数理解析研究所講究録
第 341 巻 1978 年 1-13

Fourier超函数について

上智大 理工　佐分利 豊

Fourier超函数は，佐藤先生が論文[16]において、一変数の場合に導入され，その後，河合先生が[6]，[7]において，定数係数線型偏微分方程式論への応用を見込み，多変数の場合の理論を整備されました。最近では、伊藤ー長町両先生による[4]，長町ー麦林両先生による[12]等において，ベクトル値のFourier超函数の理論が開発され、公理論的場の量子論に応用されています。（長町ー麦林[10]，[11]，[12]，[13]，長町[9]等を見て下さい。）

Fourier超函数は，そのFourier変換が定義できるよう，増大度付きの正則函数の実領域への境界値として表わされるものです。

ここでは，modified Fourier超函数と呼ばれるもの（長町ー麦林[11]，[12]では，II型のFourier超函数と呼ばれている。）についての基礎理論について述べます。modified Fourier超函数の理論は，河合[7]において発表が予告されながら，実際には発表されなかったものでありますが，長町－麦林両先生が[11]，[12]において，公理論的場の量子論への応用を見込んで導入されたものです。（modified Fourier超函数の理論を整備したものとしては、佐分利[15]があります。）

modified Fourier超函数は，元のFourier超函数を含み，更に，微分方程式論で用いられる除法問題を考える場合，元のFourier超函数と比較して，より適切なものになっています。

§1. modified Fourier超函数の定義と，その諸性質.

$\mathbb{C}^n(\simeq\mathbb{R}^{2n})$の方向的コンパクト化を$\mathbb{Q}^n$と書く。自然に，$\mathbb{R}^n\subset\mathbb{Q}^n$と見ることができるが，$\mathbb{R}^n$の$\mathbb{Q}^n$における閉包を$\mathbb{D}^n$と書く。（$\mathbb{R}^k$の方向的コンパクト化の定義については，河合[7]，長町－麦林[12]等を見て下さい。）

定義1.1.（緩増加正則函数の層）$\mathbb{Q}^n$上の層$\mathcal{O}_{inc}$とは，$\mathbb{Q}^n$の各開集合W上の切断加群$\mathcal{O}_{inc}(W)$が

$$\mathcal{O}_{inc}(W)$$
$$=\{f\in\mathcal{O}(W\cap\mathbb{C}^n);\ \sup_{z\in K\cap\mathbb{C}^n}|f(z)|e^{-\varepsilon|z|}<\infty,\ {}^\forall K\subset\subset W,\ {}^\forall\varepsilon>0\}$$

により与えられるものである。

定義1.2.（急減少正則函数の層）$\mathbb{Q}^n$上の層$\mathcal{O}_{dec}$とは，$\mathbb{Q}^n$の各開集合W上の切断加群$\mathcal{O}_{dec}(W)$が

$$\mathcal{O}_{dec}(W)$$
$$=\{f\in\mathcal{O}(W\cap\mathbb{C}^n);\ {}^{\forall}K\subset\subset W\ {}^{\exists}\varepsilon>0\ \text{s.t.}\ \sup_{z\in K\cap\mathbb{C}^n}|f(z)|e^{\varepsilon|z|}<\infty\}$$

により与えられるものである。

定義1.3.（$\mathcal{O}_{dec}(K)$の位相）$\mathbb{Q}^n$の各コンパクト集合Kに対して，$\mathcal{O}_{dec}(K)$の位相を次の局所凸な帰納極限の位相により定義する：

$$\mathcal{O}_{dec}(K)=\lim_{j}\mathrm{ind}\ \mathcal{O}_b^{-(1/j)}(W_j),$$

ここで，$\{W_j\}$は，$W_1\supset\supset W_2\supset\supset\cdots\supset\supset K$となる様な，Kの$\mathbb{Q}^n$における基本近傍系であり，また

$$\mathcal{O}_b^{-(1/j)}(W_j)$$
$$=\{f\in\mathcal{O}(W_j\cap\mathbb{C}^n)\cap C(\overline{W_j}\cap\mathbb{C}^n);\ \sup_{z\in\overline{W_j}\cap\mathbb{C}}|f(z)|e^{(1/j)|z|}<\infty\}$$

とおいた。

この時，$\mathcal{O}_{dec}(K)$はDFS－空間となる。

定義1.4.（modified Fourier超函数の層）$\mathbb{D}^n$上の層$\mathcal{R}$とは，$\mathbb{D}^n$の各開集合Ω上の切断加群$\mathcal{R}(\Omega)$が

$$\mathcal{R}(\Omega)=H^n_{\Omega}(\widetilde{\Omega};\mathcal{O}_{inc}),$$

により与えられるものである，ここで$\widetilde{\Omega}$は，$\Omega_{\text{閉}} \subset \widetilde{\Omega}_{\text{開}} \subset \mathbb{D}^n$となる様なものである。

ここで，$\mathcal{R}$は準層の形で定義されているが，$\mathbb{D}^n$が層$\mathcal{O}_{inc}$に関して純n－余次元的であることを示すことができるので，実際層になっていることがわかる。

<u>注意.</u>　$\mathbb{Q}^n$上の層$\mathcal{O}_{inc}$，及び$\mathcal{O}_{dec}$の$\mathbb{C}^n$への制限は，$\mathbb{C}^n$上の正則函数の層$\mathcal{O}$と一致する。$\mathbb{D}^n$上の層$\mathcal{R}$の$\mathbb{R}^n$への制限は，$\mathbb{R}^n$上の超函数の層$\mathcal{B}$と一致する。

modified Fourier 超函数の層$\mathcal{R}$の基本的諸性質：

(A)　層$\mathcal{R}$は，軟弱である。

(B)　modified Fourier 超函数は，増大度付きの正則函数の実領域への境界値である。

(C)　Kを$\mathbb{D}^n$のコンパクト集合とする時，Kに台をもつ modified Fourier 超函数の全体を$\mathcal{R}[K]$と書けば，$\mathcal{R}[K] \cong \mathcal{O}'_{dec}(K)$である。

(D)　Fourier 変換　$\mathcal{F}: \mathcal{R}(\mathbb{D}^n) \longrightarrow \mathcal{R}(\mathbb{D}^n)$が定義され，それは同型を与える。

(E)　Γを$\mathbb{R}^n$の原点を頂点とする固有凸錐とするとき，$\mathcal{F}: \mathcal{R}[K] \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{inc}(\overline{\mathbb{R}^n \times \sqrt{-1}\,\mathring{\Gamma}})$である。

注意. 長町−麦林[12]では，$\Omega_{\text{開}} \subset \mathbb{D}^n$に対して，
$\mathcal{R}(\Omega) \equiv \mathcal{O}'_{dec}(\overline{\Omega}) / \mathcal{O}'_{dec}(\partial_{\mathbb{D}^n}\Omega)$ として定義されていて，
性質(A)，(D)が示されています。

§2. 性質(A)，(B)，(C)の証明のために

性質(A)，(B)，(C)の証明のために，長町−麦林[12]の近似定理(Appendix)に加えて．次の諸定理が有効に働く；

定理2.1. $\mathbb{Q}^n$の$\mathcal{O}_{inc}$−擬凸開集合Vに対して，

$$H^q(V;\mathcal{O}_{inc}) = 0 \qquad (q \geq 1)$$

定理2.2. $\mathbb{Q}^n$の1−型開集合Wに対して，

$$H^n(W;\mathcal{O}_{inc}) = 0$$

定理2.3. $\mathbb{D}^n$のかってな開集合Ωに対して，$\mathcal{O}_{inc}$−擬凸開集合からなるΩの基本近傍系が存在する。（長町−麦林[12]定理4.7を見て下さい。）

ここで，1−型開集合及び，$\mathcal{O}_{inc}$−擬凸開集合の定義は，それぞれ，次の様なものである：

定義2.4. $\mathbb{Q}^n$の開集合Wが1−型とは，次の条件を満たすことをいう：

$$\sup_{z \in W \cap \mathbb{C}^n} |\operatorname{Im} z| / (|\operatorname{Re} z| + a) \quad \text{for } \exists a > 0 .$$

定義 2.5.　$\mathfrak{C}^n$の開集合Vが，$\mathcal{O}_{inc}$－擬凸とは，Vが1－型であって，かつ次の条件を満たす$V\cap\mathbb{C}^n$上のC^2－強多重劣調和函数$P(z)$が存在することである：

i)　$\{z\in V\cap\mathbb{C}^n\,;\,P(z)<c\}\subset\subset V \qquad {}^{\forall}c\in\mathbb{R}$,

ii)　$\displaystyle\sup_{z\in K\cap\mathbb{C}^n} P(z)<\infty \qquad {}^{\forall}K\subset\subset V$.

上記諸定理より，性質(A)，(B)，及び(C)を導くことは，河合[7]と同様の方法で出来ますので，ここでは，上記諸定理の証明のスケッチを述べることにします。詳細は，佐分利[15]にあります。

§3. 定理2.1.，2.，3.の証明のスケッチ

定理2.1.の証明の準備：

定義3.1.　$\mathfrak{C}^n$上の層$\mathcal{X}^{o}_{(p,q)}$とは，$\mathfrak{C}^n$の各開集合W上の切断加群$\mathcal{X}^{o}_{(p,q)}(W)$が

$$\mathcal{X}^{o}_{(p,q)}(W)$$
$$=\Big\{f=\sum_{\substack{|I|=p\\|J|=q}}{}' f_{I,J}\,dz^I\wedge d\bar{z}^J\,;\ \int_{K\cap\mathbb{C}^n}\sum_{\substack{|I|=p\\|J|=q}}{}'|f_{I,J}|^2e^{-\varepsilon|z|}d\lambda<\infty \quad {}^{\forall}\varepsilon>0,\ {}^{\forall}K\subset\subset W\Big\}$$

により与えられるものである。ここで，$\sum'$は，$I=(i_1,\dots,i_p)$，$J=(j_1,\dots,j_q)$が$i_1<\dots<i_p$，$j_1<\dots<j_q$となっているものに

ついてのみの和を意味する。また $d\lambda$ は $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ 上の Lebesgue 測度である。

定義 3.2. $\mathbb{C}^n$ 上の層 $\mathcal{X}'_{(p,q)}$ とは，$\mathbb{C}^n$ の各開集合 W 上の切断加群 $\mathcal{X}'_{(p,q)}(W)$ が

$$\mathcal{X}'_{(p,q)}(W) = \{ f \in \mathcal{X}^0_{(p,q)}(W) ;\ \bar{\partial} f \in \mathcal{X}^0_{(p,q+1)}(W) \}$$

により与えられるものである。ここで $\bar{\partial} f$ は，distribution の意味で定義されたものである。$\mathcal{X}'_{(p,q)}$ は軟層である。

この時，次の定理及びその系が得られる。

定理 3.3. V を $\mathbb{C}^n$ の $\mathcal{O}_{inc}$－擬凸開集合とする時，次の列は完全である：

$$\mathcal{X}^0_{(p,0)}(V) \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{X}^0_{(p,1)}(V) \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{X}^0_{(p,n)}(V) \longrightarrow 0$$

系 3.4. V を $\mathbb{C}^n$ の $\mathcal{O}_{inc}$－擬凸開集合とする時，次の列は，完全である：

$$\mathcal{X}'_{(p,0)}(V) \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{X}'_{(p,1)}(V) \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{X}'_{(p,n)}(V) \rightarrow 0$$

系 3.5. $\mathbb{C}^n$ の層 $\mathcal{O}_{inc}$ に対して，次はその軟分解を与える：

$$0 \to \mathcal{O}_{inc} \to \mathcal{X}'_{(0,1)} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{X}'_{(0,2)} \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{X}'_{(0,n)} \to 0 \ .$$

系3.4，5 $\Rightarrow$ 定理2.1，及び 定理3.3. $\Rightarrow$ 系3.4は明らかである。また系3.4 $\Rightarrow$ 系3.5である。それは，$\mathbb{C}^n$の各点zが，その基本近傍系$\{V_j\}$で，あるunitary行列Uに対して，UV_jが$\mathcal{O}_{inc}$－擬凸になる様なものを持つという事からわかる。それ故，定理3.3を示せばよい。

（定理3.3の証明のスケッチ） 定義2.5の条件i)，ii)を満たす$V \cap \mathbb{C}^n$上のC^2－強多重劣調和函数$P(z)$を用いて，Vのとりつくしcompact集合の増大列$\{K_j\}$で，$\partial K_j \cap \mathbb{C}^n$が$C^2$－強擬凸になるものがとれる。そこで，$\mathcal{X}^0_{(p,q)}(V)$に，次のHilbert空間の弱compact列の射影極限の位相（即ち，FS*空間の位相）を入れる：

$$\mathcal{X}^0_{(p,q)}(V) = \lim_{j} \operatorname{proj} L^2_{(p,q)}(\mathring{K}_j \cap \mathbb{C}^n ; (1/j)\|z\| + l_q(z))$$

ここで，$\|z\|$は，$|z|$を$0 \in \mathbb{C}^n$のまわりで少し修正して，$\mathbb{C}^n$上の凸C^∞－函数となる様にしたものである。また，$l_q(z) = 2(n-q)\log(1+|z|^2)$とおいた。以後

$$X_{j,(p,q)} = L^2_{(p,q)}(\mathring{K}_j \cap \mathbb{C}^n ; (1/j)\|z\| + l_q(z))$$

とおく。

$\mathcal{X}^0_{(p,q)}(V)$の強双対空間は，小松［8］の理論により，DFS*

空間

$$\mathcal{Y}^{0}_{(p,q)\,comp.}(V)=\lim_{j}\ \mathrm{ind}\ L^{2}_{(p,q)}(\mathring{K}_{j}\cap\mathbb{C}^{n};\ -(1/j)\|z\|-\ell_{q}(z))$$

により表現される。ここで，$L^{2}_{(p,q)}(\mathring{K}_{j}\cap\mathbb{C}^{n};\ -(1/j)\|z\|-\ell_{q}(z))$ から，$\mathcal{Y}^{0}_{(p,q)comp}$ への単射 $\rho_{j}'^{-1}$ は，

$$\rho_{j}'^{-1}f(z)=\begin{cases} f(z) & \text{if}\quad z\in\mathring{K}_{j}\cap\mathbb{C}^{n} \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}\quad \text{for } f\in Y_{j,(p,q)}$$

により与えられる。ここで，

$$Y_{j,(p,q)}=L^{2}_{(p,q)}(\ \mathring{K}_{j}\cap\mathbb{C}^{n};\ -(1/j)\|z\|-\ell_{q}(z)\ )$$

とおいた。

そこで，次の双対複体を考える：

$$\begin{array}{llcl}
(3.1) & \mathcal{X}^{0}_{(p,0)}(V)\xrightarrow{\bar\partial}\mathcal{X}^{0}_{(p,1)}(V)\xrightarrow{\bar\partial}\cdots\xrightarrow{\bar\partial}\mathcal{X}^{0}_{(p,n)}(V)\to 0 \\
& \quad\updownarrow \qquad\qquad\quad \updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \updownarrow \\
(3.1)' & \mathcal{Y}^{0}_{(p,0)_{comp}}(V)\leftarrow\mathcal{Y}^{0}_{(p,1)_{comp}}(V)\leftarrow\cdots\leftarrow\mathcal{Y}^{0}_{(p,n)_{comp}}(V)\leftarrow 0
\end{array}$$

(3.1)の完全性をいうのが目標だが，それを示すには，Serre 小松の双対定理により，(3.1)′の完全性，及び$\bar\partial$の閉値性を示せばよい。そのために，次の双対複体を考える：

$$\begin{array}{ll}
(3.2) & X_{j,(p,0)}\xrightarrow{\bar\partial}X_{j,(p,1)}\xrightarrow{\bar\partial}\cdots\xrightarrow{\bar\partial}X_{j,(p,n)}\to 0 \\
& \quad\updownarrow \qquad\qquad \updownarrow \qquad\qquad\qquad \updownarrow
\end{array}$$

$$(3.2)' \quad Y_{j,(p,0)} \xleftarrow[\vartheta]{} Y_{j,(p,1)} \xleftarrow[\vartheta]{} \cdots \xleftarrow[\vartheta]{} Y_{j,(p,n)} \leftarrow 0 \quad .$$

ここで，$\mathring{K}_j \cap \mathbb{C}^n$ が擬凸であることから，Hörmander [2] の理論により，(3.2) の完全性，及び ϑ の閉値域性が従う。それ故，閉値域定理により，(3.2)′ の完全性，及び ϑ の閉値性を得る。このことから，$\mathring{K}_j \cap \mathbb{C}^n$ が C^2-強擬凸境界をもつことを用いて，Hörmander [1]，小松 [8] の理論により，(3.1)′ の完全性，及びそこにおける ϑ の閉値域性を示すことができる。

注意.　ここで定理 2.1 を示すために用いられた方法は，$\mathbb{Q}^n$ を $\mathbb{D}^n \times \sqrt{-1}\mathbb{R}^n$ にかえても平行に使えます。そしてそれは，河合 [7]，伊藤－長町 [4] の対応する定理の証明の若干の改良となります。

次に定理 2.2, 3 の証明の方針を述べる。

（定理 2.2 の証明のスケッチ）　系 3.5 で得られた，$\mathcal{O}_{inc}$ の軟分解を用いて

$$\mathcal{X}'_{(0,n-1)}(W) \xrightarrow{\bar\partial^{n-1}} \mathcal{X}'_{(0,n)} \longrightarrow 0 \qquad （完全）$$

を示せばよい。特に

$$\mathcal{X}^0_{(0,n-1)}(W) \xrightarrow{\bar\partial^{n-1}} \mathcal{X}^0_{(0,n)} \longrightarrow 0 \qquad （完全）$$

を示せばよい。そのためには，定理3.3の証明と同様に，その双対列：

$$\mathcal{Y}^{0}_{(0,n-1)}(W) \xleftarrow[\vartheta^{n-1}]{} \mathcal{Y}^{0}_{(0,n)}(W) \leftarrow 0 \quad (\text{完全})$$

の完全性，及びϑ^{n-1}の閉値域性を示せばよい。それは，ϑ^{n-1}が楕円型であることと，Hörmander [1]，[2]，及び小松 [8] の理論を用いて示すことができる。

（定理2.3の証明のスケッチ）

これは，河合[7]の定理2.2.6の証明法を用い，それに細かい評価を付け加えることにより得られる。

文献

[1] L. Hörmander： L^2-estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator, Acta Math. 113, 89-152 (1965)

[2] L. Hörmander： An Introduction to Complex Analysis in Several Variables, Second edition, North-Holland (1973)

[3] P.D.F. Ion, T. Kawai： Vector valued hyperfunctions Publ. RIMS, Kyoto Univ., 11, 1-19 (1975)

[4] Y. Ito, S. Nagamachi : On the theory of vector valued Fourier hyperfunctions, J. Math. Tokushima Univ., 9, 1-33 (1975)

[5] K. Junker : Vektorwertige Fourierhyperfunctionen, Diplomarbeit. Univ. Dusseldorf (1978)

[6] 河合隆裕 : 超函数論 (hyperfunction) における Fourier 変換の理論とその応用, 東京大学修士論文 (1970)

[7] T. Kawai : On the theory of Fourier hyperfunctions and its applications to partial differential equations with constant coefficients, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, 17, 467-517 (1970)

[8] H. Komatsu : Projective and injective limits of weakly compact sequences of locally convex spaces, J. Math. Soc. Japan, 19, 366-383 (1967)

[9] S. Nagamachi : Theory of the vector valued Fourier hyperfunctions of mixed type, to appear.

[10] S. Nagamachi, N. Mugibayashi : Hyperfunction quantum field theory, Commun. math. Phys., 46, 119-134 (1976)

[11] S. Nagamachi, N. Mugibayashi : Hyperfunction

quantum field theory II, Commun. math. Phys., 49, 257-275 (1976)

[12] S. Nagamachi, N. Mugibayashi : Quantum field theory in terms of Fourier hyperfunctions, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 12, Supplement, 309-341 (1977)

[13] S. Nagamachi, N. Mugibayashi : The Haag-Ruelle formulation of scattering in hyperfunction quantum field theory, to appear

[14] V. P. Palamodov : From hyperfunctions to analytic functions. Soviet Math. Dokl. 18, 975-979, (1977)

[15] 佐分利 豊 : Fourier 超函数について, 上智大学修士論文 (1978)

[16] 佐藤幹夫 : 超函数の理論, 数学, 10, 1-27 (1958)