal{E}^{*}(\Omega)$ と仮定し，

$$(28) \qquad Q'(x, \partial)\varphi(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (b_\alpha(x)\varphi(x)).$$

定理 2 の作用素 $P(x, \partial)$ と $Q(x, \partial)$ が互に形式的双対になっているとする．そのとき，補題 2 を用いて定理 2 の双対をとれば次の定理が得られる．

定理3. $M_p$ が (M.0)−(M.4) をみたすならば，

$$
\begin{array}{lc}
 & 0 \leftarrow (\mathcal{D}^*(\Omega)^{\ell})' \longleftarrow \mathcal{D}^{*\prime}_{\Omega'}(\Omega) \xleftarrow{Q(x,\partial)} \mathcal{D}^{*\prime}_{\Omega'}(\Omega) \leftarrow 0 \\
(29) & \quad\ \ \cong \qquad \nearrow \Gamma'_m \\
 & \mathcal{D}^{*\prime}(\Omega')^m
\end{array}
$$

は局所凸空間の分裂位相的完全列になる．ここで $(\mathcal{D}^*(\Omega)^{\ell})'$ は $\mathcal{D}^*(\Omega)^{\ell}$ の強双対空間であり，$\Gamma'_m$ は $(v_j(x'))_{j=0,\cdots,m-1}$ に対し $\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j v_j(x')\otimes\delta^{(j)}(x_n)$ を対応させる写像である．

また，(29) において $\mathcal{D}^*$ をすべて $\mathcal{E}^*$ におきかえたものも局所凸空間の分裂位相的完全列になる．

すなわち，任意の $u\in\mathcal{D}^{*\prime}_{\Omega'}(\Omega)$ $(\mathcal{E}^{*\prime}_{\Omega'}(\Omega))$ に対し

$$
(30)\qquad u(x) = Q(x,\partial)w(x) + v_0(x')\otimes\delta(x_n) + \cdots + v_{m-1}(x')\otimes\delta^{(m-1)}(x_n)
$$

となる $w(x)\in\mathcal{D}^{*\prime}_{\Omega'}(\Omega)$ $(\mathcal{E}^{*\prime}_{\Omega'}(\Omega))$ と $v_0(x'),\cdots,v_{m-1}(x')\in\mathcal{D}^{*\prime}(\Omega')$ $(\mathcal{E}^{*\prime}(\Omega'))$ が唯一通り存在し，$u\longleftrightarrow(w, v_0,\cdots,v_{m-1})$ の対応は位相的かつ台を保つ．これは $u(x)$ を微分作用素 $Q(x,\partial)$ で割算したときの商が $w(x)$，かつ余りが $v_0(x')\otimes\delta(x_n)+\cdots+v_{m-1}(x')\otimes\delta^{(m-1)}(x_n)$ であると解釈することができる．

定理2と3は同等であって，定理3の双対をとれば逆に定

理2が得られる．

## §3 同次超分布解の境界値

$v(x)\in\mathcal{D}^{*\prime}(\Omega_+)$ を $\Omega$ の上半部分 $\Omega_+=\{x\in\Omega;\ x_n>0\}$ における同次方程式

$$Q(x,\partial)v(x)=0 \tag{31}$$

の解とする．$v$ は $\Omega'$ をこえて超分布 $\tilde{v}(x)\in\mathcal{D}^{*\prime}(\Omega)$ に接続できると仮定する．このとき，[1] の超分布の構造定理を用いれば，下半部分 $\Omega_-=\{x\in\Omega,\ x_n<0\}$ で消える拡張 $\tilde{v}$ が存在することがわかる．そうすれば $Q(x,\partial)\tilde{v}(x)\in\mathcal{D}^{*\prime}_{\Omega'}(\Omega)$ であるから，定理3により

$$Q(x,\partial)\bigl(\tilde{v}(x)-w(x)\bigr)=v_0(x')\otimes\delta(x_n)+\cdots+v_{m-1}(x')\otimes\delta^{(m-1)}(x_n) \tag{32}$$

となる $v_0(x'),\cdots,v_{m-1}(x')\in\mathcal{D}^{*\prime}(\Omega')$ および $w(x)\in\mathcal{D}^{*\prime}_{\Omega'}(\Omega)$ が唯一通り存在する．

$v(x)$ の拡張 $\tilde{v}(x)$ をとりかえても $w(x)$ がかわるだけであるから，$v_0(x'),\cdots,v_{m-1}(x')$ は解 $v(x)$ のみによって定まる．これらは $v(x)$ の境界値の意味をもつ．実際もし $v$ が $x_n$ に関して滑らかであり Heaviside 函数 $\theta(x_n)$ との積に意味があるとすれば，局所的に定式化した Green の公

式

$$Q(x,\partial)(\theta(x_n)v(x)) = \theta(x_n)Q(x,\partial)v(x) \tag{33}$$
$$+\sum_{i=0}^{m-1} B_i(x,\partial)v(x)\Big|_{x_n=0} \otimes \delta^{(i)}(x_n)$$

により

$$v_i(x') = B_i(x,\partial)v(x)\Big|_{x_n=0} \tag{34}$$

を得る.

$\Omega'$ が非特性的であることを用いれば, $\Omega'$ 上の微分作用素 $A_{ji}(x',\partial')$ が存在して, $j=0, 1, \cdots, m-1$ に対し

$$\partial_n^j v(x',0) = \sum_{i=0}^{m-1} A_{ji}(x',\partial')B_i(x,\partial)v(x)\Big|_{x_n=0} \tag{35}$$

となることもわかる. そこで, 一般の場合も

$$\partial_n^j v(x',+0) = \sum_{i=0}^{m-1} A_{ji}(x',\partial')v_j(x') \tag{36}$$

によって解 $v \in \mathcal{D}^{*\prime}(\Omega_+)$ の境界値 $\partial_n^j v(x',+0)$, $j=0, \cdots, m-1$ を定義する.

$Q(x,\partial)$ の係数が実解析的であるとき, ここで定義した境界値は [5] で定義した超函数としての境界値と同じである. 係数が実解析的でないときも, 係数の正則性が許すかぎりの境界値は族 $*$ のとり方によらず, 解 $v$ のみによって定まる.

$v(x)$ の接続可能性については次の判定条件がある([4]).

補題3. $\Omega_+$ 上の可測函数 $v(x)$ は, もし任意のコンパクト集合 $K' \subset \Omega'$ に対して定数 $L$ および $C$ が存在し(さらに任意の $L>0$ に対して定数 $C$ が存在し)

$$(37) \qquad \sup_{x' \in K'} |v(x', x_n)| \leqq C \exp M^*(L/x_n)$$

となるならば, 超分布 $\tilde{v} \in \mathcal{D}^{(M_p)'}(\Omega)$ $(\mathcal{D}^{\{M_p\}'}(\Omega))$ に拡張することができる. 但し

$$(38) \qquad M^*(\rho) = \sup_p \log\left(\frac{\rho^p p!}{M_p}\right).$$

$M_p = p!^s$ のときは $M^*(\rho)$ は $\rho^{1/(s-1)}$ の大きさである.

定理4. $Q(x, \partial)$ を $a(\Omega)$ の元を係数とする $m$ 階の楕円型線型偏微分作用素とする. このとき, $\Omega_+$ における(31)の解 $v(x)$ が $\mathcal{D}^{*\prime}(\Omega')$ に属する境界値 $\partial_n{}^j v(x', +0)$, $j=0, \cdots, m-1$, をもつための必要十分条件は $v(x)$ が補題3の判定条件をみたすことである. この場合, $\partial_n{}^j v(x', x_n)$ は $x_n \longrightarrow 0$ のとき $\mathcal{D}^{*\prime}(\Omega')$ の位相で $\partial_n{}^j v(x', +0)$ に収束する.

十分であることは上の議論より明らかである. 必要性は $Q(x, \partial)$ の基本解を具体的に構成することにより証明される.

特に $Q(x,\partial)$ が1変数の Cauchy-Riemann 作用素であるときの定理4は，超函数が＊族の超分布であるための必要十分条件を定義函数である整型函数の変数の虚部が0に近づくときの増大度によって与えたものになっている．この場合の定理4の証明は [1], [4] にある．

## 引用文献


[1] H. Komatsu, Ultradistributions, I, Structure theorems and a characterization, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA 20 (1973), 25-105.

[2] H. Komatsu, Ultradistributions, II, The kernel theorem and ultradistributions with support in a submanifold, Ibid., 24 (1977), 607-628.

[3] H. Komatsu, Irregularity of characteristic elements and hyperbolicity, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 12 Suppl. (1977), 233-245.

[4] 小松彦三郎，超関数論入門，岩波講座基礎数学解析学(II) ix，岩波，1978.

[5] H. Komatsu - T. Kawai, Boundary values

of hyperfunction solutions of linear partial differential equations, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 7 (1971), 95–104.

[6] M. Nagumo, Über das Anfangswertproblem partialler Differentialgleichungen, Jap. J. Math, 18 (1942), 41–47.

[7] F. Trèves, Ovcyannikov theorem and Hyperdifferential Operators, Notas de Mat. No 46, Inst. Mat. Pura Apl. Rio de Janeiro, 1968.