

連分数最良化の実用的計算法

日立システム研 浜田 穂積

1. はじめに

Moshly¹⁾, 山内²⁾ などにより, 連分数の最良化は研究されている。しかし手計算による式の展開などのため, 高次の公式の計算は現実的には解決が困難である。一方多項式の最良化は, 計算機を用いる, 単純で汎用的な手法が種々開発されており, 高次の公式を得るにはむしろこの方が現実的である。連分数の最良化に, 多項式の場合の手法をとり入れようとしても, なお高次の非線型性が残り, 計算を困難にしている。

この困難を克服するために反復法を用いたが, ここではその方法を示し, 併せて計算結果をも示す。

2. 計算の方針

多項式の最良化の方法として, テーラー展開の係数に対する補正量を計算するものを山内²⁾ が示し, 戸田²⁾ が具体的計算を行なっている。この方法の特徴は, 計算にそれほど高い

精度を用いなくとも、かなり高精度の公式用の係数が計算できることにある。その理由は次のことであろうと考えられる。すなわち、 $\sin x$ を $\frac{\pi}{4} \geq |x|$ の範囲で近似する場合を考えると、

$$(1+d_1)x + \left(-\frac{1}{6}+d_2\right)x^3 + \left(\frac{1}{120}+d_3\right)x^5 + \left(-\frac{1}{5040}+d_4\right)x^7 \\ \simeq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} - \dots = \sin x \quad (1)$$

の近似を行なうことは、

$$d_1x + d_2x^3 + d_3x^5 + d_4x^7 \\ \simeq \frac{x^9}{362880} - \frac{x^{11}}{39916800} + \dots = u \quad (2)$$

の近似を行なうことと等価である。しかるに、(1)と(2)の値は $|x| \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲でそれぞれ

$$|\sin x| \leq 7.1 \times 10^{-1}, \quad |u| \leq 3.1 \times 10^{-7} \quad (3)$$

と、値のオーダーにかなりの差がある。また、補正量のオーダーが、被補正量のそれに比べてかなり小さいこと。などがその理由と考えられる。

さて、有理式の最良化を、多項式のそれと同程度に能率的な方法で計算したい。有理式の最良化の具体的計算法として山下³⁾のプログラムが知られている。ただこれは原理的計算法というふうなもので、上述の多項式の場合の工夫は含まれていないため、多項式の場合と比べ、収束も遅く、あまり高い精度の公式も得られな。そこで多項式の場合からの類推から、有限項の展開の係数に対する補正量の計算により最良

近似有理式を得ることを考える。有理式の形 z の展開の有限項の打ちりの最も簡単な形の z は Padé 展開 z であるから、Padé 展開の係数に対する補正量として計算してみた。その結果の一例は次の通り z である。

$$\tan x \approx \frac{(105+C_1)x + (-10+C_3)x^3}{105 + (-45+C_2)x^2 + (1+C_4)x^4} \quad (4)$$

において、各補正量 C_i は次の通り z である。

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -0.0000014872 \\ C_2 &= -0.0592563375 \\ C_3 &= -0.0591858053 \\ C_4 &= 0.0202700272 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$|x| \leq \frac{\pi}{4} \text{ において } |\text{相対誤差}| \leq 1.42 \times 10^{-8}$$

この方法は先に述べた山下のプログラムより多少改良された結果と z ったが、多項式の場合ほど効果的ではなかった。その理由の最大のものは次に述べること z である。多項式との比較のため、先の $\sin x$ の数値を示す。

$$\sin x \approx x \left(1 + d_1 - \frac{x^2}{6} \left(1 + d_2 - \frac{x^2}{20} \left(1 + d_3 - \frac{x^2}{42} (1 + d_4) \right) \right) \right) \quad (6)$$

において、各補正量 d_i 等は次の通り z である。

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= -0.0000000032382 \\ d_2 &= -0.000000986546 \\ d_3 &= -0.0001580256 \\ d_4 &= -0.01710817 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$|x| \leq \frac{\pi}{4} \text{ において } |\text{相対誤差}| \leq 3.24 \times 10^{-9}$$

(5)と(7)を比較すると、(7) z は小数点以下の有効桁数を多く必要とする係数ほど、値(の絶対値)が小 z であるため、浮動

小数点演算の性質とよくマッチして、好都合な性質であることがわかる。筆者の計算した例では、Padé 展開の係数に対する補正量 c_i と多項式の係数に対する補正量 d_i (番号は(4)(b)のようにとる) には、すべて次の関係が認められた。

$$|c_2| \approx |c_3| > |c_4| > \dots > |c_n| \gg |c_1| \quad (8)$$

$$|d_1| < |d_2| < |d_3| < \dots < |d_n| \quad (9)$$

ところで(4)を次の形の連分數

$$\tan x \approx \frac{x}{1+d_1} + \frac{-x^2}{3+d_2} + \frac{-x^2}{5+d_3} + \frac{-x^2}{7+d_4} \quad (10)$$

に展開した場合、 $d_i=0$ とすれば(10)の右辺は $\tan x$ の無限連分數展開の打ち切りであるから d_i は補正量である。このとき d_i 等の値は次の通りである。

$$d_1 = 0.000000014164$$

$$d_2 = -0.00000607588$$

$$d_3 = 0.0011660946$$

$$d_4 = -0.14065714$$

$$|x| \leq \frac{\pi}{4} \text{ において } |\text{相対誤差}| \leq 1.42 \times 10^{-8} \quad (11)$$

この場合も(9)の関係が成り立つので、好都合な性質である。

したがって、有理式の形の最良近似式は、連分數の係数を求める方針とすればよい結果が期待できる。

3. 連分數打ち切りの最良化

連分數の表現は次に示す漸化式による。

$$f_i(x) = a_i + \frac{b_i x}{f_{i+1}(x)} \quad (12)$$

視近似関数は $x/f_i(x)$, $1/f_i(x)$ などの形をとることが多い。

また、奇関数、偶関数では右辺の分子は $b_i x^2$ とするが、ここでは一般的な場合について述べる。 $f_i(x)$ に対応して、近似関数の場合は

$$g_i(x) = a_i + d_i + \frac{b_i x}{g_{i+1}(x)}, \quad g_n(x) = a_n + d_n \quad (13)$$

である。

最良化の計算法は通常行なわれる、繰返しによるものとするとき、 $E(x)$, $\frac{\partial E(x)}{\partial d_i}$ ($E(x)$ は誤差関数) は次の通りである。
(被近似関数は $x/f_i(x)$ とし、相対誤差の最良化の場合)

$$E(x) = \frac{x/g_i(x) - x/f_i(x)}{x/f_i(x)} \\ = -\frac{1}{g_i} \left(d_i - \frac{b_i x}{f_2 g_2} \left(d_2 - \dots - \frac{b_{n-1} x}{f_n g_n} \left(d_n - \frac{b_n x}{f_{n+1}} \dots \right) \right) \right) \quad (14)$$

$$\frac{\partial E(x)}{\partial d_i} = (-1)^i f_i \frac{b_1 \dots b_{i-1}}{(g_1 \dots g_i)^2} x^{i-1} \quad (15)$$

$\tan x$ の最良化の場合は、 $a_i = 2^i - 1$, $b_i = -1$ とし、 x を x^2 で置き換えればよいが、近似区間が原点について対称であるから、 $0 \leq x^2 \leq \frac{\pi}{4}$ と考えよう。この計算結果を付録に示す。
MRE は最大相対誤差である。次の列(右から第3列)は、第1のデータは偏差点における誤差のばらつき(のばり)を示すもので、次の値である。偏差点における誤差を e_j ($n+1$ 個) とするとき、

$$-\log_{10} \frac{\max_j |e_j| - \min_j |e_j|}{\max_j |e_j|} \quad (16)$$

であり、この値が4以上であれば十分最良近似であるといふことと考えられる。(n=2 のとき 15.6 である) この列の他のデータは、対応する d_i にどれだけの変化を与えれば、最大相対誤差にどれだけの変化を受けられるかを示すもので、 d_i の有効数字を定めるためのものである。すなわち、

$$p_i = \log_{10} \left(\max_j \left| \frac{\partial E(x_j)}{\partial d_i} \right| / \max_j |e_j| \right) \quad (17)$$

であるとき、 d_i を小数点以下 $p_i + 4$ 桁程度採用すればよい、といふことを示している。

右第2列の最初のデータは、収束するまでに要した繰返し数、残りは偏差点の座標 (x^2 の値) である。右端の列は偏差点における誤差の符号と、ばらつきをチェックするためのものである、 $\max_j |e_j|$ で正規化してある。

$\exp x$ の最良化も同様にできる。この場合は

$$e^x = 1 + \frac{2x}{h(x) - x} \quad (18)$$

とするとき

$$h(x) = 2 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{10} + \dots + \frac{x^2}{4i-2} + \dots \quad (19)$$

である。また $h(x)$ の近似式を $\theta(x)$ とするとき

$$\theta(x) = 2 + d_1 + \frac{x^2}{6 + d_2} + \frac{x^2}{10 + d_3} + \dots + \frac{x^2}{4n-2 + d_n} \quad (20)$$

であるとする。このとき最良化の対象とする関数を

$$E(x) = x \cdot \frac{h(x) - \theta(x)}{h(x)\theta(x) - x^2} \quad (21)$$

とすれば

$$e^x = \frac{\theta(x)+x}{h(x)-x} = \frac{1-E(x)}{1+E(x)} \cdot \frac{\theta(x)+x}{\theta(x)-x} \quad (22)$$

また相対誤差は

$$\frac{2E(x)}{1-E(x)} \quad (23)$$

であり、ほぼ最良であることが対称性により近似式が得られる。この場合の $E(x)$, $\frac{\partial E(x)}{\partial x}$ は(14), (15)とほとんど同じで、ただそれに一定の因子が掛けられたものである。この場合の結果も付録に示す。

4. 結言

有理式の形の最良近似式は、連分教展開の打ちりの係数に対する補正量の計算とすれば、能率的に計算でき、かつ高い精度の公式まで得られることと、その計算法を示した。また計算結果の一部の数値データも示した。この例の場合計算精度は16進14桁(10進で約16桁)で、 $\tan x$ では 4×10^{-38} , $\exp x$ では実に 5×10^{-56} の誤差の公式まで計算できている。この程度の好結果が得られるのは、近似区間内で比較的性質のよい関数の場合であるといえようが、実際的にはこの方法でカバーできる範囲はかなり広いと考えている。なお、関数ル-4 ンでの計算法として、多項式の比の形の有理式を用いたときは、ここで述べた最良近似連分教を変形して得る方がよいということはいうまでもないであろう。

参考文献

- [1] Maehly, H. J.; Methods for Fitting Rational Approximations,
Part I: J. of ACM 7 (1960) 150-162, Part II, III: J. of ACM 9
(1962) 257-277
- [2] 山内二郎, 森口繁一, 一松信編: 電子計算機のための数
値計算法 II, 培風館 (1967)
- [3] 山下真一郎: 有理式の最良近似式を求めるプログラム,
情報処理, 10, 6 (1967)

付録

TAN(X) R=0,7853982

N	I	D(I)	MRE			
				15,60	2	-1,000
2	1	1,3037929752988941E-03	1,302E-03	2,99	0,331704	1,000
	2	-1,2934853229009223E-01		1,86	0,000000	-1,000
				7,54	2	-1,000
3	1	-5,7731485243172650E-06	5,773E-06	5,34	0,476126	1,000
	2	1,3694982611168618E-03		4,22	0,168095	-1,000
	3	-1,3667813684153797E-01		2,63	0,000000	1,000
				7,64	2	-1,000
4	1	1,4163885271159320E-08	1,416E-08	7,95	0,533750	1,000
	2	-6,0758830143290816E-06		6,83	0,323033	-1,000
	3	1,1660945892362336E-03		5,23	0,097712	1,000
	4	-1,4065714315807172E-01		3,35	0,000000	-1,000
				7,56	2	-1,000
5	1	-2,2087139615001369E-11	2,209E-11	10,76	0,562124	1,000
	2	1,5000755492569874E-08		9,63	0,414687	-1,000
	3	-4,6210337482030911E-06		8,04	0,224093	1,000
	4	9,9209191933463840E-04		6,15	0,063104	-1,000
	5	-1,4316379746727778E-01		4,05	0,000000	1,000
				7,81	2	-1,000
6	1	2,3633444611778217E-14	2,383E-14	13,73	0,578125	1,000
	2	-2,3540026889619641E-11		12,60	0,470412	-1,000
	3	1,0619905639232129E-09		11,01	0,318768	1,000
	4	-3,4755209849721913E-06		9,12	0,161955	-1,000
	5	8,5748558367006495E-04		7,00	0,043899	1,000
	6	-1,4488805457329527E-01		4,72	0,000000	-1,000
				7,89	2	-1,000
7	1	-1,8855338417254486E-17	1,886E-17	16,83	0,588020	1,000
	2	2,5549612874078809E-14		15,70	0,506270	-1,000
	3	-1,5865288514216596E-11		14,11	0,385642	1,000
	4	7,3125693631234455E-09		12,22	0,248343	-1,000
	5	-2,6719590052334541E-06		10,11	0,121603	1,000
	6	7,5299941953372334E-04		7,82	0,032227	-1,000
	7	-1,4614684503036658E-01		5,39	0,000000	1,000
				8,04	2	-1,000
8	1	1,1405678194574928E-20	1,141E-20	20,05	0,594558	1,000
	2	-2,0299473158817713E-17		18,92	0,530549	-1,000
	3	1,6608723622334641E-14		17,33	0,433307	1,000
	4	-1,0225133404570313E-11		15,44	0,316409	-1,000
	5	5,1403234254735936E-09		13,32	0,197175	1,000
	6	-2,1060002799298768E-06		11,04	0,094290	-1,000
	7	6,7033512809807316E-04		8,60	0,024632	1,000
	8	-1,4710624440613845E-01		6,05	0,000000	-1,000
				8,22	2	-1,000
9	1	-5,4464420392637462E-24	5,446E-24	23,37	0,599103	1,000
	2	1,2327103707085259E-20		22,24	0,547695	-1,000
	3	-1,2846997992948529E-17		20,65	0,468060	1,000
	4	1,0168230759997643E-14		18,76	0,368952	-1,000
	5	-6,6976892375542438E-12		16,65	0,261795	1,000
	6	3,7167100410534930E-09		14,36	0,159540	-1,000
	7	-1,6977567540546090E-06		11,92	0,075080	1,000
	8	6,0359747306210732E-04		9,36	0,019425	-1,000
	9	-1,4786170918656543E-01		6,70	0,000000	1,000

10	1	2.1052985384415546E-27	2.105E-27	8,26	2	-1,000
	2	-5.9058802065625549E-24		28,78	0,602389	1,000
	3	7.6372358762564936E-21		25,65	0,560230	-1,000
	4	-7.5490282592585003E-18		24,06	0,494019	1,000
	5	6.2908621159072388E-15		22,17	0,409648	-1,000
	6	-4.5135597307051341E-12		20,06	0,314922	1,000
	7	2.7813805632112927E-09		17,77	0,218956	-1,000
	8	-1.3955034095754975E-06		15,33	0,131340	1,000
	9	5.4871535445648846E-04		12,77	0,061113	-1,000
	10	-1.4847201227062463E-01		10,11	0,015704	1,000
				7,34	0,000000	-1,000
				8,43	2	-1,000
11	1	-6.7224351386305720E-31	6.722E-31	30,28	0,604840	1,000
	2	2.2893349786925854E-27		29,15	0,569662	-1,000
	3	-3.5968667143214196E-24		27,56	0,513848	1,000
	4	4.3398059614398719E-21		25,67	0,441515	-1,000
	5	-4.4555509475612692E-18		23,55	0,358160	1,000
	6	3.9983327093859250E-15		21,27	0,270335	-1,000
	7	-3.1319327324055056E-12		18,83	0,185172	1,000
	8	2.1020114565823002E-09		16,27	0,109795	-1,000
	9	-1.1662500329357658E-06		13,60	0,050667	1,000
	10	5.0285046246765144E-04		10,84	0,012955	-1,000
	11	-1.4897532178408140E-01		7,99	0,000000	1,000
				7,53	2	-1,000
12	1	1.8030569610452629E-34	1.803E-34	33,85	0,608716	1,000
	2	-7.3278728459006019E-31		32,72	0,576929	-1,000
	3	1.3748018375295661E-27		31,13	0,529303	1,000
	4	-1.9876897376567090E-24		29,24	0,466797	-1,000
	5	2.4621724171931553E-21		27,13	0,393393	1,000
	6	-2.6952164477796394E-18		24,84	0,313900	-1,000
	7	2.6179775251250709E-15		22,40	0,233675	1,000
	8	-2.2328404895621093E-12		19,84	0,158270	-1,000
	9	1.6344248386103243E-09		17,17	0,093028	1,000
	10	-9.8859662344198267E-07		14,41	0,042662	-1,000
	11	4.6398061234414086E-04		11,55	0,010868	1,000
	12	-1.4939750343226583E-01		8,63	0,000000	-1,000
				6,63	2	-1,000
13	1	-4.1195409575818218E-38	4.120E-38	37,49	0,608185	1,000
	2	1.9696052385129302E-34		36,36	0,582648	-1,000
	3	-4.3491250667080486E-31		34,77	0,541563	1,000
	4	7.4204979108986228E-28		32,88	0,487124	-1,000
	5	-1.0904158753435046E-24		30,77	0,422275	1,000
	6	1.4276739951521954E-21		28,48	0,350620	-1,000
	7	-1.6788109557254356E-18		26,04	0,276235	1,000
	8	1.7637124242574207E-15		23,48	0,203453	-1,000
	9	-1.6308950626053843E-12		20,81	0,136608	1,000
	10	1.2945834714641308E-09		18,05	0,079756	-1,000
	11	-8.4831606748568108E-07		15,19	0,036400	1,000
	12	4.3063747318949525E-04		12,26	0,009246	-1,000
	13	-1.4975670776490208E-01		9,26	0,000000	1,000

EXP(X) R=0,3465736

N	I	D(I)	MRE			
2	1	1,2505728199246584E-05	4,340E-07	12,73	2	-1,000
	2	1,5019523956101914E-02		5,61	0,280522	1,000
3	1	3,7581157510490897E-09	9,310E-11	3,13	0,107236	-1,000
	2	9,0094824987402926E-06		12,70	2	1,000
	3	1,5016657648526547E-02		9,27	0,312291	-1,000
4	1	5,7592468253789379E-13	1,109E-14	6,80	0,216173	1,000
	2	2,3013920010109912E-09		3,87	0,077169	-1,000
	3	6,8965783201936630E-06		13,50	2	-1,000
	4	1,5015618181702669E-02		13,20	0,325687	1,000
5	1	5,3383808776095991E-17	8,412E-19	10,72	0,265534	-1,000
	2	3,1999265143143972E-13		7,80	0,173337	1,000
	3	1,4917924794345147E-09		4,58	0,060205	-1,000
	4	5,5633694691455408E-06		6,58	1	1,000
	5	1,5015118547672490E-02		17,52	0,332542	-1,000
6	1	3,3122843081152947E-21	4,416E-23	14,84	0,291578	1,000
	2	2,7796593563247891E-17		11,92	0,226991	-1,000
	3	1,8512987527090879E-13		8,71	0,144002	1,000
	4	1,0356869183867694E-09		5,27	0,049335	-1,000
	5	4,6556750889044544E-06		6,94	1	-1,000
	6	1,5014838755060688E-02		21,60	0,336506	1,000
7	1	1,4714038901329236E-25	1,700E-27	19,12	0,306888	-1,000
	2	1,6464065456834710E-21		16,20	0,259435	1,000
	3	1,4803422581677162E-17		12,99	0,196901	-1,000
	4	1,1502549747430354E-13		9,55	0,122916	1,000
	5	7,5841142089346566E-10		5,95	0,041782	-1,000
	6	4,0002514236449248E-06		7,23	1	1,000
	7	1,5014665937644062E-02		26,01	0,339002	-1,000
8	1	4,9094584912732290E-30	5,005E-32	23,53	0,316616	1,000
	2	7,0629234221069461E-26		20,61	0,280397	-1,000
	3	8,2322200164928441E-22		17,40	0,231920	1,000
	4	8,4436207872814150E-18		13,97	0,173304	-1,000
	5	7,5918679419097218E-14		10,36	0,107110	1,000
	6	5,7843261809175699E-10		6,61	0,036232	-1,000
	7	3,5055541995609174E-06		7,48	1	-1,000
	8	1,5014551588765371E-02		30,54	0,340674	1,000
9	1	1,2753104925904539E-34	1,163E-36	28,07	0,323175	-1,000
	2	2,2933880129058559E-30		25,14	0,294671	1,000
	3	3,3604415030680099E-26		21,93	0,256133	-1,000
	4	4,3867863588925120E-22		18,50	0,208871	1,000
	5	5,1276093588457596E-18		14,89	0,154494	-1,000
	6	5,2592384641911087E-14		11,14	0,094854	1,000
	7	4,5535119335016159E-10		7,27	0,031981	-1,000
	8	3,1192314832511970E-06		7,69	1	1,000
	9	1,5014471950731382E-02		35,18	0,341848	-1,000
				32,70	0,327798	1,000
				29,78	0,304808	-1,000
				26,56	0,273504	1,000
				23,13	0,234739	-1,000
				19,53	0,189569	1,000
				15,78	0,139227	-1,000
				11,90	0,085086	1,000
				7,92	0,028622	-1,000

				7,87	1	-1,000
10	1	2,6520784728307247E-39	2,189E-41	39,90	0,342703	1,000
	2	5,8290603839808654E-35		37,42	0,331178	-1,000
	3	1,0482368526109931E-30		34,50	0,312256	1,000
	4	1,694202590207451E-26		31,29	0,286359	-1,000
	5	2,4881012710359716E-22		27,86	0,254064	1,000
	6	3,2811419785502835E-18		24,25	0,216094	-1,000
	7	3,7878720989661955E-14		20,50	0,173296	1,000
	8	3,6760338836132970E-10		16,63	0,126625	-1,000
	9	2,8093264295481767E-06		12,64	0,077125	1,000
	10	1,5014414240595419E-02		8,56	0,025901	-1,000
				8,07	1	1,000
11	1	4,5146463268085697E-44	3,402E-46	44,71	0,343346	-1,000
	2	1,1907412872866322E-39		42,23	0,333723	1,000
	3	2,5774988636019467E-35		39,31	0,317884	-1,000
	4	5,0471084777248979E-31		36,10	0,296124	1,000
	5	9,0761600698965902E-27		32,67	0,268847	-1,000
	6	1,4894885153776470E-22		29,06	0,236562	1,000
	7	2,1924095753199824E-18		25,31	0,199870	-1,000
	8	2,8160897238665831E-14		21,44	0,159454	1,000
	9	3,0290231765024620E-10		17,45	0,116066	-1,000
	10	2,5552751582990189E-06		13,37	0,070516	1,000
	11	1,5014371072457277E-02		9,21	0,023652	-1,000
				7,25	1	-1,000
12	1	6,4068248400642276E-49	4,441E-51	49,60	0,343841	1,000
	2	1,9970427266681404E-44		47,12	0,335686	-1,000
	3	5,1208986659518655E-40		44,20	0,322238	1,000
	4	1,1937463852757139E-35		40,98	0,303708	-1,000
	5	2,5760450970163208E-31		37,55	0,280389	1,000
	6	5,1334680546085089E-27		33,95	0,252647	-1,000
	7	9,3340056366216114E-23		30,20	0,220921	1,000
	8	1,5186540129583026E-18		26,32	0,185710	-1,000
	9	2,1493523320428086E-14		22,34	0,147570	1,000
	10	2,5385332350870401E-10		18,26	0,107102	-1,000
	11	2,3432632977312761E-06		14,09	0,064944	1,000
	12	1,5014337928885689E-02		9,84	0,021763	-1,000
				6,36	1	1,000
13	1	7,6954991555699224E-54	4,939E-56	54,55	0,344231	-1,000
	2	2,7985186008430615E-49		52,07	0,337232	1,000
	3	8,3876261414759264E-45		49,15	0,325674	-1,000
	4	2,2941743860115923E-40		45,94	0,309712	1,000
	5	5,8446062627930774E-36		42,51	0,289562	-1,000
	6	1,3873617365327650E-31		38,90	0,265495	1,000
	7	3,0431358086484149E-27		35,15	0,237838	-1,000
	8	6,0804732806425532E-23		31,27	0,205965	1,000
	9	1,0843263075337222E-18		27,29	0,173292	-1,000
	10	1,6770819261059198E-14		23,21	0,137276	1,000
	11	2,1579797159879636E-10		19,04	0,099402	-1,000
	12	2,1636745133329660E-06		14,80	0,060184	1,000
	13	1,5014311929693630E-02		10,48	0,020152	-1,000