数理解析研究所講究録
第337巻 1978年 243-260



# 擬微分作用素における近似定理と$L^p$-有界性

阪大 教養　　長瀬道弘

0, 序論, 擬微分作用素の理論は今まで多くの人々によって研究されているが, そのほとんどが$C^\infty$-級の滑らかさを持つ表象を持つものを扱っている。更に$C^\infty$-級の表象が扱われていない場合でも, 例えば擬微分作用素の$L^2$-又は$L^p$-有界性を示すためには, 表象が変数x方向にもξ方向にも, 変数の次元nに関係した微分可能性を持つことが要求されている([1],[3],[4],[5],[6],[7],[8],[9])。表象の微分可能性とくに変数xに関する微分可能性をできるだけ少くして, 擬微分作用素を論ずることは, それ自身興味のあることであるしまた応用上も大切な意味を持つように思われる。

この稿では, 空間変数xに関する滑らかさが少い表象を持つ擬微分作用素を扱う一つの方法として, 擬微分作用素の表象に関する近似定理を述べる。近似定理で今までによく知られたものとしては, Sharp Gårding の不等式を示すために用

いられたFriedrichs近似に関する定理がある([7]参照)。Friedrichs近似が表象の$\xi$方向に関する軟化子を用いる近似であるのに対して，この稿における近似は$x$方向に関する軟化子を用いている。この近似の応用は，今までにいくつか考えられている([10],[12],[13])が，この稿ではとくに有界連続な表象を持つ擬微分作用素の$L^2$−有界性について述べる。L. Nirenbergが，"表象$p(x,\xi)$が任意の$\alpha$に対して

$$(*) \quad |\partial_\xi^\alpha p(x,\xi)| \leqq C_\alpha \langle\xi\rangle^{-|\alpha|}$$

をみたすならば，$p(X,D_x)$は$L^2$−有界であるか？"という問題を提起した。これに対して，Kumano-go [6]，Hörmander [4]，Chin-Hung Ching [2] 等によって$L^2$−有界でない擬微分作用素の例が与えられ，とくにChin-Hung Ching [2] は$S^0_{1,1}$に属する表象を持つが$L^2$−有界とはならない作用素の例を構成した。従ってNirenbergの条件(*)は，作用素が$L^2$−有界となるためには，それだけでは十分条件ではない。本稿で述べる$L^2$−有界性定理は「上の(*)の他に，"$p(x,\xi)$が変数$x$についてのHölder連続性を持てば，"作用素$p(X,D_x)$が$L^2$−有界となる」ことを主張するものである。従って，Nirenbergの問題は，ほぼ完全に解けたといえる。更に，Muramatu [11]は，別な方法でこの稿と同じ$L^2$−有界性定理が成り立つことを示した。

## 1，近似定理，

本稿では次の記号を用いる。$\mathcal{S}=\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ は $\mathbb{R}^n$ で定義された急減少関数の作る Schwartz 空間とし $\mathcal{B}^0=\mathcal{B}^0(\mathbb{R}^n)$ は $\mathbb{R}^n$ 上の有界連続関数の全体を表わすとする。$m,\rho,\delta$ は実数で $0\leqq\delta<\rho\leqq 1$ であるとする。このとき記号 $S^m_{\rho,\delta}$ は次の不等式をみたす $\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_\xi$ 上の関数 $p(x,\xi)$ の全体とする。

$$(1.1)\qquad |p^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi)|\leqq C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}$$

但し、$\alpha,\beta$ は任意の多重指数，$\langle\xi\rangle=(1+|\xi|^2)^{1/2}$，$p^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi)=\partial^\alpha_\xi D^\beta_x p(x,\xi)=(-i)^{|\beta|}\partial^\alpha_\xi\partial^\beta_x p(x,\xi)$ とする。本稿ではとくに $\rho=1$ の場合を扱う。$\tau>0$ に対し $\dot{\tau}=\tau-[\tau]$ とおく。このとき $\mathcal{B}^\tau=\mathcal{B}^\tau(\mathbb{R}^n)$ は次の性質をみたす $\mathbb{R}^n$ 上の関数 $u(x)$ の全体を表わすとする。

$$(1.2)\qquad |u|_\tau=\sum_{|\alpha|\leqq[\tau]}\sup_x|\partial^\alpha_x u(x)|+\sum_{|\alpha|=[\tau]}\sup\{|(u^{(\alpha)}(x)-u^{(\alpha)}(y))|/|x-y|^{\dot{\tau}}\}<\infty$$

但し $u^{(\alpha)}(x)=\partial^\alpha_x u(x)$ とする。

補題 1． $s$ は実数とし $\psi\in\mathcal{S}$ とする。このとき

$$(1.3)\qquad \partial^\alpha_\xi\{\psi(\langle\xi\rangle^\delta z)\langle\xi\rangle^s\}=\sum_{|\alpha'|\leqq|\alpha|}\psi_{s,\alpha,\alpha'}(\xi)\langle\xi\rangle^s\{\langle\xi\rangle^\delta z\}^{\alpha'}\psi^{(\alpha')}(\langle\xi\rangle^\delta z)$$

と書ける。但し $\psi_{s,\alpha,\alpha'}(\xi)\in S^{-|\alpha|}_{1,0}$ である。ここで $\eta\in\mathbb{R}^n$ に対し $\eta^{\alpha'}=\eta_1^{\alpha'_1}\cdots\eta_n^{\alpha'_n}$ であるとする。

この補題の証明は $|\alpha|$ に関する帰納法を用いて行われる。

$\gamma(x)\in\mathcal{S}$ を $\int\gamma(x)\,dx=1$，$\int x^\alpha\gamma(x)\,dx=0\quad(\alpha\neq 0)$ となるようにとり固定する。このような $\gamma(x)$ は次のようにして，

作れる。 すなわち $\tilde{\gamma}(\xi) \in \mathcal{S}$ を $\xi = 0$ の近傍で $\tilde{\gamma}(\xi) = 1$ となるようにとり $\gamma(x) = \int e^{ix\cdot\xi}\tilde{\gamma}(\xi)\,d\xi$ とおけばよい。

$a(x) \in \mathcal{B}^{\tau}(\mathbb{R}^n)$ $(\tau \geqq 0)$ に対し

$$
\begin{aligned}
(1.4)\quad \tilde{a}(x,\xi) &= \int a(y)\,\gamma(\langle\xi\rangle^{\delta}(x-y))\,dy\,\langle\xi\rangle^{\delta n} \\
&= \int a(x-y)\,\gamma(\langle\xi\rangle^{\delta}y)\,dy\,\langle\xi\rangle^{\delta n} \\
&= \int a(x-\langle\xi\rangle^{-\delta}y)\,\gamma(y)\,dy
\end{aligned}
$$

とおく。 このとき次の定理が成り立つ。

定理 2. (i) $\tilde{a}(x,\xi) \in S^{0}_{1,\delta}$

(ii) $|\beta| \leqq [\tau]$ に対しても $\tilde{a}_{(\beta)}(x,\xi) \in S^{0}_{1,\delta}$

(iii) $|\beta| \geqq [\tau]+1$ のとき $\tilde{a}_{(\beta)}(x,\xi) \in S^{\delta(|\beta|-\tau)}_{1,\delta}$

(iv) $\tilde{b}(x,\xi) = a(x) - \tilde{a}(x,\xi)$ とおくと次の不等式が成り立つ。

$$
|\tilde{b}^{(\alpha)}(x,\xi)| \leqq C_{\alpha}\,|a|_{\tau}\,\langle\xi\rangle^{-|\alpha|-\tau\delta}
$$

証明. $\tilde{a}(x,\xi)$ の定義式の2番目を用いると $|\beta| \leqq [\tau]$ のとき

$$
\begin{aligned}
\tilde{a}_{(\beta)}(x,\xi) &= \int a_{(\beta)}(x-y)\,\gamma(\langle\xi\rangle^{\delta}y)\,dy\,\langle\xi\rangle^{\delta n} \\
&= \int a_{(\beta)}(y)\,\gamma(\langle\xi\rangle^{\delta}(x-y))\,dy\,\langle\xi\rangle^{\delta n} \qquad (a_{(\beta)}(y) = D_y^{\beta}a(y))
\end{aligned}
$$

従って任意の $\alpha, \beta'$ に対して

$$
\begin{aligned}
|\partial_x^{\beta'}\partial_\xi^{\alpha}\tilde{a}_{(\beta)}(x,\xi)| &\leqq \int |a_{(\beta)}(y)\,\partial_\xi^{\alpha}\{\gamma_{(\beta')}(\langle\xi\rangle^{\delta}(x-y))\,\langle\xi\rangle^{\delta(n+|\beta'|)}\}|\,dy \\
&\leqq |a|_{\tau} \sum_{|\alpha'| \leqq |\alpha|} |\psi_{\delta(n+|\beta'|),\alpha',\alpha}(\xi)|\,\langle\xi\rangle^{\delta(n+|\beta'|)} \int |\{\langle\xi\rangle^{\delta}(x-y)\}^{\alpha'}\gamma_{(\beta'+\alpha')}(\;''\;)|\,dy \\
&\leqq C_{\alpha,\beta'}\,|a|_{\tau}\,\langle\xi\rangle^{-|\alpha|+\delta|\beta'|}
\end{aligned}
$$

となることから (i) (ii) が得られる。 また $\gamma(y)$ のとり方から

$$
\tilde{b}(x,\xi) = \int \{a(x) - a(x-y)\}\,\gamma(\langle\xi\rangle^{\delta}y)\,\langle\xi\rangle^{\delta n}\,dy
$$

と書ける。 従って $0<\tau<1$ のとき

$$|\tilde{b}^{(\alpha)}(x,\xi)| \leqq \int |a(x)-a(x-y)| \sum_{|\alpha'|\leqq|\alpha|} |\psi_{m\delta,\alpha,\alpha'}(\xi)| |\{\langle\xi\rangle^{\delta}y\}^{\alpha'}\gamma^{(\alpha')}(\langle\xi\rangle^{\delta}y)| \langle\xi\rangle^{\delta m} dy$$

$$\leqq C_\alpha |a|_\tau \langle\xi\rangle^{-|\alpha|+\delta m} \int |y|^{\tau} |\{\langle\xi\rangle^{\delta}y\}^{\alpha'}\gamma^{(\alpha')}(\langle\xi\rangle^{\delta}y)| dy$$

$$\leqq C_\alpha |a|_\tau \langle\xi\rangle^{-|\alpha|-\tau\delta}$$

より (ii) が示せる。 また $\tau\geqq 1$ のとき $\int y^{\alpha}\gamma(y)\,dy = 0$ に注意すると

$$\tilde{b}(x,\xi) = \sum_{|\beta|=[\tau]} \frac{-[\tau]}{\beta!} \int_0^1 \left\{ \int \{a^{(\beta)}(x-\theta y) - a^{(\beta)}(x)\} \gamma(\langle\xi\rangle^{\delta}y) y^{\beta} \langle\xi\rangle^{\delta m} dy \right\} d\theta$$

と書けることから上と同様にして

$$|\tilde{b}^{(\alpha)}(x,\xi)| \leqq C_\alpha \langle\xi\rangle^{-|\alpha|-\tau\delta}$$

が得られる。 従って (ii) が示された。

また $|\beta|\geqq[\tau]+1$ のとき $\beta=\beta'+\beta''$ $|\beta'|=[\tau]$ と書くと

$$\tilde{a}_{(\beta)}(x,\xi) = \int a_{(\beta')}(y)\gamma_{(\beta'')}(\langle\xi\rangle^{\delta}(x-y)) \langle\xi\rangle^{\delta(m+|\beta''|)} dy$$

だから任意の $\alpha$, $\beta'''$ に対して

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^{\beta'''} \tilde{a}_{(\beta)}(x,\xi)| = |\partial_\xi^\alpha \{\int a_{(\beta')}(y)\gamma_{(\beta''+\beta''')}(\langle\xi\rangle^{\delta}(x-y)) \langle\xi\rangle^{\delta(m+|\beta''+\beta'''|)} dy|$$

$$= |\partial_\xi^\alpha \{\int (a_{(\beta')}(y) - a_{(\beta')}(x))\gamma_{(\beta''+\beta''')}(\langle\xi\rangle^{\delta}(x-y)) \langle\xi\rangle^{\delta(m+|\beta''+\beta'''|)} dy|$$

$$\left( \because\ \int \gamma_{(\beta''+\beta''')}(\langle\xi\rangle^{\delta}(x-y))\,dy = 0 \qquad \beta''\neq 0 \right)$$

故に上と同様にして

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^{\beta'''} \tilde{a}_{(\beta)}(x,\xi)| \leqq C_\alpha \langle\xi\rangle^{-|\alpha|+\delta(m+|\beta''+\beta'''|)} \sum_{|\alpha'|\leqq|\alpha|} \int |x-y|^{\tau}$$

$$\times |\{\langle\xi\rangle^{\delta}(x-y)\}^{\alpha'}\gamma^{(\beta''+\beta'''+\alpha')}(\langle\xi\rangle^{\delta}(x-y))| dy$$

$$\leqq C_\alpha \langle\xi\rangle^{-|\alpha|+\delta|\beta''|+\delta|\beta'''|-\tau\delta}$$

$$\leqq C_\alpha \langle\xi\rangle^{-|\alpha|+\delta|\beta'''|+\delta(|\beta|-\tau)}$$

従って(iii)が示された。 証明終

この定理2は関数 $a(x)$ を $S^0_{1,\delta}$ に属する表象 $\tilde{a}(x,\xi)$ で近似したものであり，表象に関する近似定理としては，もっとも素朴でかつ基本的なものである。次に，表象 $p(x,\xi)$ に対して同様の近似定理を述べる。表象 $p(x,\xi)$ に対して

$$(1.5)\quad \tilde{p}(x,\xi)=\int p(y,\xi)\gamma(\langle\xi\rangle^{\delta}(x-y))\langle\xi\rangle^{\delta n}dy$$
$$=\int p(x-y,\xi)\gamma(\langle\xi\rangle^{\delta}y)\langle\xi\rangle^{\delta n}dy$$
$$=\int p(x-\langle\xi\rangle^{-\delta}y,\xi)\gamma(y)\,dy$$

とおく。

定理3， $\tau>0$，$0\leqq\delta'<1$ とする。$m$ は実数とし $N$ は自然数とする。$p(x,\xi)$ は次の不等式を満足するとする。

$$(1.6)\quad |p^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi)|\leqq C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{m-|\alpha|+\delta'|\beta|}\qquad(|\alpha|\leqq N,\ |\beta|\leqq[\tau])$$

$$(1.7)\quad |p^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi)-p^{(\alpha)}_{(\beta)}(y,\xi)|$$
$$\leqq C_{\alpha,\beta}|x-y|^{\tau}\langle\xi\rangle^{m-|\alpha|+\delta'\tau}\qquad(|\alpha|\leqq N,\ |\beta|=[\tau])$$

このとき $\tilde{p}(x,\xi)$ 及び $r(x,\xi)=p(x,\xi)-\tilde{p}(x,\xi)$ は，次の不等式をみたす。

$$(1.8)\quad |\tilde{p}^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi)|\leqq C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{m-|\alpha|+\delta'|\beta|}\qquad(|\alpha|\leqq N,\ |\beta|\leqq[\tau])$$

$$(1.9)\quad |\tilde{p}^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi)|\leqq C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{m-|\alpha|+\delta'\tau+\delta(|\beta|-\tau)}\qquad(|\alpha|\leqq N,\ |\beta|>[\tau])$$

$$(1.10)\quad |r^{(\alpha)}(x,\xi)|\leqq C_{\alpha}\langle\xi\rangle^{m-(\delta-\delta')\tau-|\alpha|}\qquad(|\alpha|\leqq N)$$

この定理の証明は，定理2の $a(x)$ を $p(x,\xi)$ で置き換えて，定理2の証明と全く同様にできる。この場合，$p(x,\xi)$ は

$\xi$に関してN回までしか微分できないことと，$x$に関して微分したときに$\langle\xi\rangle$に関して$\delta'$だけ位数が上がることに注意する。

注意1，　今までに述べた補題1，定理2，3，はすべて，$\langle\xi\rangle$のところを一般の基本尺度関数$\lambda(\xi)$に置きかえても成り立つ。

注意2，　近似定理は，この稿では表象の形が$a(x)$，$p(x,\xi)$であるときについて述べたが，表象の形が$p(x,\xi,y)$であって$x$，$y$についての滑らかさが少ないときでも，同様の近似定理が示せる（[10]参照）。

注意3，　定理2の$\tilde{b}(x,\xi)$及び定理3の$r(x,\xi)$に関しては，もう少こし詳しい評価式を示すことができる。　例えば$\tau=1+\tau'$ ($\tau'>0$)，$e_j=(0,\cdots,0,\overset{j}{1},0,\cdots,0)$とすると，定理2 (iv) の不等式の他に，

$$\text{(iv)}'\quad |b^{(\alpha)}_{(e_j)}(x,\xi)| \leqq C_\alpha|\alpha|_\tau\langle\xi\rangle^{-|\alpha|-\tau'\delta},$$

が成り立つ。　更に，$r(x,\xi)$に対しても，定理3 (1.10) の他に，

$$(1.10)'\quad |r^{(\alpha)}_{(e_j)}(x,\xi)| \leqq C_\alpha\langle\xi\rangle^{m-(\delta-\delta')\tau'-|\alpha|}$$

が成り立つ。

## 2, 擬微分作用素の $L^p$－有界性

まず，表象 $p(x,\xi)$ に対して擬微分作用素 $p(X,D_x)$ は

(2.1) $\quad p(X,D_x)u(x)=\int e^{ix\cdot\xi}p(x,\xi)\hat{u}(\xi)\,d\!\!\!{}^-\xi \qquad (u\in\mathcal{S}),$

で定義される。但し $u\in\mathcal{S}$ に対し $\hat{u}(\xi)=\int e^{-ix\cdot\xi}u(x)\,dx$ かつ $d\!\!\!{}^-\xi=(2\pi)^{-n}d\xi$ である。表象 $p(x,\xi)$ が有界連続であれば $p(X,D_x)$ が $\mathcal{S}$ から $\mathcal{B}^0$ への作用素であることは容易に示される。この作用素の $L^p$－有界性について調べる。

まず最初に，表象 $r(x,\xi)$ が $|\xi|\to\infty$ のとき負の位数であるときの擬微分作用素 $r(X,D_x)$ の核表示について述べよう。

定理1，有界連続な表象 $r(x,\xi)$ が次をみたすとする。

(2.2) $\quad |r^{(\alpha)}(x,\xi)|\leqq C_\alpha\langle\xi\rangle^{-\rho-|\alpha|} \qquad (|\alpha|\leqq n+1)$

但し $\rho>0$ (この $\rho$ は (1.1) の $\rho$ とは異なる) とする。このとき次の性質 (i) (ii) をみたす $\mathbb{R}^n_x\times(\mathbb{R}^n_z-\{0\})$ 上の連続関数 $K(x,z)$ が存在する。

(i) $\quad r(X,D_x)u(x)=\int K(x,x-y)u(y)\,dy \qquad u\in\mathcal{S},$

(ii) $\quad 0<\rho'<\min\{1,\rho\}$ となる任意の $\rho'$ に対し

(2.3) $\quad |K(x,z)|\leqq C_{\rho'}(1+|z|)^{-1}|z|^{-n+\rho'}$

が成り立つ。

証明，明らかに $0<\rho\leqq1$ としてよい。$\chi(\xi)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ を $\chi(\xi)=1\ (|\xi|\leqq1/2)$，$\chi(\xi)=0\ (|\xi|\geqq1)$ にとる。$1\geqq\varepsilon\geqq0$ に対し $r_\varepsilon(x,\xi)=\chi(\varepsilon\xi)r(x,\xi)$ とおく。$r(x,\xi)$ 及び

$r_\varepsilon(x,\xi)$ の norm $|r|_\rho$ , $|r_\varepsilon|_\rho$ を

(2.4) $$\begin{cases} |r|_\rho = \sum_{|\alpha|\leqq n+1} \sup\{|r^{(\alpha)}(x,\xi)|\langle\xi\rangle^{|\alpha|+\rho}\} \\ |r_\varepsilon|_\rho = \sum_{|\alpha|\leqq n+1} \sup\{|r_\varepsilon^{(\alpha)}(x,\xi)|\langle\xi\rangle^{|\alpha|+\rho}\} \end{cases}$$

とおく。 このとき $\chi(\varepsilon\xi)$ が $0\leqq\varepsilon\leqq 1$ に関して一様に $S^0_{1,0}$ に属することから

(2.5) $$|r_\varepsilon|_\rho \leqq C_0 |r|_\rho ,$$

(但し, $C_0$ は $\varepsilon$ に無関係) を得る。 更に, Lebesgue の定理より

(2.6) $$\begin{aligned} r(X,D_x)u(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int e^{ix\cdot\xi} r_\varepsilon(x,\xi)\hat{u}(\xi)\,d\xi \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int e^{ix\cdot\xi} r_\varepsilon(x,\xi)\left\{\int e^{-iy\cdot\xi}u(y)\,dy\right\}d\xi \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int\left\{\int e^{i(x-y)\cdot\xi} r_\varepsilon(x,\xi)\,d\xi\right\}u(y)\,dy , \end{aligned}$$

が成り立つ。 そこで, $K_\varepsilon(x,z)=\int e^{iz\cdot\xi} r_\varepsilon(x,\xi)\,d\xi$ とおき $(1+|z|)|z|^n K_\varepsilon(x,z)$ を考えよう。

まず $|\alpha|=n$ のとき, 部分積分と $\int r_\varepsilon^{(\alpha)}(x,\xi)\,d\xi=0$ となることに注意すると

$$z^\alpha K_\varepsilon(x,z) = i^{|\alpha|}\int\{e^{iz\cdot\xi}-1\}\, r_\varepsilon^{(\alpha)}(x,\xi)\,d\xi$$

を得る。 $0<\rho'\leqq 1$ に対して $|e^{iz\cdot\xi}-1|\leqq 2|z|^{\rho'}|\xi|^{\rho'}\leqq 2|z|^{\rho'}\langle\xi\rangle^{\rho'}$ が成り立つから

(2.7) $$\begin{aligned} |z^\alpha K_\varepsilon(x,z)| &\leqq 2|z|^{\rho'}\int\langle\xi\rangle^{\rho'}\{|r_\varepsilon^{(\alpha)}(x,\xi)|\langle\xi\rangle^{n+\rho}\}\langle\xi\rangle^{-n-\rho}\,d\xi \\ &\leqq 2C_0\int\langle\xi\rangle^{-n-(\rho-\rho')}\,d\xi\;|r|_\rho\;|z|^{\rho'} \end{aligned}$$

を得る。 従って $0<\rho'<\rho$ のとき

(2.8) $\quad |z^{\alpha} K_{\varepsilon}(x,z)| \leqq C_1 |r|_p |z|^{\rho'}$ ,

（但し，$C_1$ は $\varepsilon$ には無関係）を得る。

$|\alpha| = n+1$ のときも同様にして

(2.9) $\quad |z^{\alpha} K_{\varepsilon}(x,z)| \leqq C_1 |r|_p |z|^{\rho'}$

が成り立つことが示せる。故に (2.8), (2.9) より

(2.10) $\quad (1+|z|)|z|^{n} |K_{\varepsilon}(x,z)| \leqq C_2 |r|_p |z|^{\rho'}$ ,

（但し，$C_2$ は $\varepsilon$ には無関係）を得る。

次に，$k = [\frac{n+1}{2}]$ とおくと $2k = n$ 又は $n+1$ だから

$$|z|^{2k} K_{\varepsilon}(x,z) = i^{2k} \int e^{iz\cdot\xi} (\Delta_{\xi})^{k} r_{\varepsilon}(x,\xi)\, d\xi \quad .$$

ところで $|(\Delta_{\xi})^{k} r_{\varepsilon}(x,\xi)| \leqq C_3' |r_{\varepsilon}|_p \langle\xi\rangle^{-2k-\rho} \leqq C_3 |r|_p \langle\xi\rangle^{-n-\rho}$

だから，Lebesgue の定理によって，

(2.11) $\quad \lim\limits_{\varepsilon\to 0} K_{\varepsilon}(x,z) = i^{2k} |z|^{-2k} \int e^{iz\cdot\xi} (\Delta_{\xi})^{k} r(x,\xi)\, d\xi = K(x,z)$

が $z \neq 0$ で成り立つ。従って (2.6), (2.10), (2.11) より，再び Lebesgue の定理によって

$$\begin{cases} r(X,D_x)u(x) = \int K(x,x-y)u(y)\,dy & u \in \mathcal{S} \\ |K(x,z)| \leqq \underbrace{C}_{|r|_p} (1+|z|)^{-1} |z|^{-n+\rho'} \end{cases}$$

を得る。 証明終

この定理の系として，次の定理が成り立つ。

定理 5. 定理 4 と同じ条件のもとで $1 \leqq p \leqq \infty$ に対して，次の不等式が成り立つ。

(2.12) $\quad \| r(X,D_x)u \|_{L^p} \leqq C |r|_p \| u \|_{L^p} \qquad u \in \mathcal{S}$ 。

次に，主定理の一つを述べる。

定理6, $p(x,\xi)$ は $|\alpha|\leqq n+1$ に対して

(2.13) $$|p^{(\alpha)}(x,\xi)|\leqq C_\alpha\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}$$

(2.14) $$|p^{(\alpha)}(x,\xi)-p^{(\alpha)}(y,\xi)|\leqq C_\alpha|x-y|^\tau\langle\xi\rangle^{-|\alpha|+\tau\delta'}$$

をみたすとする。 但し $0<\tau\leqq 1$ とし $0\leqq\delta'<1$ とする。

このとき，ある定数Cに対して

(2.15) $$\|p(X,D_x)u\|_{L^2}\leqq C\|u\|_{L^2}\qquad(u\in\mathcal{S}),$$

が成り立つ。

証明, $\delta'<\delta<1$ なる $\delta$ をとる。 この $\delta$ に対して $\tilde{p}(x,\xi)$ を (1.5) で定義し，更に $r(x,\xi)=p(x,\xi)-\tilde{p}(x,\xi)$ とおく。このとき，定理3によって $r(x,\xi)$ は定理4の条件をみたす。従って $1\leqq p\leqq\infty$ に対して,

(2.16) $$\|r(X,D_x)u\|_{L^p}\leqq C\|u\|_{L^p}\qquad(u\in\mathcal{S}),$$

をみたす。 また，定理3によって，$\tilde{p}(x,\xi)$ は

(2.17) $$|\tilde{p}^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi)|\leqq C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{-|\alpha|+\delta|\beta|},$$

を任意の $\beta$ と $|\alpha|\leqq n+1$ に対してみたす。 従って，今までによく知られた $L^2$-有界性定理（[1], [3], [5], [7]）によって

(2.18) $$\|\tilde{p}(X,D_x)u\|_{L^2}\leqq C\|u\|_{L^2}\qquad(u\in\mathcal{S})$$

が成り立つ。 よって (2.16), (2.18) によって不等式 (2.15) が得られた。

証明終

次に，$L^p$－有界性について述べる。

定理7．$p(x,\xi)$ は任意の $\alpha$ に対して (2.13)，(2.14) をみたすとする。このとき，$1<p<\infty$ に対して，次の不等式をみたす定数 $C_p$ が存在する。

(2.19) $$\|p(X,D_x)u\|_{L^p} \leqq C_p \|u\|_{L^p} \qquad (u \in \mathcal{S}).$$

証明．定理6の証明と同じように $\tilde{p}(x,\xi)$，$r(x,\xi)$ を定義する。このとき，$p(X,D_x)=\tilde{p}(X,D_x)+r(X,D_x)$ かつ，$r(X,D_x)$ は不等式 (2.16) をみたす。また $\tilde{p}(x,\xi)\in S^0_{1,\delta}$ であるから，よく知られた $L^p$－有界性定理（[8]，[9]）により

(2.20) $$\|\tilde{p}(X,D_x)u\|_{L^p} \leqq C_p \|u\|_{L^p} \qquad (u \in \mathcal{S}),$$

が $1<p<\infty$ に対して成り立つ。従って，定理7が示された。　　　　　　　　証明終

この定理7では，(2.19) が成り立つための条件として (2.13) (2.14) がすべての $\alpha$ に対して成り立つことを要求している。しかしながら $p(X,D_x)$ が $L^p$－有界であるためには，$|\alpha|\leqq n+2$ に対して (2.13)，(2.14) が成り立てばよい。このことを示すために $\tilde{p}(x,\xi)$ を $\xi$ 方向に近似した表象を用いる。

$p(x,\xi)$ は $|\alpha|\leqq n+2$ に対して (2.13)，(2.14) をみたすとする。このとき $\delta'<\delta<\rho<1$ となるように $\delta$，$\rho$ をとり，$\tilde{p}(x,\xi)$ を (1.5) で定義し $r(x,\xi)=p(x,\xi)-\tilde{p}(x,\xi)$ とおく。更に，$\tilde{\tilde{p}}(x,\xi)$ を

(2.21) $$\tilde{\tilde{p}}(x,\xi)=\int \psi(\zeta)\hat{p}(x,\xi-\langle\xi\rangle^{\rho}\zeta)\,d\zeta$$

とおく。 $\hat{r}(x,\xi)=\hat{p}(x,\xi)-\tilde{\tilde{p}}(x,\xi)$ とおく。 但し $\psi(\zeta)$ は $\int\psi(\zeta)\,d\zeta=1$, $\mathrm{supp}\,\psi\subset\{|\zeta|\leqq 1\}$ をみたす $C_0^\infty$ 関数とする。 このとき, $p(x,\xi)=\tilde{\tilde{p}}(x,\xi)+\hat{r}(x,\xi)+r(x,\xi)$ でありかつ, $r(X,D_x)$ は (2.16) をみたすから $\tilde{\tilde{p}}(x,\xi)$, $\hat{r}(x,\xi)$ に対する $L^p$-有界性を示せばよい。

補題 8, (i), $\hat{r}(x,\xi)$ は $|\alpha|\leqq n+1$ に対して, 次をみたす。

(2.22) $$|\hat{r}^{(\alpha)}(x,\xi)|\leqq C_\alpha\langle\xi\rangle^{-(1-\rho)-|\alpha|}$$

(ii) $\tilde{\tilde{p}}(x,\xi)$ は $|\alpha|\leqq n+2$ に対して $\tilde{\tilde{p}}^{(\alpha)}(x,\xi)\in S^{-|\alpha|}_{\rho,\delta}$ である。
すなわち, $\tilde{\tilde{p}}(x,\xi)$ は次の不等式をみたす。

(2.23) $$\begin{cases} |\tilde{\tilde{p}}^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi)|\leqq C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{-|\alpha|+\delta|\beta|} & (|\alpha|\leqq n+2) \\ |\tilde{\tilde{p}}^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi)|\leqq C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{-(n+2)(1-\rho)-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} & (|\alpha|\geqq n+2). \end{cases}$$

証明, まず, $|\eta|\leqq C_0$ であるとき $c_1\langle\xi\rangle\leqq\langle\xi-\langle\xi\rangle^{\rho}\eta\rangle\leqq c_2\langle\xi\rangle$ が成り立つことに注意する。 このとき $\hat{r}(x,\xi)$
$=\sum_{j=1}^{n}\int_0^1\left\{\int\psi(\zeta)\zeta_j\,p^{(e_j)}(x,\xi-\langle\xi\rangle^{\rho}t\zeta)\langle\xi\rangle^{\rho}\,d\zeta\right\}dt$ かつ,
$|\partial_\xi^\alpha\{p^{(e_j)}(x,\xi-\langle\xi\rangle^{\rho}t\zeta)\langle\xi\rangle^{\rho}\}|\leqq C_\alpha\langle\xi\rangle^{-|\alpha|-(1-\rho)}$ $(|\alpha|\leqq n+1)$
であることから (2.22) がわかる。 また (2.23) も $|\alpha|\leqq n+2$ のときは $\tilde{\tilde{p}}^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi)=\int\psi(\zeta)\,\partial_\xi^\alpha\{\hat{p}_{(\beta)}(x,\xi-\langle\xi\rangle^{\rho}\zeta)\}\,d\zeta$, $|\alpha|\geqq n+2$ のときは $\tilde{\tilde{p}}^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi)=\int\partial_\xi^{\alpha'}\{\psi(\langle\xi\rangle^{-\rho}\tilde{\zeta})\langle\xi\rangle^{-\rho n}\}\,\tilde{p}_{\alpha'',\beta}(x,\tilde{\zeta})\,d\tilde{\zeta}$, (但し $\tilde{p}_{\alpha'',\beta}(x,\tilde{\zeta})=\partial_\xi^{\alpha''}\{\hat{p}_{(\beta)}(x,\xi-\langle\xi\rangle^{\rho}\zeta)\}\big|_{\xi-\langle\xi\rangle^{\rho}\zeta=\tilde{\zeta}}$, $\alpha'+\alpha''=\alpha$, $|\alpha''|=n+2$ である。) が成り立つことよりわかる。 証明終

この補題8の(i)によって，$\hat{r}(x,\xi)$ は定理5の $r(x,\xi)$ と同じ条件をみたすから，$\hat{r}(X,D_x)$ は $1\leqq p\leqq\infty$ に対して

(2.24) $\qquad \|\hat{r}(X,D_x)u\|_{L^p}\leqq C_p\|u\|_{L^p} \qquad (u\in\mathcal{S})$

をみたす。

作用素 $\tilde{p}(X,D_x)$ が $1<p<\infty$ のとき $L^p$-有界であることは，[8] とほとんど同様に，以下のようにして示される。

まず $\chi(\xi)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ を $\chi(\xi)=1$ $(|\xi|\leqq 2)$ となるようにとり $\tilde{\tilde{p}}(x,\xi)=\tilde{\tilde{p}}(x,\xi)\chi(\xi)+\tilde{\tilde{p}}(x,\xi)(1-\chi(\xi))=\tilde{\tilde{p}}_0(x,\xi)+\tilde{\tilde{p}}_1(x,\xi)$ とおく。明らかに $1\leqq p\leqq\infty$ に対して

(2.25) $\qquad \|\tilde{\tilde{p}}_0(X,D_x)u\|_{L^p}\leqq C\|u\|_{L^p} \qquad (u\in\mathcal{S})$

が成り立つ。そこで，作用素 $\tilde{\tilde{p}}_1(X,D_x)$ に対して $L^p$-有界性を示せばよい。

$\psi(\xi)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ を $\operatorname{supp}\psi\subset\{\frac{1}{2}\leqq|\xi|\leqq 2\}$ かつ $\xi\neq 0$ に対して $\sum_{j=-\infty}^{\infty}\psi(2^{-j}\xi)=1$ となるようにとる。このとき，$\operatorname{supp}_\xi \tilde{\tilde{p}}_1(x,\xi)\subset\{|\xi|\geqq 2\}$ に注意すると，

$$\tilde{\tilde{p}}_1(x,\xi)=\sum_{j=1}^{\infty}\tilde{\tilde{p}}_1(x,\xi)\psi(2^{-j}\xi),$$

である。そこで $q_N(x,\xi)=\sum_{j=1}^{N}\tilde{\tilde{p}}_1(x,\xi)\psi(2^{-j}\xi)$ とおくと $\tilde{\tilde{p}}(x,\xi)$ が (2.23)をみたすことから $q_N(X,D_x)$ は，次のいわゆる weak type (1,1)評価式をみたす。

(2.26) $\qquad m(\{x;|q_N(X,D_x)u(x)|>s\})\leqq\frac{C}{s}\|u\|_{L^1} \qquad u\in L^1(\mathbb{R}^n),$

但し，$m(A)$ は集合 A の Lebesgue measure であり，定数C

はNに無関係にとれる。

不等式(2.26)は，$\tilde{\tilde{p}}(x,\xi)$が$S^0_{1,\delta}$に属するときは[8]で示されているが，補題8(ii)より$|\alpha|\leqq[\frac{n}{2}]+1$のとき$\tilde{\tilde{p}}_1^{(\alpha)}(X,D_x)|D_x|^{|\alpha|}$が$L^2$-有界であることに注意すれば，[8]と全く同様に示される。更に$g_N(X,D_x)$は$L^2$-有界であるから不等式(2.26)とMarcinkiewiczの補間定理によって，$1<p\leqq 2$のとき

(2.27) $$\|g_N(X,D_x)u\|_{L^p}\leqq C_p\|u\|_{L^p}\qquad(u\in\mathcal{S}),$$

が成り立つ。但し$C_p$はNに無関係にとれる。また，$u\in\mathcal{S}$のとき $\lim_{N\to\infty}\|\{\tilde{\tilde{p}}_1(X,D_x)-g_N(X,D_x)\}u\|_{L^p}=0$ が成り立つから，$1<p\leqq 2$に対して

(2.28) $$\|\tilde{\tilde{p}}_1(X,D_x)u\|_{L^p}\leqq C_p\|u\|_{L^p}\qquad(u\in\mathcal{S})$$

が成り立つ。従って$1<p\leqq 2$のときの$\tilde{\tilde{p}}(X,D_x)$の$L^p$-有界性が示された。次に$2\leqq p<\infty$のときは$1<p'\leqq 2$を$1/p+1/p'=1$となるようにとる。このとき$\tilde{\tilde{p}}(X,D_x)$の形式的共役作用素$\tilde{\tilde{p}}^*(X,D_x)$を考えると$S^m_{\rho,\delta}$の表象で考えて

$$\tilde{\tilde{p}}^*(x,\xi)\sim\sum_{|\alpha|}\frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}\overline{p^{(\alpha)}_{(\alpha)}(x,\xi)},$$

なる漸近展開式が成り立つから$\tilde{\tilde{p}}^*(x,\xi)$は$\tilde{\tilde{p}}(x,\xi)$と同じ性質(2.23)をみたす。従って，

(2.29) $$\|\tilde{\tilde{p}}^*(X,D_x)v\|_{L^{p'}}\leqq C_{p'}\|v\|_{L^{p'}}\qquad(v\in\mathcal{S})$$

となることから，

(2.30) $$\|\tilde{\tilde{p}}(X,D_x)u\|_{L^p}\leqq C_p\|u\|_{L^p}\qquad(u\in\mathcal{S})$$

を得る。 以上によって次の定理が示された。

定理8, $p(x,\xi)$ は $|\alpha| \leqq n+2$ に対して (2.13), (2.14) を満たすとする。 このとき $1<p<\infty$ に対して, 不等式 (2.19) が成り立つ。

注意1, (2.13), (2.14) をみたす $p(x,\xi)$ に対し

$$\|P\|_{\tau,m} = \sum_{|\alpha|\leqq m}\left\{\sup_{(x,\xi)}|p^{(\alpha)}(x,\xi)\langle\xi\rangle^{|\alpha|}| + \sup_{(x,\xi)}\left|\frac{p^{(\alpha)}(x,\xi)-p^{(\alpha)}(y,\xi)}{|x-y|^{\tau}}\right|\langle\xi\rangle^{|\alpha|-\tau\delta'}\right\}$$

とおくと (2.15) の定数 $C$ は $C = C_0\|P\|_{\tau,n+1}$, (2.19) の定数 $C_p$ は $C_p = C_p\|P\|_{\tau,n+2}$,(但し $C_0$ 及び $C_p$ は表象 $p(x,\xi)$ には無関係) となることは証明より明らか。

注意2, $S^m_{\rho,\delta}$ に属する表象を持つ作用素 $\tilde{P}(X,D_x)$ の $L^2$-評価式として

$$\|\tilde{P}(X,D_x)u\|_0 \leqq |\tilde{P}|_0\|u\|_m + C\|u\|_{m-\frac{1}{2}(\rho-\delta)} \qquad u\in\mathcal{S}$$

がよく知られている。 但し $|\tilde{P}|_0 = \sup|\tilde{p}(x,\xi)\langle\xi\rangle^{-m}|$ である。 このことと定理4及び5を詳しくみれば, $p(x,\xi)$ が定理4の条件をみたせば

$$\|p(X,D_x)u\|_0 \leqq |P|_0\|u\|_0 + C_1\|u\|_{-\frac{1}{2}(1-\delta)} + C_{\rho'}\|u\|_{-\rho'} \qquad u\in\mathcal{S} \tag{2.31}$$

が成り立つ。 但し $0<\delta'<\delta<1$, $0<\rho'<\tau(\delta-\delta')$ である。

注意3, 表象 $p(x,\xi,y)$ が

$$|\partial_\xi^\alpha p(x,\xi,y)| \leqq C_\alpha\langle\xi\rangle^{-|\alpha|} \tag{2.13'}$$

$$|\partial_\xi^\alpha\{p(x,\xi,y)-p(x',\xi,y')\}| \leqq C_\alpha\{|x-x'|^\tau+|y-y'|^\tau\}\langle\xi\rangle^{-|\alpha|+\tau\delta'} \tag{2.14'}$$

をみたすときも, 作用素 $p(X,D_x,Y)$ が定義できて $L^2$ 又は $L^p$

有界であることが示せる（[10]参照）。

REFERENCES

[1] A.P.Calderon and R.Vaillancourt, A class of bounded pseudo-differential operators, Proc. Nat. Acad. USA., 69 (1972), 1185 – 1187.

[2[ Chin-Hung Ching, Pseudo-differential operators with non-regular symbols, J. Differential Equations, 11 (1972), 436 – 447.

[3] H.O.Cordes, On compactness of commutators of multiplications and convolutions, and boundedness of pseudo-differential operators, J. Functional Analysis, 18 (1975), 115 – 131.

[4] L.Hormander, On the $L^2$-continuity of pseudo-differential operators, Comm. Pure Appl. Math., 24 (1971), 529 – 535.

[5] T.Kato, Boundedness of some pseudo-differential operators, Osaka J. Math., 13 (1976), 1 – 9.

[6] H.Kumano-go, A Problem of Nirenberg on pseudo-differential operators, Comm. Pure Appl. Math., 23 (1970), 115 – 121.

[7] H.Kumano-go, Algebras of pseudo-differential operators, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 17 (1970), 31 – 50.

[8] H.Kumano-go, Pseudo-differential operators on Sobolev space $H^{s,p}$, $-\infty<s<\infty, 1<p<\infty$, 数解研講究録, 88 (1970), 21 – 44.

[9] H.Kumano-go and M.Nagase, $L^p$-theory of pseudo-differential operators, Proc. Japan Acad., 46 (1970), 138 –142.

[10] H.Kumano-go and M.Nagase, Approximation theorems in the theory of pseudo-differential operators and sharp Gårding's inequality, to appear.

[11] T.Muramatu, Functional analysis and differential equations, Edited by S. Ito and K. Yosida, Iwanami Shoten, Tokyo, 1976 (in Japanese).

[12] The $L^p$-boundedness of pseudo-differential operators with non-regular symbols, Comm. in partial differential equations, 2 (10) (1977), 1045 –

1o61.

[13] M.Nagase, A new proof of sharp Gårding inequality, to appear.