数理解析研究所講究録
第338巻 1978年 60-69

Positive Operator の分解

東大　教養　新納文雄
東大教養（研究生）宮島静雄
お茶の水大・理　沢島侑子

§1．序

Banach lattice E 上の positive operator T は自明でない T-不変 closed order ideal をもたないとき irreducible であると言われる。（ここで closed order ideal とは E の閉部分空間 I で条件 $|y| \leq |x|,\ x \in I \Rightarrow y \in I$ をみたすものを言う。）このような作用素は positive operator の中で基本的なものと考えられるが，一般の positive operator が irreducible なものから構成されているとみなせるかどうかが問題となる。これについては沢島-新納［2］が $E = C(X)$ 上の positive contraction T で $\frac{1}{N}\sum_{n \leq N} T^n$ が $N \to \infty$ で収束するものについては irreducible operator への分解が存在することを示し，分解された operator ともとの T のスペクトルとの関係を irreducible operator のスペクトルについての結果

(新納-沢島[1]) を利用して調べた。 その後，宮島[3]，[4]，[5] は同様な結果が contraction の条件なしでEが AM-space，AL-space (= classical L^1) の場合にも成り立つことを示した。 ここではこれらの結果が一般の Banach 束上の operator について拡張できることを示す。§2 で operator とは一応無関係にある種の部分空間 (特に sublattice) が与えられるとそれに応じて Banach lattice の分解が構成できることを示しそれを応用して operator の分解を行う。 §3 ではスペクトルの問題を扱う。

§2. 分解成分の構成法

E を quasi-interior element $e \geq 0$ を持つ Banach 束とし，F は E の closed subspace で e を含み，かつ E から誘導される order に関して lattice になっているようなものとする。 (e が quasi-interior element であるとは次に定義する E_e が E で dense であることを言う。) e で生成される order ideal を E_e と書く。すなわち

$$E_e = \{ x \in E \ ; \ ^{\exists}c \in \mathbb{R} \quad |x| \leq c \cdot e \}$$

であるが E_e 上にもとのノルムより強いノルム $\|\cdot\|_e$ を

$$\|x\|_e = \inf \{ c : \ |x| \leq ce \}$$

で定義する。また $F_e = F \cap E_e$ と書く。 このとき E_e, F_e

は $\|\cdot\|_e$ で考えると AM-space であり Kakutani の表現定理よりある compact Hausdorff space X, Λ があり E_e [resp. F_e] は $C(X)$ [resp. $C(\Lambda)$] と Banach lattice として等長同型となる。 各 $\lambda\in\Lambda$ に対して E の分解成分となるべき Banach 束 E_λ をこれから構成して行く。 まず λ の Λ における近傍 A をとり E の closed order ideal I_A を次のように定義する。

Def. I_A = closure of $\{x\in E\,;\ {}^\exists y\in F_e \quad y|_A=0 \quad |x|\le y\}$

ここで $y|_A=0$ とは F_e を $C(\Lambda)$ と同一視したものとした意味で言っている。 簡単な議論によって $e\notin I_A$ が分るので E 上の semi-norm $\|\cdot\|_A$ を次式で定義できる。

Def. $\|x\|_A=\dfrac{\|x+I_A\|}{\|e+I_A\|}$, ただし $\|x+I_A\|=\inf\{\|x+y\|\,;\ y\in I_A\}$

I_A が order ideal であるから $|x|\le|y|$ ならば $\|x\|_A\le\|y\|_A$ となる。 λ の近傍 A をどんどん小さくした時の $\|x\|_A$ の上極限を $\|x\|_\lambda$ で表わす。すなわち $x\in E$ に対し

Def. $\|x\|_\lambda=\limsup\limits_{A}\|x\|_A \in[0,\infty]$.

こうすると $E_\lambda^{00}=\{x\in E\,;\ \|x\|_\lambda<\infty\}$ の上で $\|\cdot\|_\lambda$ は semi-norm で $x,y\in E_\lambda^{00}$ $|x|\le|y|$ なら $\|x\|_\lambda\le\|y\|_\lambda$ をみたす。 これから $E_\lambda^{00}/\{x\in E\,;\ \|x\|_\lambda=0\}$ を $\|\cdot\|_\lambda$ に関して完備化したものは Banach lattice になるがこれを E_λ^0 で表わす。

なお E_λ^0 のノルムも同じ記号 $\|\cdot\|_\lambda$ で表わす。また $x \in E_\lambda^{00}$ の E_λ^0 における標準像を $[x]_\lambda$ と書く。ところで $\|\cdot\|_A$, $\|\cdot\|_\lambda$ の定義から明らかに $E_e \subset E_\lambda^{00}$ かつ $x \in E_e$ に対し $\|x\|_\lambda \leq \|x\|_e$ がわかる。そこで E_λ^0 内で $[e]_\lambda$ が生成する closed order ideal を E_λ とおくとこれが求める分解成分としてふさわしいものであることは次節で述べるスペクトルに関する定理がこの E_λ を対象として成り立つことによって支持される。また

命題 1．　上に構成した E_λ は quasi-interior element $[e]_\lambda$ を持ち，その中で F_e の像は一次元になる。

ということがわかる。また一般には $E_\lambda = E_\lambda^0$ は成り立たない。各 $\lambda \in \Lambda$ について上のようにして E_λ をつくると E_e から $\prod_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ への写像が標準的に構成されるが，この写像の核については次のようなことがわかる。

命題 2．　もし F がある positive projection P の値域であれば $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \{ x \in E : \|x\|_\lambda = 0 \} \subset \{ x : P|x| = 0 \}$ が成り立つ。

系 1．　F が strictly positive projection P (i.e. $P|x| = 0 \Leftrightarrow |x| = 0$) の値域であれば標準写像 $E_e \longrightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ は単射となる。

系 2.　系 1 と同じ条件下で $x, y \in E_e$ に対しては

$$x \leq y \text{ in } E \iff \forall \lambda \in \Lambda \quad [x]_\lambda \leq [y]_\lambda \text{ in } E_\lambda$$

が成り立つ。

次にこの構成法を positive operator の分解に応用する。E, F, e はこの節の最初に述べた通りとし，T を E 上で定義された positive linear operator とする。さらに F と T の間に $F \subset \{x \in E;\ |Tx| \leq |x|\}$ という関係があるとする。（特に $F \subset \{x \in E;\ Tx = x\}$ ならよい。）このとき

命題 3.　$x \in E_\lambda^{00}$ なら $Tx \in E_\lambda^{00}$ であり写像 T_λ^0 を

$$T_\lambda^0 [x]_\lambda = [Tx]_\lambda \qquad x \in E_\lambda^{00}$$

で定めるとこれは E_λ^0 上の bounded operator となり，また E_λ は T_λ^0-invariant であるので T_λ^0 の E_λ への制限を T_λ と書くと

$$\| T_\lambda \| \leq \| T_\lambda^0 \| \leq \| T \|$$

が各 $\lambda \in \Lambda$ について成り立つ。

（証明）$\lambda \in \Lambda$ を固定し，A を λ の近傍とする。このとき F についての仮定から $y \in F_e$ が $y|_A = 0$ なら $Ty|_A = 0$ である。従って前に定義した ideal I_A は T-invariant となる。これから $\| Tx \|_A \leq \| T \| \| x \|_A$ が得られ，$x \in E_\lambda^{00}$ なら $Tx \in E_\lambda^{00}$

である。ノルムの不等式も以上から明らか. q.e.d.

一般に operator S の resolvent set $\rho(S)$ の unbounded connected component を $\rho_\infty(S)$ で表わすと 命題3で定義した T_λ^0, T_λ について次が成り立つ。

命題4. 各 $\lambda \in \Lambda$ に対し $\rho_\infty(T) \subset \rho_\infty(T_\lambda^0) \subset \rho_\infty(T_\lambda)$ であり $\forall \alpha \in \rho_\infty(T)$ に対し

$$\| R(\alpha, T) \| \geq \| R(\alpha, T_\lambda^0) \| \geq \| R(\alpha, T_\lambda) \|$$

がなりたつ。 ただし $R(\alpha, T) = (\alpha - T)^{-1}$ etc. である。

証明は命題3の場合と同様.

次にいよいよ T を irreducible な成分まで分解する問題を考える。 次の条件をみたす Banach lattice E 上の operator T を対象とするのである。

条件:
1) T は E 上の positive operator
2) E は $Te = e$ をみたす quasi-interior element をもつ。
3) $\frac{1}{N}\sum_{n \leq N} T^n$ は $N \to \infty$ のときある operator P にノルム収束する.

このとき 3) の中の P は positive projection であり $F = PE$ はこの節のはじめに述べた条件をみたしている。(たとえば $x, y \in F$ の F での上限は $P(x^\vee y)$ で与えられる。) また明ら

かに $F \subset \{x \in E : Tx = x\}$ なので今までに述べた命題がすべて成り立ち E_λ^0, E_λ を構成しその上に T から誘導される作用素 T_λ^0, T_λ を考えることができる。また命題3を P について適用して E_λ^0, E_λ 上の operator P_λ^0, P_λ を同様に定義できる。

命題5. T が条件 1)〜3) をみたすとき上記のように構成した T_λ^0, T_λ などは $N \to \infty$ で $\frac{1}{N}\sum_{n \le N} T_\lambda^{0n}$ [resp. $\frac{1}{N}\sum_{n \le N} T_\lambda^{n}$] は P_λ^0 [resp. P_λ] にノルム収束する。また P_λ は値域が1次元の projection になる。

さらに $I_\lambda = \{x \in E_\lambda : P_\lambda|x| = 0\}$ とおいてみるとこれは T_λ-不変な order ideal なので T_λ は quotient Banach lattice E_λ/I_λ 上に標準的に写像を誘導するがこれを T_λ/I_λ と書く。このとき次が言える。(T は 1)〜3) をみたしているとする。)

命題6. 各 $\lambda \in \Lambda$ に対し上で定義した operator T_λ/I_λ は irreducible operator となる。

§3. スペクトルに関する考察.

条件 1)〜3) をみたす T に対し前節で構成した「成分」T_λ, T_λ/I_λ について次の定理が成り立つ。

定理1. 条件 1)～3) をみたす T について次の関係が成立する。

$$\sigma(T)\cap\Gamma=\overline{\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\sigma(T_\lambda)\right)}\cap\Gamma=\overline{\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\sigma(T_\lambda/I_\lambda)\right)}\cap\Gamma$$

ただし $\Gamma=\{\alpha\in\mathbb{C}:|\alpha|=1\}$

以下この定理の証明のあらすじを略述する。

① まず [3] の lemma 2. から

$$\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\sigma(T_\lambda)}\cap\Gamma=\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\sigma(T_\lambda/I_\lambda)}\cap\Gamma$$

がすぐわかる。

② 次に前節の命題 4 から

$$\sigma(T)\cap\Gamma\supset\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\sigma(T_\lambda)}\cap\Gamma$$

が導かれる。

③ 逆の包含関係を示すためには次の事実を証明できれば [2] の定理 6 の証明がほぼそのまま適用できる。その事実とは

(*) $\alpha_0\in\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\rho(T_\lambda)\right)^\circ\cap\Gamma$ が $\sup_\lambda\|R(\alpha_0,T_\lambda)\|<\infty$ を満たせば $\alpha_0\in\rho(T)$

ということである。これの証明は [2], [5] などの場合と異なり，$\|x\|$ が $(\|x\|_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ から決まるとは言えない点に困難がある。この困難は次に述べる lemma により $\sup_\lambda\|R(\alpha_0,T_\lambda)\|<\infty$ というノルム関係式を order の式に表現し前節命題 2 の系 2 によって E における order の関

係を得て，それからEにおけるノルム評価の式を導くという迂回路を辿ることで解決される。上で言ったlemmaとは次である。

lemma. (*)の条件下ではある正数cが存在して任意の$\lambda \in \Lambda$, $x_\lambda \in (E_\lambda)_{[e]_\lambda}$で $P_\lambda|x_\lambda| \geq \frac{1}{2}|x_\lambda|$ をみたすものに対し $P_\lambda|x_\lambda| \leq c \cdot P_\lambda|\alpha_0 x_\lambda - T_\lambda x_\lambda|$.

定理1から[2]と同様にして次のことがわかる。

定理2. 定理1と同じ仮定のもとで$\sigma(T)\wedge\Gamma$は1のベキ乗根からなる有限集合であり，$\alpha_0 \in \sigma(T)\wedge\Gamma$が$\sigma(T)$の孤立点ならばそれは$R(\alpha,T)$の1位のpoleである。

References

[1]. Niiro, F. and I. Sawashima, On the spectral properties of positive irreducible operators in an arbitrary Banach lattice and problems of H.H.Schaefer, Sci. Papers College Gen. Ed. Univ. Tokyo, 16 (1966), 145-183.

[2] Sawashima, I. and F. Niiro, Reduction of a sub-Markov operator to its irreducible components, Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. 24 (1973), 35-59

[3] Miyajima, S., A note on reduction of positive operators, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA 21 (1974), 287-298

[4] ______________, ______________________________ II,

ibid 23 (1976), 245-256.

[5] ______________, On a reduction of positive operators in L^1,

ibid. 24 (1977), 405-424.

(文責 宮島)