数理解析研究所講究録
第338巻 1978年 29-39

C* －環の各種の有限性について

桃谷高校　　加藤佳宣

1．W* 環の研究に於いて有限性の概念が基本的なものであることは言うまでもないことであり、従ってその種々の特徴づけも相当に深く調べられているようである。そしてこのことはまた作用素論の分野にも当然のことながら興味深い話題を提供して来たように思われる([2]，[3]，[15]，[17]，[21]，[23]など参照)。最近になり、C* 環に於いても有限性を考察しようという研究が本格化して来た([4]，[5]参照)。しかし現在もなお、C* 環に於ける有限性の概念は固まってはいないようである。実際W環では一意的に定まる各種の有限性の条件が、C* 環に移したときには一致しなくなってしまい、どの条件にも十分な妥当性を考えにくくなるのである。反面、それらの条件の間の強弱関係を整理して置くことは現在、無意味でないように思われる。本稿では作用素論の方向から幾つかの有限性の条件を取り上げて考察してみたい。取り上げる条件

は以下のようなものである。なお考えるC^*環Aは単位元1を持つものとして置く。

(a) isometryはunitaryである。

(b) $xy=1$ ならば $yx=1$ である。

(c) $xay=1$ ならば aは可逆である。

(d) Aの可逆元全体G(A)がAでノルムの意味で稠密である。

(d′) Aの閉単位球A_1の端点全体Ext A_1がAのunitary全体U(A)と一致する。

(e) U(A)の凸包 co U(A) が A_1 と一致する。

(f) hyponormalはnormalである。

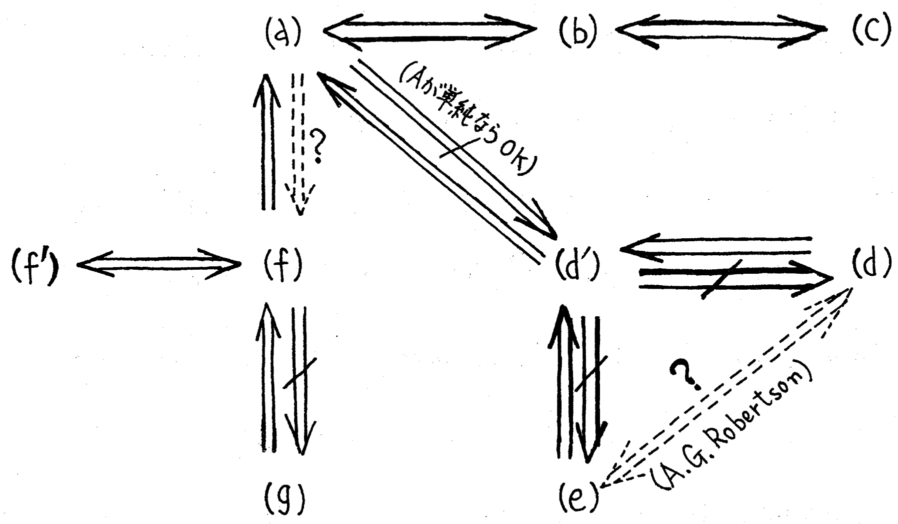
(f′) unitaryにsimilarなcontractionはunitaryである。

(g) unimodular contractionはunitaryである。

条件(a), (b)は環論的にもまず常識的なものと思われる。(c)はJ. Cuntz [4]がAを単純としたとき本質的に扱っているものである。(d)と(e)は[19]に於いてA. G. Robertsonが論じた。この[19]では(d)と(e)がW^*環とC^*環に於いて同等なことを指摘し一般のC^*環での同等性の可能性を示唆している。なお、蛇足であるが(e)に関連したこととして、U(A)の閉凸包$\overline{\text{co}}$ U(A)は常にA_1と一致することが[22]から直ちに判る。条件(d′)に関連した文献には、[2], [3]などが挙げられる。(f)は作用素論的に興味の有る条件ではないかと思われる。(g)はB. Russo [21]が

論じ、W^* 環での有限性の特徴づけとなることを注意している。(f')は技術的なものである。

結論としては次のようになる。



以下これらについて、概略を論じて行きたい。詳細については[16]を参照して頂きたい。

2. $A \ni x$ に対して $\pi(x)$ は、その approximate spectrum を表す。すなわち、$\pi(x) \ni \lambda$ (λ は複素数)とは $(x-\lambda)^*(x-\lambda) > \varepsilon > 0$ なる scalar ε が存在しないときとする([7], [8], [9], [10], [11], [12]など参照)。$\sigma(x)$ は x の spectrumである。

定理1. (C^* 環)Aに於いて下記の条件はすべて同値である。

(a), (b), (c)

(a′) $\pi(x) = \sigma(x)$である。

(b1) $0 \notin \pi(x)$であればxは可逆である。

(b2) xyが可逆であればx, yも可逆となる。

(b3) x^*xが可逆であればxも可逆となる。

(c′) $\sigma(xy) = \sigma(yx)$ である。

略証. (a)と(b)の同値性については[1; §17, Exercise 4]に、C^*環よりもやや一般的な形で示されている。(この指摘は前田周一郎先生に負う。) (b)⇒(c): $xay = 1$であれば$ayx = 1$かつ$yxa = 1$となるからaは可逆と判る。(c)⇒(b), (b1), (b2), (b3), (c′)は容易である。 (c)⇒(a′)は(b1)から判る。 (c)⇒(c′): $\sigma(xy) \cup \{0\} = \sigma(yx) \cup \{0\}$は常に成立する([12; Problem 61])から(b2)に帰着できる。次に(a)が成立しないとすれば proper isometry w が存在するからこれを利用することで、(a′), (b1), (b2), (b3), (c′)が成立しないことを示せる。

この定理で、(a), (b1), (b2), (b3)の同値性は仲本律男先生が[17; Appendix]でW^*環について証明されたものである。

3. 次に、(d), (e), (d′), (a)の関連について見ていくことにする。Ext A_1の諸性質については、現在も久保文夫氏[18]な

どにより研究が進められているが、次の定理[19; 1.6.4]は基本的である。

定理2. $\mathrm{Ext}\,A_1 \ni x$ である必要十分条件は $(1-x^*x)A(1-xx^*)=\{0\}$ であり、しかもこのとき x は partial isometry となる。

この定理から直ちに、

命題3. (d') ならば (a) である。

最近、泉野佐一先生は[14]に於いて (a) $\not\Rightarrow$ (d') である例を示された。その例は separable Hilbert space H 上の simple unilateral shift を S としたとき、$H \oplus H$ 上で $S \oplus S^*$ によって生成される C^* 環である。また綿谷安男氏は A が単純ならば (a) $\Rightarrow$ (d') となることを指摘した。実際、単純な A に於いては、$xAy=0 \Rightarrow x$ または $y=0$ が判るのでこの場合、$\mathrm{Ext}\,A_1$ は isometry と coisometry だけから成っているからである。

[13], [20] などの証明のやり方を借りれば次の補題が判る。

補題4. (d) ならば (a) である。

略証. W を isometry とするとき、或る $g \in G(A)$ が存在して $\|W^*-g\| < 1$ となる。このとき $\|1-gW\| < 1$ となるから $W \in G(A)$ が判る。

定理5. (d) ならば (d') である。

略証. A を或る Hilbert space 上の作用素環と見做し、そこで A の弱閉包 B を考える。$\mathrm{Ext}\,A_1 \ni x$ に対し定理2

から $1-x^*x$, $1-xx^*$ は projection であるから、比較可能定理([1], [15], [23]参照)により B の或る central projection p で、$p(x^*x)^{\perp} \lesssim p(xx^*)^{\perp}$ かつ $p^{\perp}(xx^*)^{\perp} \lesssim p^{\perp}(x^*x)^{\perp}$ となるようなものが存在する。但し $p^{\perp}$ は $1-p$ を表す。x は端点であるから、$v^*v = p(x^*x)'$ かつ $vv^* \leq p(xx^*)'$ となる $v \in B$ に対して、$\{0\} = p(x^*x)'Bp(xx^*)' \ni p(x^*x)'v^*p(xx^*)' = v^*$ となり $p(x^*x)' = 0$ が判る。同様にして $p'(xx^*)' = 0$ も示せる。このとき $w = p' + px$ は isometry と判るから、補題4により $w \in U(A)$ となり $p(xx^*)' = 0$ が言える。そこで x は coisometry と判り、補題4から $x \in U(A)$ が示せる。

次は定義から直ちに得られる。

命題6. (e) ならば (d') である。

4. 幾つかの例を挙げることにする。まず H を separable Hilbert space とし、B(H) を H 上の(有界線形)作用素全体、C(H) を B(H) の compact ideal とする。B(H) から剰余環 $A(H) = B(H)/C(H)$ への自然写像 π を Calkin map といい、$\pi^{-1}(G(A(H)))$ の元を Fredholm 作用素と呼ぶ。Fredholm 作用素 x に対してその index を、

$$\mathrm{ind}\, x = \dim \ker x - \dim \ker x^*$$

で定めることが出来る。index 理論により、$\pi(x)$ と $\pi(y)$ が $G(A(H))$ の同じ()ルムの

意味での連結)成分に属するとき $\mathrm{ind}\,x = \mathrm{ind}\,y$ であることが言える([6]参照)。

定理7. $A \subset B(H)$ でかつ (i) $\pi(A)$は(a)を満たす。

(ii) $G(\pi(A))$は連結である。 となっていれば、Aも(a)を満たす。

略証. $w \in A$ を isometry とすれば(i)より $\pi(w)$は unitary となり、w は Fredholm 作用素である。(ii)より $\pi(w)$と$\pi(1)$は $G(A(H))$の同じ成分に属するから $\mathrm{ind}\,w = \mathrm{ind}\,1 = 0$ が判り、$w \in U(A)$が示せた。

例8. 定理7は条件(ii)がないと成立しない。その例は、H上の simple unilateral shift s から生成される C^* 環である。

例9. 定理7より $C(H)+\mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$は複素数全体)が(a)を満たすことが直ちに判るが、実はより強く(d)を満たしている。それは $C(H)+\mathbb{C} \ni x$ に対して $\sigma(x)$が高々一点を除いて離散的となる([6; 5.22 Theorem] 参照)ことに注意すればよい。(e)を満たしているかどうかは現在不明である。(f)を満たすことは compact な hyponormal が normal となる([12; Problem 163] 参照)ことから判る。しかし(g)は満たさないのでこれは(f)$\Rightarrow$(g)の反例になっている。(g)を満たさないことをいうには $C(H)+\mathbb{C}$ 内に proper unimodular contraction を構成すればよい。B. Russo は[21; Theorem 2]で、unimodular contraction の次のような例を示した。まずHを区間

(0, 1)上の二乗可積分関数の作る空間$L^2(0, 1)$と見做し、υ：Volterra作用素を $(\upsilon f)(\lambda)=\int_0^\lambda f(t)\,dt$ で定義する。そのとき B. Russoの例は $C=(\upsilon-1)(\upsilon+1)^{-1}$ となる。ここでυはcompactであり([12; §148]参照)、更に $C=2\upsilon(\upsilon+1)^{-1}-1$ であるから、$C\in C(H)+\mathbb{C}$と判り、従ってこのυが求めるものになっている。

さて、JをAの閉両側ideal としたとき自然写像τ：A→A/J を定めることが出来る。このときτの連続性から次が判る。

命題10. Aが(d)を満たすならばA/Jも(d)を満たす。

次の定理はcontractionに対するlifting定理の一つの精密化である。証明は綿谷安男氏により提示された。

定理11. $x\in A$に対して或る$j\in J$が存在して、$\|\tau(x)\|=\|x(1-j)\|$となる。

略証. まず$x\geq 0$としてよいことが判る。そこでこのxにより生成された(可換)C^*環Dから$D/(D\cap J)$への自然写像をνと表す。すると、$(D+J)/J\cong D/(D\cap J)$より、定理はD, $D\cap J$, τという自明な場合に帰着する。

命題12. Aが(e)を満たすならばA/Jも(e)を満たす。

略証. A/Jのcontraction xを定理11によりliftingしてみれば直ちに得られる。

例13. FをFermion環(CAR環)としLをFの極大左ideal

として $A = L^* \cap L$ と置く。Aの multiplier 環をMと表す。[5; 4.12 Example]に於いて J.Cuntz と G.K.Pedersen は M/A が(a)を満たさないことを示した。他方、最近綿谷安男氏[24]は M が(d′)を満たしていることを指摘している。そこで命題10と12よりこのMは、(d′) ⟹ (d) と (d′) ⟹ (e) に対する反例になっていることが判る。

例14. A.G.Robertson[19] は可換 C^* 環Aに於いては(d)と(e)は同値であり、しかもそれは更に $\dim \hat{A} \leq 1$ という条件とも同値であることを指摘した。但し $\dim \hat{A}$ とはAの spectrum $\hat{A}$ の covering dimension である。従って $\dim \hat{A} > 1$ であるような可換 C^* 環Aは、(a) ⟹ (d) と (a) ⟹ (e) に対する反例になっている。

5. 最後に、(f), (g), (f′) の関連について述べたい。次の命題は similarity が spectrum を保存することから直ちに得られる。

命題15. (g) ならば (f′)である。

そして次の命題は本質的に[12; Problem 165]の証明から得られる。

命題16. 条件(f)と(f′)は同値である。

また、isomety は hyponormal なので次は明らかである。

命題17. (f) ならば (a)である。

参 考 文 献

1. S.K.Berberian, Baer *-Rings, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1972.

2. M. and H.Choda, Some characterizations of certain von Nenmann algebras, Proc. Japan Acad., 46(1970), 341-344.

3. H.Choda, Y.Kijima and Y.Nakagami, Some extremal properties in the unit ball of von Neumann algebras, Kôdai Math. Sem. Rep., 21(1969), 175-181.

4. J.Cuntz, The structure of multiplication and addition in simple C^*-algebras, to appear

5. J.Cuntz and G.K.Pedersen, Equivalence and traces on C^*-algebras, to appear

6. R.G.Douglas, Banach Algebra Techniques in Operator Theory, Academic Press, New York, 1972.

7. M.Enomoto, M.Fujii and K.Tamaki, On normal approximate spectrum, Proc. Japan Acad., 48(1972), 211-215.

8. M.Fujii, On normal approximate spectrum,V, Proc. Japan Acad., 49(1973), 416-419.

9. M.Fujii and R.Nakamoto, On normal approximate spectrum,II, Proc. Japan Acad., 48(1972), 297-301.

10. M.Fujii and R.Nakamoto, On normal approximate spectrum,IV, Proc. Japan Acad., 49(1973), 411-415.

11. M.Fujii and K.Tamaki, On normal approximate spectrum,III, Proc.Japan Acad., 48(1972), 389-393.

12. P.R.Halmos, A Hilbert Space Problem Book, Van Nostrand, Princeton, 1967.

13. S.Izumino, Inequalities on normal and antinormal operators, to appear

14. S.Izumino, Some remarks on distances of operators, to appear

15. I.Kaplansky, Rings of Operators, Benjamin, New York, 1968.

16. Y.Kato, On finiteness of C^*-algebras, to appear

17. Y.Kato and M.Nakamura, A characterizations of finiteness of von Neumann algebras, Math. Japon., 22(1977), 69-71.

18. F.Kubo, A note on the unit ball of operator algebras, to appear

19. A.G.Robertson, A note on the unit ball in C^*-algebras, Bull. London Math. Soc., 6(1974), 333-335.

20. D.D.Rogers, Approximation by unitary and essentially unitary operators, Acta Sci. Math., 39(1977), 141-151.

21. B.Russo, Unimodular contractions in Hilbert space, Pacific J. Math., 26(1963), 163-169.

22. B.Russo and H.A.Dye, A note on unitary operators in C^*-algebras, Duke Math. J., 33(1966), 413-416.

23. S.Sakai, C^*-Algebras and W^*-Algebras, Springer-Verlag, New York London, 1971.

24. Y.Watatani, On Miles' theorem for C^*-algebras, to appear