数理解析研究所講究録
第337巻 1978年 235-242

Multiplicity のある Cauchy 問題

北大 理学部 山本和広

$\Omega = [0,T] \times \mathbb{R}^n$ とし，次のような作用素 $P(t,x,D_t,D_x)$ に対する Cauchy 問題を考える。

$$P(t,x,D_t,D_x) = D_t^m + \sum_{\substack{|\alpha|\le m \\ \alpha_0<m}} a_\alpha(t,x) D_t^{\alpha_0} D_x^{\alpha'} .$$

ここで $a_\alpha(t,x) \in \mathcal{B}^\infty(\Omega)$ とし $\alpha = (\alpha_0, \alpha')$，$D_x = -i\partial/\partial x$。

本稿においてはエネルギー不等式により，2つの型の作用素に対する Cauchy 問題の一意可解性を示す。

はじめに次の3つの条件を満たす方程式を考える。

(A.1) $$P_m(t,x,\tau,\xi) = \prod_{j=1}^{s} \left((\tau-\lambda_j)^{m_j}(\tau-\lambda_{s+j})\right) \prod_{j=2s+1}^{m-N+s} (\tau-\lambda_j)$$

ここで $N = \sum_{j=1}^{s} m_j$，$\lambda_j(t,x,\xi)$ は実で，$\in \mathcal{B}(\Omega \times S^{n-1})$ if $|\xi|=1$

(A.2) $\forall (i,j) \neq (k, s+k)$ $(k=1,\cdots,s)$ に対して

$$|(\lambda_i - \lambda_j)(t,x,\xi)| \ge \delta|\xi| .$$

(A.3) $\forall k$ $(k=1,\cdots,s)$ に対して $P(t,x,D_t,D_x)$ は次のように書ける。

$$P(t,x,D_t,D_x) = \sum_{l=0}^{m_k} Q_{k,l} (\Lambda_k)^{m_k-l} (t,x,D_t,D_x)$$

ここで $\Lambda_k = D_t - \lambda_k(t,x,D_x)$, $Q_{k,l}(t,x,D_t,D_x)$ は $(m-m_k)$ 階の擬微分作用素、でかつ主表象 $g_{k,l}(t,x,\tau,\xi)$ は次の条件を満たす。

$$g_{k,l}|_{\tau=\lambda_k} \equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\ t^{-l}(\lambda_k - \lambda_{s+k})$$

定理1. 条件 (A.1) ～ (A.3) を満たす微分方程式に対する Cauchy 問題は $C^\infty([0,T];H_\infty(R^n))$ で一意可解である。

本講演では定理1の拡張である次のような条件を満たす作用素の Cauchy 問題に対する一意可解性について主に話した。

以下簡単の為 $P_m(t,x,\tau,\xi)$ は $|x|$ 十分大きい所で x に indep. と仮定する。

(H.1) $$P_m(t,x,\tau,\xi) = \prod_{j=1}^{m} (\tau - \lambda_j(t,x,\xi))$$

ここで $\lambda_j(t,x,\xi)$ は実かつ $|\xi|=1$ の時 $\mathcal{B}(\Omega\times S^{n-1})$ の元とする。

(H.2) $\forall (i,j)$ $(i,j=1,\cdots,m)$ に対して

$$\{\tau-\lambda_j, \tau-\lambda_i\}(t,x,\xi) \equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\ t^{-1}(\lambda_i - \lambda_j)$$

ここで $\{\ ,\ \}$ は Poisson bracket を示す。

(H.3) $P(t, x, D_t, D_x)$ は次のように書ける。

$$P = \Lambda_1 \cdots \Lambda_m + \sum_{0 \le k < m} t^{-(m-k)} \gamma_{i_1 \cdots i_k} \Lambda_{i_1} \cdots \Lambda_{i_k} + P_{m-r}(t, x, D_t, D_x) ,$$

ここで r は特性根 $\{\lambda_i\}_{i=1,\cdots,m}$ の $\Omega \times S^{n-1}$ における最大の多重度を示し，P_{m-r} は $(m-r)$ 階の t に関しては微分作用素となっているような擬微分作用素である。$\{i_1, \cdots, i_k\} = \phi$ ならば $k=0$，$\Lambda_{i_1} \cdots \Lambda_{i_k} = I$ とする。

定理2. 条件 (H.1) ～ (H.3) を満たす方程式に対する Cauchy 問題は $C^\infty([0,T]; H_\infty(R^n))$ で一意可解的である。

以下定理2の略証を示す。初めに条件 (A.3) と条件 (H.3) の関係を与える次の命題を述べる。

命題1. $J = \{j_1, \cdots, j_k\}$ を $\{1, \cdots, m\}$ の部分集合とし $\{\lambda_j\}_{j \in J}$ の $\Omega \times S^{n-1}$ における最大の multiplicity を r_1 とする。今 $A(t, x, D_t, D_x)$ を $k - r_1$ 階の t に関しては微分作用素となっている擬微分作用素とする時

$$A(t, x, D_t, D_x) = \sum_{\ell=0}^{k-r_1} \gamma_{j_1 \cdots j_\ell} \Lambda_{j_1} \cdots \Lambda_{j_\ell} ,$$

ここで $\gamma_{j_1 \cdots j_\ell}(t, x, D_x)$ は 0 階で $\{j_1, \cdots, j_\ell\} \subset J$。

命題1は次のような2つの系を持つ。

（系1）　P が (A.1), (A.2), (A.3) を満たせば，(H.3) を $r = \max_{1\le j\le s} m_j + 1$ として満たす。

（系2）　P が (H.1)～(H.3) を満たせば P は次のように表現される。

$$P = \Lambda_1 \cdots \Lambda_m + \sum_{0\le k<m} t^{-(m-k)} \gamma_{i_1\cdots i_k} \Lambda_{i_1} \cdots \Lambda_{i_k}$$

上の系2において $\gamma_{i_1\cdots i_k}$ の自由度については次の補題による。これは (H.2) より導かれる。

補題1．$\{i_1, \cdots, i_m\}$ を $\{1, \cdots, m\}$ の permutation とする。この時

$$\Lambda_{i_1} \cdots \Lambda_{i_m} = \Lambda_1 \cdots \Lambda_m + \sum_{0\le k<m} t^{-(m-k)} \tilde{\gamma}_{i_1\cdots i_k} \Lambda_{i_1} \cdots \Lambda_{i_k}$$

ここで $\tilde{\gamma}_{i_1\cdots i_k}$ は 0 階で $\{i_1 \cdots i_k\} \subset \{1, \cdots, m\}$

1）エネルギー不等式

我々は次のような函数空間を用いる。$k \ge 0$ 整数，$s \in \mathbb{R}$ に対して

$$|||u(t)|||^2_{k,s} = \sum_{j=0}^{k} \|D_t^j u(t)\|^2_{s+k-j}$$

$$\|u\|_{k,s}^2 = \int_0^T |||u(t)|||_{k,s}^2\,dt$$

ここで $\|\cdot\|_s$ は Sobolev space $H_s(\mathbb{R}^n)$ のノルムを示す。

定理3, $P(t,x,D_t,D_x)$ が (H.1)〜(H.3) を満たせば $Pu=f$, $D_t^j u|_{t=0}=g_j$ $(j=0,\cdots,m-1)$ とし, $u\in C^\infty([0,T];H_\infty(\mathbb{R}^n))$ に対して次のエネルギー不等式が成りたつ。$^\forall k\geq 0$ 整数と $^\forall s\in\mathbb{R}$ に対して $N=N(k,s)$ が存在して,

$$(*)\qquad |||u(t)|||_{k+m-r,s}^2 \leq C\Big\{\sum_{j=0}^{m-1}\|g_j\|_{s+k+m+N-j}^2 + |||f(0)|||_{N-m,k+s+m}^2 + \int_0^t |||D_\tau^{N-m}f(\tau)|||_{k,s}^2\,d\tau\Big\}.$$

(証明); $I=(i_1,\cdots,i_\ell)\subset\{1,\cdots,m\}$ と書き, 長さを $|I|=\ell$ と記す。

$$(A_I v)(t,x) = t^{-(m-\ell)}\Lambda_{i_1}\cdots\Lambda_{i_\ell}v(t,x)$$

と定め, $I=\phi$ ならば $|I|=0$, $A_I=t^{-m}$ とする。

$I'=(i_0,I)\subset\{1,\cdots,m\}$ とした時

$$\Lambda_{i_0}(A_I v) = -(m-k)t^{-1}(A_I v) + t^{-1}(A_{I'}v)\;。$$

Λ_{i_0} は1階の双曲型であるから, $\Phi_I(t)=\sum_{j=0}^{k}\left(|||A_I v(t)|||_{k-j,s}^2/t^{2j+1}\right)$ とすれば,

$$(*)_I\qquad t(\partial\Phi_I/\partial t) \leq C\{\Phi_I(t) + t\,\Phi_I(t) + \Phi_{I'}(t)\}$$

今 $(*)_2$ を $|I|=0$ から $|I|=m-1$ まで加えて，$|I|=m$ に対して示えと補題1を用いれば

(**) $\quad t(\partial\Phi/\partial t) \le C\{\Phi(t) + t\Phi(t) + t^{-2k-1}|||PU|||^2_{k,s}\}$

を得る。但しここで

$$\Phi(t) = \sum_{|I|\le m-1}\Phi_I(t) \quad 。$$

十分大きい N に対して $U(t,x) = O(t^{N+1})$ であれば

(**) より

$$\sum_{|I|\le m-1} |||t^{-(m-\ell)}\Lambda_{i_1}\cdots\Lambda_{i_\ell}U(t)|||^2_{k,s} \le C\int_0^t \tau^{-N_1}|||PU(\tau)|||^2_{k,s}\,d\tau$$

左辺に命題1，右辺に Taylor 展開を施こすと，

(***) $\quad |||U(t)|||^2_{k+m-r,s} \le C\int_0^t |||D_\tau^{N-m}(PU)(\tau)|||^2_{k,s}\,d\tau$

を得る。今 $U(t,x) = u(t,x) - \sum_{j=0}^{N}(it)^j(D_t^j u)(0,x)/j!$

とすると (***) より Energy 不等式 (*) を得る。（終）

2）存在定理

簡単な計算より P が (H.1)〜(H.3) を満たせば，

$P^*(t,x,D_t,D_x)$ も (H.1)〜(H.3) を満たす。

（命題2）

P が (H.1)〜(H.3) を満たす時 $^\forall k \ge m-1$，整数

${}^{\forall}s \in \mathbb{R}$ に対して ${}^{\exists}N = N(s, k)$ 次の不等式を満たす。

$$(*) \qquad \| v \|^2_{k, s-N} \leq C \| P^* v \|^2_{k+N, s-N}$$

ここで $v \in C^\infty([0, T]; H_\infty(\mathbb{R}^n))$，$\mathrm{supp}\, v \subset (-\infty, T] \times \mathbb{R}^n$。

（証明）；定理3と同じ記号を用いると，

$$-t(\partial\Phi/\partial t) \leq C\{\Phi(t) + t\Phi(t) + t^{-2k-1} ||| P^* v |||^2_{k,s}\}$$

従って良く知られた不等式より

$$(**) \qquad t^{N_1} ||| v(t) |||^2_{k,s} \leq C \int_t^T \tau^{N_1 - 1 - 2k} ||| P^* v(\tau) |||^2_{k,s} d\tau$$

部分積分及び P^* が t 方向に non-characteristic であると言う事実より導びかれる不等式

$$\int_0^T ||| v(t) |||^2_{k,s} dt \leq C \int_0^T t^{2N} ||| D_t^N v(t) |||^2_{k,s} dt$$

$$||| D_t^N v(t) |||^2_{k,s} \leq C(||| v(t) |||^2_{k, s+N} + ||| P^* v(t) |||^2_{k+N-1, s}),$$

，ここで N は s, k に indep. な任意の整数，を用いると

$(**)$ より $(*)$ が従う。　　　　（終）

$H_{k,s}(\Omega)$ を norm $\| \cdot \|_{k,s}$ で完備な空間とすると，$T = \infty$，i.e.，$\Omega = \overline{\mathbb{R}^+_{n+1}}$ の時 ${}^{\forall}k, s \in \mathbb{R}$ に対して $H_{k,s}(\overline{\mathbb{R}^+_{n+1}})$ は定義されて

$$(H_{k,s}(\overline{\mathbb{R}}^+_{n+1}))' = \mathring{H}_{-k,-s}(\overline{\mathbb{R}}^+_{n+1}) \qquad (\text{see } [1])$$

今 $f \in C^\infty([0,T]; H_\infty(\mathbb{R}^n))$ に対して 命題より

$$|(f, v)| \leq C \|P^* v\|_{N, s-N} \qquad (k=0)$$

が出る。従って $\exists\, u \in H_{-N,-s+N}(\overline{\mathbb{R}}^+_{n+1})$ の元があって

$$(*) \qquad (f, v) = (u, P^* v) \qquad \operatorname{supp} v \subset (-\infty, T] \times \mathbb{R}^n$$

$Pu = f$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ より $\forall k \in \mathbb{R}$ に対して $u \in H_{k,-s-k}(\Omega)$ が従がわる (see [1]) から (*) より

$$Pu = f \qquad D_t^j u|_{t=0} = 0 \qquad (j = 0, \cdots, m-1)$$

を得る。 (終)

3) example

$$P = (D_t - t^\ell x^n D_x)^2 (D_t + t^\ell x^n D_x)^2 + P_3(t, x, D_t, D_x)$$

[2] によれば必要条件として

$$P_3 = (a D_t + b D_x)(D_t - t^\ell x^n D_x)(D_t + t^\ell x^n D_x)$$
$$+ c D_t^2 + d D_t D_x + e D_x^2 + f D_t + g D_x + h$$

で, $b = t^{\ell-1} x^n b'$, $d = t^{\ell-2} x^n d'$, $e = t^{2(\ell-2)} x^{2n} e'$, $g = t^{\ell-3} x^n g'$ となり我々の条件 (H.3) を満たす。

[1] L. Hörmander ; Linear partial differential operators, Springer

[2] V. Ia. Ivrii and V.M. Petkov ; Necessary conditions for the correctness of ···· . Usp. Mat. Nauk 29, 3-70.