数理解析研究所講究録
第341巻 1978年 14-31

解析汎函数の偏微分方程式への応用

上智大 理工　　青木一雄

コーシー・コワレフスカヤの定理の抽象化である，山中－オブシャンニコフ－トレーブの定理と，トレーブが導入した超微分作用素を利用して，コーシー問題を考察する。特に，ここでは，局所コーシー問題

(1) $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)u(z,t) = \sum_{j=1}^{n} A_j\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right)u(z,t) + A_0 u(z,t) + f(z,t)$

(2) $u(z,0) = u_0(z)$

の原点における distribution 適切性を論じよう。但し，ここで方程式(1)の係数は $N \times N$ 複素行列とする。

<u>定理</u>　局所コーシー問題(1)～(2)が原点において distribution 適切であるための必要十分条件がゴールディングの意味で双曲型である。

を [1] に従って論じる。

山中－オブシャンニコフ－トレーブの定理は，3先生が独立に示した，一般化されたコーシー・コワレフスカヤの定理であ

る。ここで紹介するのは、トレーブの型で引用するが、それは 本質的には、山中先生が発表されたものと同じである。この定理は、非常に簡潔でかつ応用範囲が広く、フックス型の偏微分方程式にも利用されている。

一方、定理を証明するにあたって、超微分作用素も導入されるが、これは convolution 作用素に過ぎない。超微分作用素は その核により決まる ある一つの解析汎函数の空間から、もう一つの解析汎函数の空間への連続線型写像のことである。普通の微分作用素は勿論、適当な条件の下では、無限次の微分作用素と呼ばれているものも、超微分作用素と考えてよい。超微分作用素を知るには、その核を知ればよいが、その際、よく知られた線型位相同型

(3) $$\mathcal{O}'(K) \cong \mathrm{Exp}(\mathbb{C}_n\,;\,K)$$

を、フレシェ値の空間に拡張しておくと都合がよい。実際、それは [2] で示された。それにより [1] で取り扱われた議論をより簡潔にすることができる。

§1　抽象的コーシー問題

本節では、山中・オブシャニコフ・トレーブの定理を述べその応用として、通常のコーシー・コワレフスカヤの定理が導かれることを示そう。

定義1－1　$\{X_s\}_{0\leq s\leq 1}$がスケールを持つバナッハ空間族であるとは、任意の　$s'\leq s$なる組(s, s')に対して、$X_s\subset X_{s'}$で、しかもX_sから$X_{s'}$への自然な一対一写像のノルムが　1以下であるものをいう。

ここで、

(1)　$$\frac{d}{dt}X(t) = A(t)X(t) + f(t) \quad (|t| < \delta)$$

(2)　$$X(0) = x_0$$

なる　X_s値 コーシー問題を考える。但し、方程式(1)の係数$A(t)$は、

(c)　$$(t \rightsquigarrow A(t)) \in \mathcal{O}(\{|t| < \eta\}; L(X_s : X_{s'}))[\![C]\!]$$ 注(1)

とする。

この時、コーシー問題(1)－(2)の存在と一意性を保証する次の定理1－2が成り立つ。

(注1) 【　】は $\{t : |t| < \eta\}$ を閉区間 $[-\eta, \eta]$ で考えたものである。

定理１－２　《ＹＯＴ定理》　$0 \leq s' < s \leq 1$ なる任意の組（s, s'）に対し

(G)　$\|A(t)\|_{L(X_s : X_{s'})} \leq \dfrac{C}{s-s'}$

なる正数 $C>0$ が存在すると仮定する。更にデータに対しては、次の条件

(D)　$x_0 \in X_1$，$(t \rightsquigarrow f(t)) \in \mathcal{O}(\{|t|<\eta\} : X_1)$ 【C】

の下で考える。この時、$0 < \delta_0 \leq \eta$ なる δ_0 が存在し，(D)を満たす任意のデータ（$x_0, f(t)$）に対し

$$(t \rightsquigarrow x(t)) \in \mathcal{O}(\{t : |t| < \delta = \delta_0(1-s)\} : X_s)\ 【C^1】$$

なる(1)－(2)の解が唯一存在する。

今、$Y_s = L(X_1 : X_s)$　$(0 \leq s \leq 1)$ とすると、$\{Y_s\}_{0 \leq s \leq 1}$ は、スケールを持つバナッハ空間族になる。この空間族 $\{Y_s\}_{0 \leq s \leq 1}$ に対して、定理１－２を適用すると、τ をパラメータとする時、

(3)　$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) R(t,\tau) = A(t) R(t,\tau)$ $(|t-\tau| < \delta, |t| < \eta)$

(4)　$R(\tau,\tau) = I_1$

を満足する唯一の解

$$(t \rightsquigarrow R(t,\tau)) \in \mathcal{O}(\{|t-\tau| < \delta_0(1-s), |t| < \eta\}; L(X_1 : X_s))$$

が存在する。

(3)－(4)の解に対して、次の定理が成立する。

<u>定理1－3</u>　(3)－(4)の解 $R(t,\tau)$は、任意の(s,s')に対して、ある$\delta(s,s')>0$が存在して、

$$\{(t,\tau)\,;\,|t-\tau|<\delta(s,s'),\ |\tau|<\frac{\eta}{2}\}$$

で2変数(t,τ)の函数とみて正則〖C'〗である。

一方、(1)－(2)の解 $X(t)$は、(3)－(4)の解$R(t,\tau)$を用いると積分表示することができる。

<u>定理1－4</u>　(1)－(2)の解は、(3)－(4)の解 $R(t,\tau)$を使って

$$X(t)=R(t,0)X_0+\int_0^t R(t,\tau)f(\tau)\,d\tau \tag{5}$$

と積分表示できる。

本節の終わりに、YOT定理の系として、コーシー・コワレフスキーの定理を導こう。

<u>例1－5</u>　(Cauchy－Kowalevskyの定理)

$\mathbb{C}^{n+1}$の0の近傍をΩとし、Eを一つのバナッハ空間とする。この時、

$$\begin{aligned}(6)\qquad \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)u(z,t)&=\sum_{j=1}^{n}A_j(z,t)\frac{\partial}{\partial z_j}u(z,t)\\&\quad+A_0(z,t)u(z,t)+f(z,t)\qquad(|t|<\eta)\end{aligned}$$

$$u(z,0)=u_0(z) \tag{7}$$

なるコーシー問題を考えよう。但し、係数は、

$$A_j(z,t) \in \mathcal{O}(\Omega\,;\, L(E:E))$$

とする。

$\mathbb{C}^n$ の1-パラメータコンパクト族 $\{K(s)\}_{0\leq s\leq 1}$ で、次の性質をもつものを考えよう。

"ある正数 c_0 に対し

$$\{z \in \mathbb{C}^n\,;\, d(z, K(s')) \leq c_0^{-1}(s-s')\} \subset K(s) \quad (s'<s)$$

となり、$\mathring{K}(s)$ が連結で、$\overline{\mathring{K}(s)} = K(s)$ となる。"

更に、ある $\eta > 0$ に対して、

$$K_0 \equiv \{(z,t) \in \mathbb{C}^{n+1}\,;\, z \in K(1),\, |t| \leq \eta\} \subset \Omega$$

とする。

そして、スケールを持つバナッハ空間族として、$\{\mathcal{O}_B(K(s);E)\}_{0\leq s\leq 1}$ を考えよう。

この時、次の2つの事実

"$$\frac{\partial}{\partial z_j} : \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_B(K(s):E) & \longrightarrow & \mathcal{O}_B(K(s'):E) \\ \Psi & & \Psi \\ f & \rightsquigarrow & \dfrac{\partial f}{\partial z_j} \end{array}$$

の作用素ノルムは、

$$\left\|\frac{\partial}{\partial z_j}\right\|_{L(\mathcal{O}_B(K(s):E)\,:\,\mathcal{O}_B(K(s'):E))} \leq \sqrt{n}\; c_0\,(s-s')^{-1}$$

である。"

"$$A_j(z,t) : \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_B(K(s):E) & \longrightarrow & \mathcal{O}_B(K(s):E) \\ \Psi & & \Psi \\ f & \rightsquigarrow & A_j(z,t)f \end{array}$$

は、連続線型写像である。"

が成立する。

よって、

$$A(t) = \sum_{j=1}^{n} A_j(z,t)\frac{\partial}{\partial z_j} + A_0(z,t)$$

と置くと、ある定数 $C>0$ が存在して、

$$\|A(t)\|_{L(X_s : X_{s'})} \leqq C(s-s')^{-1}$$

である。　コーシー問題(6)－(7)を

$$u_0(z) \in X_1 = \mathcal{O}_B(K(1) : E)$$

$$(t \rightsquigarrow f(z,t)) \in \mathcal{O}(\{t : |t| < \eta\} : X_1)$$

なるデータの下で考えると、定理1－2より、ある $0 < \delta_0 \leqq \eta$ なる δ_0 が存在し、任意の $0 \leqq s < 1$ なる s に対して、(6)－(7)の唯一の解

$$(t \rightsquigarrow u(z,t)) \in \mathcal{O}(\{|t| < \delta_0(1-s)\} : X_s)$$

が存在する。　これは、コーシー・コワレフスキーの定理に他ならない。

§.2. 解析汎函数と超微分作用素

本節では、解析汎函数の一般的性質と、超微分作用素の定義を述べる。

Ωを $\mathbb{C}^n$ の開部分集合、Kを$\mathbb{C}^n$のコンパクト部分集合とする。この時、通常の位相を入れることにより、$\mathcal{O}(\Omega)$ はFS－

空間、$\mathcal{O}(K)$ はDFS－空間となる。

今、Fで一つのフレシェ空間を表わそう。$L(\mathcal{O}(\Omega):F)$ 注(2) の元μをΩ上のF-値解析汎函数、$L(\mathcal{O}(K):F)$ の元をK上のF-値局所解析汎函数と呼ぼう。

定義2－1　　$\mu \in L(\mathcal{O}(\Omega):F)$が、$\Omega$の開部分集合$U$で支えられているとは、ある$\mu_1 \in L(\mathcal{O}(U):F)$が存在して、$\mu = \mu_1 \circ \rho_U^\Omega$ となることである。また、μがΩのコンパクト集合Kで支えられているとは、Kの任意の開近傍Uに対して、μがUで支えられていることと定義する。

K上の局所解析汎函数とKで支えられた$\mathbb{C}^n$上の解析汎函数に関して、次の定理がある。

定理2－2　　Kを$\mathbb{C}^n$のルンゲ・コンパクト集合とする。この時、写像

$$T: L(\mathcal{O}(K):F) \longrightarrow \{\mu \in L(\mathcal{O}(\mathbb{C}^n):F) : \mu \text{はKで支えられている}\}$$

は、連続線型全単射である。即ち、K上の局所解析汎函数とKで支えられた解析汎函数とを同一視することができる。

次にいくつかの函数空間を定義しよう。

(注2)　E, Fを線型位相空間とするとき、$L(E:F)$でEからFの中への連続線型写像全体を表わす。

$$\mathrm{Exp}(\mathbb{C}_n)=\{f\in\mathcal{O}(\mathbb{C}_n):{}^{\exists}c>0,{}^{\exists}\gamma\in\mathbb{R}^n_+,\ |f(\zeta)|\leq c\exp\sum_{j=1}^{n}\gamma_j|\zeta_j|\}$$

$$\mathrm{Exp}^b(\mathbb{C}_n:K)=\{f\in \mathrm{Exp}(\mathbb{C}_n):\ \|f\|_K<\infty\}$$

と置く。但し、ノルム$\|\ \|_K$は、

$$\|f\|_K=\sup_{\zeta\in\mathbb{C}_n}\{f(\zeta)\exp(-I_K(\zeta))\}\quad(f\in\mathrm{Exp}(\mathbb{C}_n))$$

と定義する。この時、タイプK以下の指数型整函数の空間を

$$\mathrm{Exp}(\mathbb{C}_n:K)=\varinjlim_{K_1\supset\supset K}\mathrm{Exp}^b(\mathbb{C}_n:K_1)$$

と定義する。$\mathrm{Exp}(\mathbb{C}_n:K)$は、FS空間になる。

Kが、コンパクト凸集合の時、

$$\mathcal{O}'(K)\overset{FB}{\cong}\mathrm{Exp}(\mathbb{C}_n:K)$$

なる線型位相同型が成立する。ここで、$\mu\in\mathcal{O}'(K)$に対して FB-変換$\hat{\mu}$を

$$\hat{\mu}(\lambda)=\langle\mu_z,\ e^{\langle z,\lambda\rangle}\rangle$$

と定める。

線型位相同型 $\mathcal{O}'(K)\cong\mathrm{Exp}(\mathbb{C}_n;K)$ を、次の様に拡張することが出来る。

<u>定理2－3</u>　　Kがコンパクト凸集合の時、

$$L(\mathcal{O}(K);F)\cong{}^F\mathrm{Exp}(\mathbb{C}_n;K)$$

なる線型位相同型が成立する。

ここで，${}^F\mathrm{Exp}(\mathbb{C}_n;K)$は，$\mathbb{C}_n$上のタイプK以下のF-値整函数全体の空間である。

また，$\mathbb{C}^n$上の解析汎函数μ,νに対して，μとνの convo-

lution を $\langle \mu * \nu, h \rangle = \langle \mu, \check{\nu} * h \rangle \quad (h \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n))$
と定義する。 但し、

$$(\mu * h)(z) = \langle \mu_\zeta, h(z-\zeta) \rangle, \quad \langle \check{\mu}, h \rangle = \langle \mu, \check{h} \rangle$$
$$\check{h}(z) = h(-z)$$

と約束する。

双線型写像

$$(1) \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{O}'(K) \times \mathcal{O}(\Omega^2) & \longrightarrow & L_b(\mathcal{O}'(\Omega^1); \mathcal{O}'(\Omega^2)) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (\mu, \varphi) & \rightsquigarrow & (\nu \rightsquigarrow \varphi(z)(\mu * \nu)) \end{array}$$

は、連続写像である。ここで $L_b(\mathcal{O}'(\Omega^1); \mathcal{O}'(\Omega^2))$ は、$L(\mathcal{O}'(\Omega^1); \mathcal{O}'(\Omega^2))$ に、$\mathcal{O}'(\Omega^1)$ の有界集合上の一様収束位相を入れたものである。この時、テンソル積の transversality より、連続線型写像

$$d_0 : \mathcal{O}'(K) \hat{\otimes}_\pi \mathcal{O}(\Omega^2) \longrightarrow L_b(\mathcal{O}'(\Omega^2) : \mathcal{O}'(\Omega^2))$$

が存在する。

<u>定義２－４</u>　　$L(\mathcal{O}'(\Omega^1); \mathcal{O}'(\Omega^2))$ の元 G が Ω^1 から Ω^2 への<u>超微分作用素</u>であるとは、$\Omega^1 + K \subset \Omega^2$ なる $\mathbb{C}^n$ のコンパクト集合 K があって、$G \in d_0(\mathcal{O}'(K) \hat{\otimes}_\pi \mathcal{O}(\Omega^2))$ となることと定義する。

《注意》　d_0 が、単射になるかどうか一般にはわからない。しかし、例えば、$\Omega^i\ (i=1,2)$, K が直積型で、Ω^i_j, K_j すべてが連結かつ単連結であり、更に、各 j に対して、$K_j \subset \Omega^2_j -$

x_j^1 なる $z_j \in \Omega^2$ が存在すれば，d_0は単射であることは、知られている。

今、Gを超微分作用素としよう。即ち，ある $G_t(z) \in \mathcal{O}'(K)\hat{\otimes}_\pi \mathcal{O}(\Omega^2)$ が存在して，$d_0(G_t(z)) = G$とする。一方 $\mathcal{O}'(K)\hat{\otimes}_\pi \mathcal{O}(\Omega^2)$ の元 $G_t(z)$は，グロタンディークの定理により

$$G_t(z) = \sum_{i=0}^{\infty} (\mu_i)_t \otimes \varphi_i(z)$$

と書き表わすことができる。従って、(1)を考慮すれば，

$$G\nu = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(z)(\mu_i * \nu) \qquad (\nu \in \mathcal{O}'(\Omega^1))$$

である。

本節の最後に超微分作用素の例を紹介しておこう。Kが原点0を含んでいるとする時、$G_t(z) = \delta_t \otimes 1_z$ で定義される超微分作用素は，$\mathcal{O}'(\Omega^1)$から$\mathcal{O}'(\Omega^2)$への恒等写像である。また、$G_t(z) = \delta_t \otimes \varphi(z)$ で定義される超微分作用素は、解析汎函数と正則函数$\varphi(z)$との積となる。より進んだ例は、[1], [2] を参照されたい。

§3 超微分作用素の一つの応用

(1) $$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)u(z,t) = \sum_{j=1}^{n} A_j\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right)u(z,t) + A_0 u(z,t) + f(z) \equiv Lu+f$$

(2) $$u(0) = u_0(z)$$

なるコーシー問題を考える。但し、$A_j \in M_N(\mathbb{C})$ とする。

Ω_jを $\mathbb{C}$の有界開凸部分集合とする。そして、

$$\Omega_j(d) = \{z_j \in \mathbb{C}\ ;\ d(z_j, \Omega_j) < d\} \qquad (d>0)$$

$$\Omega_j(0) = \Omega_j$$

$$\Omega(d) = \Omega_1(d) \times \cdots \times \Omega_n(d)$$

と置く。

今、X_s として，$\mathcal{O}_B(\Omega(sd_0); L(\mathbb{C}^N; \mathbb{C}^N))$ $(d_0>0)$ を取ろう。コーシー問題(1)−(2)のリゾルベント $R(t,\tau)$，即ち、

(3) $$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) R(t,\tau) = Lu$$

(4) $$R(t,\tau) = I$$

の解は、

(5) $$(t \rightsquigarrow R(t,\tau)) \in \mathcal{O}(\{t : |t-\tau| < \delta_0(1-s)\} : L(X_1; X_s))$$

となる。

tをとめた時、$R(t,\tau)$ の FB-表象を $r(z,t,\tau,\lambda)$ としよう。この時、$r(z,t,\tau,\lambda)$ は，

(6) $$(\lambda \rightsquigarrow r(t,\tau,\lambda)) \in {}^{M_N(\mathbb{C})}\mathrm{Exp}(\mathbb{C}_n)$$

となる。

(6)と定理２－３より、ある $p \in L(\mathcal{O}(\mathbb{C}^n); L(\mathbb{C}^N; \mathbb{C}^N))$ が存在して、$\mathcal{E}(t, \tau, \lambda) = FB(p)(\lambda)$ である。

一方、$A(\lambda) = A_0 - \sum_{j=1}^{n} A_j \lambda_j$ と置く時、$R(t, 0)$ の表象 $\mathcal{E}(z, t, 0, \lambda)$ は、コーシー問題

$$(7) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \mathcal{E}(t, \lambda) = \sum_{j=1}^{n} A_j \left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right) \mathcal{E}(t, \lambda) + A(\lambda) \mathcal{E}(t, \lambda)$$

$$(8) \qquad \mathcal{E}(0, \lambda) = 1_N$$

の唯一つの解である。

実際、その解は、

$$(9) \qquad \mathcal{E}(z, t, 0, \lambda) = \exp(A(\lambda) t)$$

で与えられる。

また、$\Omega^1 = \Omega(0)$, $\Omega^2 = \Omega(d_0)$ と置くと、$R(t, \tau)$ の値は、$L(\mathcal{O}'(\Omega^1)^N; \mathcal{O}'(\Omega^2)^N) \cong L(\mathcal{O}'(\Omega^1); \mathcal{O}'(\Omega^2))^{N^2}$ である。

従って、$\mu \in \mathcal{O}'(\Omega^1)^N$ に対して、

$$(10) \qquad FB(R(t, \tau)\mu) = \mathcal{E}(t, \tau, \lambda) \hat{\mu}(\lambda)$$

であることと、FB－変換の単射性より

$$(11) \qquad R(t, \tau)\mu = p(t, \tau) * \mu$$

が成立する。

さらに、$R(t, \tau)\mu$ の支台について、μ があるコンパクト集合 K で支えられている時、$R(t, \tau)\mu$ の支台は

$$(12) \qquad \left\{ z : d(z, K) \le \left(\sum_{j=1}^{n} \|A_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}} |t - \tau| \right\}$$

に含まれる。

以上の準備の下で、$\mathbb{C}^n$ の原点の開近傍 Ω と $\mathbb{R}^1$ の原点を含む開区間 $(-\eta,\eta)$ で,

(1) $$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)u(z,t)=\sum_{j=1}^{n}A_j\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right)u(z,t)+A_0u(z,t)$$

(2) $$u(z,0)=u_0(z)$$

の原点における可解性を論じる。

定義3－1　局所コーシー問題(1)～(2)が原点において、D－適切であるとは，原点を含む $\mathbb{R}^n$ の開近傍 Ω_0 に対して、ある正数 η_0 が存在して、任意に $u_0\in\mathcal{E}'_x(\Omega_0;\mathbb{C}^N)$,

$(t\rightsquigarrow f(t))\in\mathcal{C}(\{|t|<\eta\};\mathcal{E}'_x(\Omega_0;\mathbb{C}^N))$ が それぞれ与えられた時，(1)－(2)の解 $u(t)$ が，

$$(t\rightsquigarrow u(t))\in\mathcal{C}^1(\{|t|<\eta_0\};\mathcal{E}'_x(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N))$$

である時をいう。

簡単のため，一つの記号を導入しておこう。$M\in M_N(\mathbb{C})$ に対して，$\chi(M)=\sup_{\chi\in\mathrm{Spec}M}(\mathrm{Re}\,\chi)$ と置く。ここで、$\mathrm{Spec}M$ は，M のスペクトル全体の集合である。今の場合、M は行列だから、その固有値全体の集合である。

定理3－2　局所コーシー問題(1)－(2)が原点において D-適切であるための必要十分条件は，$\exp(\chi(A(i\xi)))$ が，

$\xi \in \mathbb{R}^n$の緩増加函数であることである。

（略証）　今、(1)−(2)が原点において、D-適切であるとしよう。ここで、特にデータ(u_0, f)として、$f \equiv 0$, $u_0 = \delta \vec{e}$を取ろう。但し、$\vec{e}$は$\mathbb{C}^N$の任意のベクトルとする。この時、解は、リゾルベント$R(t,0)$により、

$$u(t) = R(t,0)u_0 = \rho(t,0) * \delta\vec{e} = \rho(t,0)\vec{e}$$

と表わされる。$\vec{e}$が任意であることと、D-適切であることより、

$$(t \rightsquigarrow \rho(t,0)) \in C^1(\{t : |t| < \eta_0\}; \mathcal{E}'_x(\mathbb{R}^n : M_N(\mathbb{C})))$$

である。ここで、$0 < \eta_1 < \eta_0$なるη_1を取ると$\{\rho(t,0)\}_{t \in [-\eta_1, \eta_1]}$は、$\mathcal{E}'_x(\mathbb{R}^n; M_N(\mathbb{C}))$のコンパクト部分集合になる。従って

ペーリー・ウィーナー・シュワルツの定理により、ある定数$C > 0$, $m \in \mathbb{N}$が存在して

$$\|\mathcal{F}\rho(t,0)(-i\xi)\|^{(注3)} \leqq C(1+|\xi|)^m \quad (t \in [-\eta_1, \eta_1])$$

である。

一方、$\mathcal{F}\rho(t,0)(-i\xi) = \hat{\rho}(t,0)(\xi)$より

$$\mathcal{F}[\rho(t,0)](\xi) = \hat{\rho}(t,0)(i\xi) = Y(t,0,i\xi) = \exp(tA(i\xi))$$

である。

故に、(*) $\|\exp(tA(i\xi))\| \leqq C(1+|\xi|)^m$

である。

(注3)　$\mathcal{F}$は、フーリエ変換を表わすことにする。

逆に、(*)が成立していれば、

$$\begin{aligned}&\|\exp(tA(i\xi))-\exp(t'A(i\xi))\|\\ &\leq \|A(i\xi)\|\cdot C(1+|\xi|)^m\cdot|t-t'|\\ &\leq C'(1+|\xi|)\cdot C(1+|\xi|)^m\cdot|t-t'|\end{aligned}$$

なる不等式が成立している。

一方、(*)より、$(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))^N$ の元 $\rho(t,0)$, $\rho(t',0)$ は、共にコンパクト台を持つ distribution である。

以上のことより、

$$(t \rightsquigarrow \rho(t,0)) \in \mathcal{C}(\{t;|t|<\eta_1\};\mathcal{E}'_x(\mathbb{R}^n;M_N(\mathbb{C})))$$

が従う。

実際、任意の $\varphi \in \mathcal{S}\otimes\mathbb{C}^N$ に対して、

$$\begin{aligned}&|\langle \rho(t,0)-\rho(t',0),\varphi(x)\rangle|\\ &=|\langle \mathcal{F}[\rho(t,0)-\rho(t',0)](\xi),\ \mathcal{F}^{-1}\varphi(\xi)\rangle|\\ &\leq \int \|[\hat{\rho}(t,0)-\hat{\rho}(t',0)](-i\xi)\|\cdot\|\mathcal{F}^{-1}\varphi(\xi)\|\,d\xi\\ &\leq C''\int_{\xi\in\mathbb{R}_n}(1+|\xi|)^{m+1}\|\mathcal{F}^{-1}\varphi(\xi)\|\,d\xi\cdot|t-t'|\end{aligned}$$

となる。よって $\int_{\xi\in\mathbb{R}_n}(1+|\xi|)^{m+1}\|\mathcal{F}^{-1}\varphi(\xi)\|\,d\xi<\infty$ より、$(t \rightsquigarrow \rho(t,0))$ の連続性が従う。

更に、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k e^{tA(i\xi)} = A(i\xi)^k e^{tA(i\xi)}$$

より、

$$(t \rightsquigarrow \rho(t,0)) \in \mathcal{C}^\infty(\{t:|t|<\eta_1\};\mathcal{E}'_x(\mathbb{R}^n;M_N(\mathbb{C})))$$

が従う。このことより，

$$(t \rightsquigarrow u(t)) \in \mathcal{E}'(\{|t| < \eta\};\ \mathcal{E}'_x(\mathbb{R}^n; M_N(\mathbb{C})))$$

が成立する。

実際，それは，

$$\begin{aligned} u(t) &= R(t,0)u_0 + \int_0^t R(t,\tau) f(\tau)\, d\tau \\ &= \rho(t,0) * u_0 + \int_0^t \rho(t,0) * f(\tau)\, d\tau \end{aligned}$$

より従う。

故に，D-適切性と，不等式(*)は同値である。

不等式(*)と $\exp(\chi(A(i\xi)))$ の緩増加性が同値であることを見るのは容易である。

(q.e.d)

タルスキー・ザイデンベルグの定理を使うことより，次の補題が成立する。

<u>補題3－3</u>　　$\exp(\chi(A(i\xi)))$ が $\xi \in \mathbb{R}^n$ の緩増加函数であることと，$\chi(A(i\xi))$ が有界であることとは同値である。

この補題3－3より，次のゴールディングの定理を得る。

<u>定理3－4</u>　　局所コーシー問題が，D-適切であるための必要十分条件は，$\chi(A(i\xi))$ が有界，即ち，方程式(1)が<u>ゴールディングの意味で双曲型</u>であることである。

Reference

[1] F.Treves: Ovcynnikov theorem and hyper-differential operators, Notas de Mathematica No.46, IMPA, Brazil, 1968.

[2] K.Aoki : Analytic Functionals and Cauchy Problems, Master Thesis of Sophia Univ, 1978.