数理解析研究所講究録
第 338 巻 1978 年 77-83

Concavity of Certain Maps on Matrix Spaces

北大 応用電気研 安藤 毅

<u>1.序</u> n次の Hermite 行列の空間 H_n には positive semidefinite 性をもとにして自然な順序が入る; $A \geqq B$ とは $A-B$ が positive semi-definite のことである. したがって行列空間での写像に関して, その Convex 性また Concave 性を問題にすることが出来る. 例えば $H_\ell \times H_m$ の凸部分集合から H_n への写像ΦがConvex であるとは

$$\Phi(\lambda A_1 + (1-\lambda)A_2,\ \lambda B_1 + (1-\lambda)B_2)$$
$$\leqq \quad \lambda\Phi(A_1, B_1) \ + \ (1-\lambda)\Phi(A_2, B_2) \qquad (0<\lambda<1)$$

以下の研究は Lieb [3] により証明された定理;

$(A, B) \longmapsto A^{1-p} \otimes B^p \quad (0<p<1)$ は $A \geqq 0, B \geqq 0$ で concave, に触発され, 更に一般な Concavity定理を確立することを目標とした. 応用として行列 $A=(a_{ij})$ $B=(b_{ij})$ の Hadamard積 $A*B=(a_{ij}b_{ij})$ に対する種々の上,下からの評価が出る. 詳細は Lin. Alg. Appl. に出版予定.

2. 基本的演算　以下 n 次の positive definite 行列の全体を H_n^+ とかく.

定理 1　$A, B \in H_n^+$ のとき
$$BA^{-1}B = \text{minimum}\left\{C \geqslant 0 : \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \geqslant 0\right\}$$
となり, したがって写像 $(A,B) \longmapsto BA^{-1}B$ は convex.

これから直ちに Anderson-Duffin [1] の定理
$$(A,B) \longmapsto A!B \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{\tfrac{1}{2}(A^{-1}+B^{-1})\right\}^{-1} \quad \text{concave}$$
が出る. 実際 $A!B = 2\{B - B(A+B)^{-1}B\}$ である.

定理 2. (Pusz-Woronowicz [4])　$A, B \in H_n^+$ のとき
$$A\#B \overset{\text{def}}{=\!=} A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}$$
$$= \text{maximum}\left\{C \geqslant 0 ; \begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix} \geqslant 0\right\}$$
となり, したがって写像 $(A,B) \longmapsto A\#B$ は concave.

ここで maximum の存在は写像 $A \longmapsto A^{\frac{1}{2}}$ が H_n^+ で順序を保存することから出る.

$A!B$, $A\#B$ はそれぞれ A, B の調和平均, 幾何平均と考えられるもので, A と B が可換なら $A\#B = (AB)^{\frac{1}{2}}$ である. 一般に次の算術－幾何－調和平均不等式が成立つ.

$$\frac{1}{2}(A+B) \geqq A\#B \geqq A!B.$$

これ等の演算が $H_n \longmapsto H_m$ の positive linear map Φ で filtre をかけられたときどうなるを見ると，よく知られた Kadison の不等式（例えば[2]）を使うと

$$\Phi(A\#B) \leqq \Phi(A)\#\Phi(B), \quad \Phi(A!B) \leqq \Phi(A)!\Phi(B)$$

が出る，この不等式から容易に写像 $H_n^+ \ni A \longmapsto \Phi(A^{-1})^{-1}$ の concavity が導かれる．

3. Operator-monotone 函数．

Hermite 行列から新らしい Hermite 行列を生み出す一つの方法は functional calculus である．$f(\lambda)$ が $(0,\infty)$ 上の実数値連続函数のとき f の A による値を $f[A]$ とかこう．$f(\lambda)$ が順序を保存するとき，すなわち $A \leqq B \Rightarrow f[A] \leqq f[B]$ の性質をもつとき operator-monotone と呼ぶ．よく知られた Löwner の定理（[2] を見よ）によれば $f(\lambda)$ が operator-monotone である必充条件は，$\alpha \in R$，$\beta \geqq 0$ と $(-\infty, 0]$ 上の正測度 $\mu(\cdot)$ を使って

$$f(\lambda) = \alpha + \beta\lambda + \int_{-\infty}^{0} \frac{1+\lambda t}{t-\lambda}\, d\mu(t)$$

と積分表示をもつことである．$f(\lambda) \geqq 0$ のときは

$$f(\lambda) = \gamma + \beta\lambda + \int_{0}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda+t}\, d\nu(t)$$

の形にかける，但し $\gamma, \beta \geqq 0$．$\nu(\cdot)$ は $[0,\infty)$ の正測度．
最も重要な operator-monotone 函数としては $\log\lambda$，λ^p $(0 < p \leqq 1)$ がある．
上の積分表示と定理1を使うと次の定理が容易に出る．

<u>定理3.</u> $f(\lambda)$ が operator-monotone のとき H_n^+ からの写像 $A \longmapsto f[A]$ は concave，しかし $A \longmapsto A \cdot f[A]$ は convex.

$H_n \longmapsto H_m$ の positive linear map Φ で，$\Phi(I_n) = I_m$ なるものを使って filtre をかけると

$$\Phi(f[A]) \leqq f[\Phi(A)]$$

となる．

<u>4. Tensor 積.</u> 2つの Hermite 行列 A, B の tensor 積 $A \otimes B$ はまた Hermite 行列になり，A, B が positive definite なら $A \otimes B$ も positive definite になる．tensor 積の演算と＃演算の可換性と，算術－幾何平均不等式を使うと容易に次がでる．

<u>定理4.</u> Φ, Ψ が共に $H_n^+ \longmapsto H_m^+$ の concave 写像なら，写像 $(A,B) \longmapsto \Phi(A)^{-1} \otimes \Psi(B)^{-1}$ は convex.

これから直ちに Lieb の定理[3]； $0 < p, q \leq 1$ のとき写像 $(A,B) \longmapsto A^{-p} \otimes B^{-q}$ は convex，が出る。

定理 1 を少し改良すれば，Φ, Ψ が共に $H_n^+ \longmapsto H_m^+$ の concave 写像であれば $(A,B) \longmapsto \Phi(A) ! \Psi(B)$ も concave 写像になることがわかるから，§3 の積分表示と結びつけると次の二つの主要定理が出る。

<u>定理 5.</u> $f(\lambda) \geq 0$ が operator-monotone で Φ, Ψ が共に $H_n^+ \longmapsto H_m^+$ の concave 写像のとき

$$(A,B) \longmapsto f[\Phi(A)^{-1} \otimes \Psi(B)] \cdot (\Phi(A) \otimes I_m)$$

も concave な写像になる。

<u>定理 6.</u> $f(\lambda)$ が operator-monotone，Φ が affine Ψ が concave 写像のとき

$$(A,B) \longmapsto f[\Phi(A) \otimes \Psi(B)^{-1}] \cdot (\Phi(A) \otimes I_m)$$

は convex な写像になる。

定理 5 からは $f(\lambda) = \lambda^p$ $(0 < p < 1)$ として序にのべた Lieb の定理が出る，また定理 6 からは次がでる

$$(A,B) \longmapsto A^{1+p} \otimes B^p \quad (0 < p < 1) \quad \text{convex.}$$

$$(A,B) \longmapsto (A \log A) \otimes I_m - A \otimes \log B \quad \text{convex.}$$

5. Hadamard 積. Tensor 積と並んで興味あるのは Hadamard 積である; $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})\in H_n$ に対しその Hadamard 積 $A*B \overset{\text{def}}{=} (a_{ij}b_{ij})$. 重要なのは可換性 $A*B=B*A$ である. $A*B$ は tensor 積 $A\otimes B$ の主小行列になっている, この事は次のように表現すると使い良い; H_{n^2} から H_n への positive linear map Φ があり

$$\Phi(A\otimes B)=A*B \quad , \quad \Phi(I_{n^2})=I_n .$$

このことから, 直ちに $A, B\in H_n^+$ なら $A*B\in H_n^+$ がでる.
また前節の主定理を使うと, $H_n^+\times H_n^+$ からの写像として

$$(A,B)\longmapsto A^{1/p}*B^{1/q} \quad (1/p+1/q=1) \text{ は Concave,}$$

$$(A,B)\longmapsto A^{-1/p}*B^{1/q} \quad (1/q-1/p=1,\ q\geqq 1/2) \text{ は Convex}$$

等がでる, 例えば上の concavity は

$$\sum_{i=1}^{k}(A_i*B_i) \leqq \Big\{\sum_{i=1}^{k}A_i^p\Big\}^{1/p}*\Big\{\sum_{i=1}^{k}B_i^q\Big\}^{1/q}$$

といった Hölder 型の不等式となる.

定理 7. $A, B\in H_n^+$ のとき

$$A*B \leqq (A^p*I)^{1/p}(B^q*I)^{1/q} \quad (1/p+1/q=1).$$

これには $C \overset{\text{def}}{=} (A^p*I)^{1/p}$, $D\overset{\text{def}}{=}(B^q*I)^{1/q}$ として上の concavity から出る不等式

$$A*B \leqslant \frac{d}{d\varepsilon}(C^p+\varepsilon A^p)^{1/p} * (D^q+\varepsilon B^q)^{1/q}\Big|_{\varepsilon=0}$$

の右辺を計算すればよい。 同様に上の Convexity から

<u>定理 8.</u> $A, B \in H_n^+$ のとき

$$A*B \geqslant (A^{-p}*I)^{-1/p} \cdot (B^q*I)^{1/q}. \quad (1/q - 1/p = 1,\ p \geqslant 1 \geqslant q \geqslant 1/2)$$

$A*B$ が $A \otimes B$ から Φ を通して得られることを考えると, operator - monotone 函数 $f(\lambda) = \log\lambda$ を使って

<u>定理 9.</u> $\log[A*B] \geqslant (\log A + \log B)*I$.

したがって $A \in H_n^+$ のとき $A*A^{-1} \geqslant I$ がわかる.

<u>定理 10.</u> $A*B \geqslant (A\#B)*(A\#B)$.

これは Hadamard 積の可換性と Φ と演算 ※ の関連から容易にわかる.

<u>文 献</u>

1. W. N. Anderson - R. J. Duffin, J. Math. Anal. Appl. 26 (1969) 576-594
2. Ch. Davis, in Proc. Symp. Pure Math. 「Convexity」 Amer. Math. Soc. 1963
3. E. Lieb, Advance in Math. 11 (1973), 267-288
4. W. Pusz - S. L. Woronowicz, Rep. Math. Phys 8 (1975) 159-170