数理解析研究所講究録
第 338 巻 1978 年 70-76



# Transitive algebra について

東北大　教養部　　御園生　善尚
医療短大　洲之内長一郎

Hをヒルベルト空間とし，H上のすべての有界線形作用素の作る代数を$\mathcal{B}(H)$で表わす．$\mathcal{B}(H)$の任意の部分集合$\mathcal{S}$に対して，$\mathcal{S}$の任意の作用素と可換な$\mathcal{B}(H)$の作用素の作る代数を$\mathcal{S}'$で表わす．H上の必らずしも有界でない作用素Tに対して，その定義域を$\mathcal{D}(T)$で表わし

$$A \in \mathcal{S},\ x \in \mathcal{D}(T) \Rightarrow Ax \in \mathcal{D}(T) \text{ かつ } ATx = TAx$$

であるとき，Tは$\mathcal{S}$と可換であるという．$\mathcal{S}$の任意の元で不変なHの閉部分空間の全体を$\mathrm{Lat}\,\mathcal{S}$で表わす．Hの$n$ copiesの直和を$H^{(n)}$で表わし，作用素Aの$n$ copiesの直和を$A^{(n)}$で表わすとき，$A^{(n)}$は$H^{(n)}$上の作用素を定義する．$\mathcal{S}^{(n)} = \{A^{(n)} \mid A \in \mathcal{S}\}$とする．

$\mathfrak{A}$が恒等作用素を含む$\mathcal{B}(H)$の弱閉部分代数で，$\mathrm{Lat}\,\mathfrak{A} = \{\{0\}, H\}$であるとき，$\mathfrak{A}$をtransitiveであるという．$\mathfrak{A}^{(n)}$で不変な$H^{(n)}$の閉部分空間$\mathfrak{M}$に対して

$$\mathfrak{M} = \{ x \oplus T_1 x \oplus \cdots \oplus T_{n-1} x \mid x \in \mathcal{D} \}$$

を満たす，共通の定義域 $\mathcal{D}$ ($\neq \{0\}$) をもつ H 上の必らずしも有界でない作用素 $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$ が存在するとき，$\mathfrak{M}$ を $\mathfrak{A}^{(n)}$ の不変グラフ部分空間という．また，ある $n$ に対して，上のような性質をもつ作用素を $\mathfrak{A}$ のグラフ変換という．$\mathfrak{A}$ のグラフ変換は $\mathfrak{A}$ と可換で，さらに $\mathfrak{A}$ が *transitive* ならば $\mathcal{D}(T)$ は $\mathfrak{A}$ で不変であるから，$\overline{\mathcal{D}(T)} = H$ である．

ヒルベルト空間の有界線形作用素の不変部分空間の問題に関連して，*Arveson* は次の定理を証明した．([1],[2])

定理 (*Arveson*)　$\mathfrak{A}$ をヒルベルト空間 H 上の *transitive algebra* とするとき，$\mathfrak{A}$ の任意のグラフ変換が恒等作用素のスカラー倍ならば，$\mathfrak{A} = \mathcal{B}(H)$ である．

$\mathfrak{A}$ をヒルベルト空間 H 上の有界作用素の作る恒等作用素を含む弱閉な代数とする．$x \in H$ ($x \neq 0$) に対して

$$\mathfrak{A}(x) = \{ A \in \mathfrak{A} \mid Ax = 0 \}$$

とすれば，$\mathfrak{A}(x)$ は $\mathfrak{A}$ の弱閉な左側イデアルである．また

$$\mathfrak{M}(x) = \bigcap_{A \in \mathfrak{A}(x)} \mathfrak{N}(A)$$

とすれば，$\mathfrak{M}(x)$ は $x$ を含む H の閉部分空間である．ここに，$\mathfrak{N}(A) = \{ y \in H \mid Ay = 0 \}$ とする．

補題 1　$x \neq 0$，$\mathfrak{M}(x) \ni y \neq 0$ とする．いま，任意の $A \in \mathfrak{A}$ に対して

$$TAx = Ay$$

とすれば，$T$は $\mathfrak{D} = \{Ax \mid A \in \mathfrak{A}\}$ を定義域とし，$\mathfrak{A}$の任意の元と可換な（必らずしも有界でない）作用素である．

証明　$Ax = 0$ ならば $Ay = 0$ であるから，上のようにして定義された$T$が線形であることが容易にわかる．また，任意の $z \in \mathfrak{D}$ に対して

$$z = Bx$$

となる $B \in \mathfrak{A}$ が存在する．ゆえに，任意の $A \in \mathfrak{A}$ に対して

$$ATz = ATBx = ABy = TABx = TAz$$

ゆえに補題が示された．

補題における$T$を $T(x, y)$ で表わす．

$\mathfrak{A}$をH上の *transitive algebra* とすれば，Hの任意のゼロでない元は$\mathfrak{A}$の *cyclic vector* である．ゆえに補題1から，$T(x, y)$ は$\mathfrak{A}$と可換な稠密な定義域をもつ作用素である．

いま$T$を$\mathfrak{A}$と可換な稠密な定義域をもつ作用素とし，$x \in \mathfrak{D}(T)$ がつ $x \neq 0$ とする．$Tx = y$ とすれば

$$Ax = 0 \Rightarrow Ay = ATx = TAx = 0 \quad (A \in \mathfrak{A})$$

であるから，$y = \mathfrak{M}(x)$ で $\{Ax \mid A \in \mathfrak{A}\} \subset \mathfrak{D}(T)$ 上で

$$T = T(x, y)$$

であることは明らかである．

<u>定理2</u>　$\mathfrak{A}$を *transitive algebra* とするとき，つぎの (i)，

(ii) は同値である．

(i) $\mathfrak{A} = \mathcal{B}(H)$

(ii) 任意の1次独立な $x, y \in H$ に対して

$$Ax = 0, \quad Ay \neq 0$$

を満たす $A \in \mathfrak{A}$ が存在する．

証明 (i) ⇒ (ii) は明らかであるから，(ii) ⇒ (i) を示せばよい．$x \in H$，$x \neq 0$ とする．$x$ のスカラー倍でない $y \in H$ に対して

$$Ax = 0, \quad Ay \neq 0$$

を満たす $A \in \mathfrak{A}$ が存在するから

$$\mathfrak{M}(x) = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$$

である．$T$ を $\mathfrak{A}$ の任意のグラフ変換とし，$x \in \mathcal{D}(T)$，$x \neq 0$ とすれば

$$T = T(x, \mu x) \quad \text{on} \quad \mathcal{D}_1 = \{Ax \mid A \in \mathfrak{A}\}$$

すなわち

$$T = \mu I \quad \text{on} \quad \mathcal{D}_1$$

である．任意の $y \in \mathcal{D}(T)$ に対して $T = \mu I$ であることを示そう．

$y$ が $x$ のスカラー倍であるときは明らかである．$y$ が $x$ のスカラー倍でないとする．上と同様にして

$$T = \nu I \quad \text{on} \quad \mathcal{D}_2 = \{Ay \mid A \in \mathfrak{A}\}$$

である．$x-y$ と $y$ は1次独立であるから

$$A(x-y)=0, \quad Ay \neq 0$$

を満たす $A \in \mathfrak{A}$ が存在する．すなわち

$$Ax = Ay \neq 0$$

ゆえに $\mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2 \neq \{0\}$．したがって

$$\nu = \mu$$

すなわち

$$Ty = \mu y$$

したがって Arveson の定理から $\mathfrak{A} = \mathcal{B}(H)$

定理3　$\mathfrak{A}$ が transitive で $\mathfrak{M}(x)$ が有限次元であるような $x \in H$ が存在すれば $\mathfrak{A}' = \{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$ である．

証明　$T \in \mathfrak{A}'$ を恒等的に $0$ でない作用素とすれば，上で注意したように

$$T = T(x, y) \quad \text{on} \quad \mathfrak{D} = \{Ax \mid A \in \mathfrak{A}\}$$

である．$T \neq 0$ であるから $y \neq 0$ である．まず $\mathfrak{M}(y) \subset \mathfrak{M}(x)$ であることを示そう．

$$A \in \mathfrak{A}(x) \Rightarrow Ax = 0, \quad Ay = 0$$

ゆえに

$$\mathfrak{A}(x) \subset \mathfrak{A}(y)$$

したがって

$$\mathfrak{M}(x) \supset \mathfrak{M}(y)$$

ゆえに

$$Tx = y \in \mathfrak{M}(x),\quad T^2x = Ty \in \mathfrak{M}(y) \subset \mathfrak{M}(x)$$

同様にして

$$T^n x \in \mathfrak{M}(x) \qquad (n = 3, 4, \cdots)$$

$\mathfrak{M}(x)$ が有限次元であるから，十分大きな $m$ に対して

$$\alpha_0 x + \alpha_1 T x + \cdots + \alpha_m T^m x = 0$$

かつ $(\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_m) \neq (0, 0, \cdots, 0)$ を満たす $\alpha_0, \alpha_1, \cdots,$ $\alpha_m$ が存在する.

$$p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_m t^m$$

とすれば

$$p(T)x = 0$$

このような多項式のうち最低次の多項式を改めて $p(t)$ とし，$p(\lambda) = 0$ とすれば

$$(T - \lambda I)p_1(T)x = 0$$

ここに $p_1(t)$ は $p(t)$ より低次の多項式であるから

$$p_1(T)x \neq 0$$

すなわち

$$\mathfrak{N}(T - \lambda I) \neq \{0\}$$

$\mathfrak{N}(T - \lambda I) \in \mathrm{Lat}\,\mathfrak{A}$ であるから

$$\mathfrak{N}(T - \lambda I) = H$$

すなわち

$$T = \mu I$$

ゆえに定理が示された.

## 文　献

[1] W. B. Arveson A density theorem for operator algebras. Duke Math. J. 34 (1967), 635 – 647.

[2] H. Radjavi and P. Rosenthal On invariant subspaces and reflexive algebras. Amer. J. Math. 91 (1969), 683 – 692.