数理解析研究所講究録
第338巻 1978年 40-47

Theory of random operators and its applications

東工大 理 伊藤 茂

1.序. (偏微分)方程式を解く一般的手段としては,不動点定理以外に写像定理がある.特に1960年代以降Browder, Minty等によって与えられたmonotone operatorに対する写像定理がよく知られている(cf. Vainberg [6]). ランダム・パラメータを含む写像に対する不動点定理(random fixed point theorem)の場合と同様に,写像定理に対してもランダム・パラメータを含む場合への拡張が考えられる.ここではKuratowskiとRyll-Nardzewski [5], Himmelberg [2]等により研究されたmultivalued measurable mappingとそのmeasurable selectorの理論を用いることにより,randomな写像定理とでも言うべき結果を証明し,その応用として,ランダム・パラメータを含むHammerstein typeの方程式の解の存在定理を与える.なおより詳しい結果についてはItoh [3]を参照のこと.

2.定義及び記号. 以下 $(\Omega, \mathcal{A})$：可測空間, Y:距離空間, 2^Y：Yの部分集合全体とする. $T: \Omega \to 2^Y$ とする. Tが(*weakly*) *measurable* $\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\forall B \subset Y$：閉(開)集合に対して, $T^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid T(\omega) \cap B \neq \phi\} \in \mathcal{A}$. 一般に$T$が *measurable* $\Rightarrow$ Tは *weakly measurable*. さらに $\forall \omega \in \Omega$ に対して $T(\omega)$ が *compact* の時は逆が成り立つ. $\xi: \Omega \to Y$ がTの *measurable selector* $\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ ξは *measurable* で $\forall \omega \in \Omega$ に対して $\xi(\omega) \in T(\omega)$. これらのより詳しい survey については Wagner [7] を参照のこと.

Proposition 1. (Himmelberg [2]). Y：可分完備, $T: \Omega \to CD(Y)$ (Yの空でない閉集合全体)とする. このとき, Tが *weakly measurable* $\Leftrightarrow$ $\exists$(可算個) $\xi_n: \Omega \to Y$：Tの *measurable selector* で, $\forall \omega \in \Omega$ に対して, $T(\omega) = cl\{\xi_n(\omega)\}$, ここで $cl(B)$ はBの *closure*.

Proposition 2. (Himmelberg [2]). Y：同上, $T_n: \Omega \to CD(Y)$：*weakly measurable* で, $\forall \omega \in \Omega$ に対してある $T_n(\omega)$ が *compact* とする. $\Rightarrow$ $T: \Omega \to 2^Y$ を $T(\omega) = \bigcap_{n=1}^{\infty} T_n(\omega)$ で定義すると, Tは *measurable*.

次にX：実 *reflexive Banach* 空間, X^*：Xの *dual* 空間,

$F: X \to X^*$ とする．F が monotone $\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\forall x, y \in X$ に対して，$(Fx - Fy, x - y) \geq 0$，ここで $(\cdot, \cdot)$ は X と X^* の duality pairing．F が hemicontinuous $\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\forall x, y \in X$ に対して，$t_n > 0$，$t_n \to 0$ ならば $F(x + t_n y) \rightharpoonup F(x)$ (weak)．F が demicontinuous $\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $X \ni x_n$，$x_n \to x_0$ (strong) ならば $F(x_n) \rightharpoonup F(x_0)$．実はこの場合 F が monotone ならば，F が hemicontinuous $\Leftrightarrow$ F が demicontinuous．とくに，X が有限次元で F が monotone のとき，F が hemicontinuous $\Leftrightarrow$ F が連続，i.e., $X \ni x_n$，$x_n \to x_0$ ならば $F(x_n) \to F(x_0)$．Monotone operator に関する詳しい結果は Vainberg [6] を参照のこと．F が有界 $\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\forall D \subset X$：有界集合に対して $F(D) \subset X^*$：有界．

さて $F: \Omega \times X \to X^*$ とする．F が random operator $\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\forall x \in X$，$F(\cdot)x$ が measurable．F が coercive $\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 関数 $c: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ (実数) で，$r \to \infty$ ならば $c(r) \to \infty$ となるものがあって，$\forall \omega \in \Omega$，$\forall x \in X$ $(x \neq 0)$ に対して $(F(\omega)x, x) \geq c(\|x\|)\|x\|$．$F$ が hemicontinuous (monotone，他) $\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\forall \omega \in \Omega$，$F(\omega)$ が hemicontinuous (monotone，他)．また $B(\Omega, X) = \{\xi: \Omega \to X \mid$ measurable で，$\sup_{\omega \in \Omega} \|\xi(\omega)\| < \infty\}$ とする．

3. Monotone operators.

Lemma 1. X：有限次元，$F: \Omega\times X\to X^*$：coercive 連続 random operator，$\eta\in B(\Omega, X^*)$ とする．$\Rightarrow \exists\xi\in B(\Omega, X)$ で，$\forall\omega\in\Omega$，$F(\omega)\xi(\omega)=\eta(\omega)$．

(Proof) $\eta\equiv 0$ の場合に言えばよい（$\because$ もしそうでなければ $G: \Omega\times X\to X^*$ を $G(\omega)x = F(\omega)x-\eta(\omega)$ で定義すれば，G は F と同じ条件を満たす）．Browder の結果 (cf. Vainberg [6]) より $\forall\omega\in\Omega$，$\exists x\in X$，$F(\omega)x=0$．そこで $T: \Omega\to CD(X)$ を $T(\omega)=\{x\in X \mid F(\omega)x=0\}$ とおくと，F が coercive より $\exists M>0$，$\forall\omega\in\Omega$，$F(\omega)\subset D=\{x\in X \mid \|x\|\leqq M\}$．$D$ は compact で F が連続より T は measurable となる．よって Proposition 1 より T の measurable selector $\xi: \Omega\to X$ があるが，この ξ が求めるものである．Q.E.D.

Lemma 2. (Browder, Minty (cf. Vainberg [6]). $D\subset X$：dense linear，$F: D\to X^*$：hemicontinuous，$\exists x_0\in D$，$\exists y_0\in X^*$ で，$\forall x\in D$，$(Fx-y_0, x-x_0)\geqq 0$．$\Rightarrow Fx_0=y_0$．

Theorem 1. X：可分，$F: \Omega\times X\to X^*$：coercive hemicontinuous monotone random operator，$\eta\in B(\Omega, X^*)$ とする．$\Rightarrow \exists\xi\in B(\Omega, X)$，$\forall\omega\in\Omega$，$F(\omega)\xi(\omega)=\eta(\omega)$．

(Proof) いわゆるGalerkin法による．$\eta\equiv 0$としてよい．Xが可分より$X_n\subset X$：有限次元線形部分空間で，$X_1\subset X_2\subset X_3\subset\cdots$かつ$W=\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n$が$X$でdenseになるものが存在する．$j_n:X_n\to X$：injection，$j_n^*:X^*\to X_n^*$：$j_n$のdualとし，$F_n:\Omega\times X_n\to X_n^*$を$F_n(\omega)x=j_n^*\cdot F(\omega)x$で定義すると，$F_n$はcoercive連続random operatorで，Lemma 1より$\exists\,\xi_n:\Omega\to X_n$：measurableで，$\forall\,\omega\in\Omega$，$F(\omega)\xi_n(\omega)=0$．$F$のcoercivityより$\exists M>0$で，$\|\xi_n(\omega)\|\leqq M$ $(\omega\in\Omega, n=1,2,\cdots)$．$D=\{x\in X\mid \|x\|\leqq M\}$はweakly compactで，$X$が可分より$D$のweak topologyはmetrizable，i.e.，Dはcompact距離空間と考えてよい．各nに対して，$G_n:\Omega\to WK(D)$（Dの空でないweakly compact部分集合全体）を$G_n(\omega)=w\text{-}cl\{\xi_i(\omega)\mid i\geqq n\}$，但し$w\text{-}cl(B)$は$B$のweak closure，で定義すると，Proposition 1よりG_nはw-measurable，i.e.，measurable in weak topology．そこで$G:\Omega\to WK(D)$を$G(\omega)=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n(\omega)$で定義すると，Proposition 2より$G$は$w$-measurable．よってProposition 1よりGのw-measurable selector $\xi:\Omega\to D$が存在する．$\forall x^*\in X^*$に対して，$(x^*,\xi(\cdot)):\Omega\to R$は可測関数で，$X$は可分だから$\xi$はmeasurableである（cf. HilleとPhillips [1]）．$\omega\in\Omega$を任意にfixする．$\{\xi_n(\omega)\}$の部分列$\{\xi_m(\omega)\}$で，$\xi_m(\omega)\rightharpoonup$

$\xi(\omega)$となるものがある。$\forall x \in W$ に対して m を大にとると $x \in X_m$ だから

$$0 \leqq (F(\omega)x - F(\omega)\xi_m(\omega),\ x - \xi_m(\omega))$$
$$= (F(\omega)x,\ x - \xi_m(\omega)) - (F(\omega)\xi_m(\omega),\ x - \xi_m(\omega))$$
$$= (F(\omega)x,\ x - \xi_m(\omega)).$$

$m \to \infty$ とすると $(F(\omega)x,\ x - \xi(\omega)) \geqq 0$. Lemma 2 より $F(\omega)\xi(\omega) = 0$. Q.E.D.

Remark. Theorem 1 は $\forall \omega \in \Omega$, $F(\omega)$ が semimonotone でも成り立つ. 但し $F: X \to X^*$ が semimonotone $\underset{def.}{\Leftrightarrow}$ $Fx = S(x,x)$, ここで $S: X \times X \to X^*$ は $\forall y \in X$, $S(\cdot, y)$ が hemicontinuous monotone で, $\forall x \in X$, $S(x, \cdot)$ が completely continuous, i.e., $y_n \to y_0$ ならば $S(x, y_n) \to S(x, y_0)$.

4. Hammerstein equations. X が性質 (π) を満たす $\underset{def.}{\Leftrightarrow}$ $\exists A: X^* \to X$: hemicontinuous monotone で, $A0 = 0$ かつ $\exists c > 0$, $\exists \alpha > 1$ で, $(Au, u) \geqq c\|u\|^{\alpha}$ $(u \in X^*)$. 例としては Hilbert 空間, L^p $(1 < p < \infty)$ 空間がある.

Theorem 2. X : 可分で性質 (π) を満たす, $F: \Omega \times X \to X^*$: 有界 hemicontinuous monotone random operator, $K: \Omega \times$

$X^* \to X$：連続線形 monotone random operator で，$\exists M>0$，$(F(\omega)x, x) \geqq 0$ $(\omega\in\Omega,\ \|x\|\geqq M)$ とする．さらに $\sup_{\omega\in\Omega}\|F(\omega)0\|<\infty$，$\sup_{\omega\in\Omega}\|K(\omega)\|<\infty$ とする．$\Rightarrow \exists\, \xi\in B(\Omega, X)$，$\forall\omega\in\Omega$，$\xi(\omega)+K(\omega)F(\omega)\xi(\omega)=0$．

(Proof) 各 n に対して $T_n: \Omega\times X^*\to X$ を

$$T_n(\omega)u = A\left(\frac{u}{n}\right) + K(\omega)^*u + K(\omega)F(\omega)K(\omega)^*u,$$

ここで $K(\omega)^*$ は $K(\omega)$ の dual，で定義すると，まず $K(\cdot)^*u$ は measurable で，$F(\omega)$ は demicontinuous だから X が可分であることより $F(\cdot)K(\cdot)^*u$ は measurable である (cf. Kannan と Salehi [4])．従って T_n は coercive hemicontinuous monotone random operator になる．Theorem 1 より $\exists\,\eta_n\in B(\Omega, X^*)$，$\forall\omega\in\Omega$，$T_n(\omega)\eta_n(\omega)=0$．条件より $\exists M>0$ で $\|K(\omega)^*\eta_n(\omega)\|\leqq M$ $(\omega\in\Omega,\ n=1,2,\cdots)$ がわかる．Theorem 1 の証明と同様にして $G:\Omega\to WK(D)$ を $G(\omega)=\bigcap_{n=1}^{\infty} w\text{-}cl\{K(\omega)^*\eta_n(\omega) \mid i\geqq n\}$ で定義すると，G は w-measurable で measurable selector $\xi:\Omega\to X$ を持つ，但し $D=\{x\in X \mid \|x\|\leqq M\}$ である．$\omega\in\Omega$ を任意に fix する．すると $\{K(\omega)^*\eta_n(\omega)\}$ の部分列 $\{K(\omega)^*\eta_m(\omega)\}$ で $K(\omega)^*\eta_m(\omega)\rightharpoonup\xi(\omega)$ となるものがある．$F(\omega)$ は有界だから $F(\omega)K(\omega)^*\eta_m(\omega)\rightharpoonup\exists\, v\in X^*$ としてよい．実は $v=F(\omega)\xi(\omega)$，$\xi(\omega)+K(\omega)v=0$ が示せて (cf. Vainberg [6])，求める式

$\xi(\omega) + K(\omega)F(\omega)\xi(\omega) = 0$ を得る。 Q.E.D.

References

[1] E. Hille & R.S. Phillips, Functional Analysis and Semigroups, Amer. Math. Soc., 1957.
[2] C. J. Himmelberg, Measurable relations, Fund. Math. 87(1975), 53-72.
[3] S. Itoh, Nonlinear random equations with monotone operators in Banach spaces, Math. Ann. 236(1978), 133-146.
[4] R. Kannan & H. Salehi, Random nonlinear equations and monotonic nonlinearities, J. Math. Anal. Appl. 57 (1977), 234-256.
[5] K. Kuratowski & C. Ryll-Nardzewski, A general theorem on selectors, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 13 (1965), 397-403.
[6] M. M. Vainberg, Variational Method and Method of Monotone Operators in the Theory of Nonlinear Equations, Wiley, 1973.
[7] D.H. Wagner, Survey of measurable selection theorems, SIAM J. Control Optimization 15(1977), 859-903.