数理解析研究所講究録
第 341 巻 1978 年 32-40

定係数の主部をもつ双曲型作用素に対する特異性の伝播

筑波大学 数学系　若林誠一郎

定係数の主部をもつm階の双曲型作用素 $P(x,D)=P_m(D)+Q(x,D)$を考える。ここで、$x=(x_1,\cdots,x_n)$, $D=-i(\partial/\partial x_1,\cdots,\partial/\partial x_n)$,

$$Q(x,D)=\sum_{|\alpha|<m} a_\alpha(x)D^\alpha \quad (a_\alpha\in C^\infty(R^n))$$

である。次の仮定の下で$P(x,D)$ に対するCauchy問題がwell-posedであることは、Dunn [2] によって証明された:

(A) 各$x\in R^n$に対して、$P(x,\xi)$は$\vartheta=(1,0,\cdots,0)$に関して双曲型多項式である。

ここでは、上の仮定の下で、解の波面集合についての定係数双曲型作用素に対するAtiyah-Bott-Gårding [1] の結果と同様の評価が得られることをしめす。

1. まず、Cauchy問題がwell-posedであることを、[2]とは異なる方法でしめす。

$$(1)\quad \begin{cases} P(x,D)u=f\in\mathcal{D}', & \operatorname{supp} f\subset\{x\in R^n;\, x_1\geqq 0\},\\ \operatorname{supp} u\subset\{x_1\geqq 0\} \end{cases}$$

の解を逐次近似によってもとめよう。すなわち

$$P_m(D)u_0 = f,\quad P_m(D)u_{\ell+1} = -Q(x,D)u_\ell,\quad \ell=0,1,2,\cdots$$

$$\operatorname{supp} u_\ell \subset \operatorname{supp} f + \Gamma(P_m,\vartheta)^*$$

とおけば、$u=\sum_{\ell=0}^{\infty} u_\ell$ が収束して(1)の解である。ここで、

$\Gamma(P_m,\vartheta) =$ '$\{\xi\in\mathbb{R}^n;\ P_m(\xi)\neq 0\}$ の ϑ を含む連結成分',

$$\Gamma^* = \{x\in\mathbb{R}^n;\ x\cdot\xi \geq 0 \quad \text{for } {}^\forall \xi\in\Gamma\}$$

である。Dunn は Payser の方法によってこれを証明したが、ここでは u_ℓ の Fourier-Laplace 変換 $\hat{u}_\ell$ の評価によって証明する。

補題1 (Svensson [4]). $P_m(\xi)$ が ϑ に関して双曲型多項式でかつ斉次多項式で、多項式 $p(\xi)$ が $(m-1)$ 次以下であるとする。そのとき、次の3つは同値である：

(i) $P_m(\xi)+p(\xi)$ は ϑ に関して双曲型多項式である。

(ii) $p \prec P_m$

(iii) $C(>0)$ が存在して、

$$\xi\in\mathbb{R}^n,\ |\mathrm{Im}\, s|\geq 1 \Longrightarrow \left|\frac{p(\xi+s\vartheta)}{P_m(\xi+s\vartheta)}\right| \leq C|\mathrm{Im}\, s|^{-1}$$

ここで、$p^{(\alpha)}(\xi)=\dfrac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha}p(\xi)$, $\tilde{p}(\xi)=\left(\sum_\alpha |p^{(\alpha)}(\xi)|^2\right)^{1/2}$ とおけば、$p\prec P_m$ は $C(>0)$ が存在して

$$\tilde{p}(\xi) \leq C\tilde{P}_m(\xi),\quad \xi\in\mathbb{R}^n$$

が成立することを意味する。

仮定(A)より

$$Q(x,\xi)=\sum q_j(x)p_j(\xi),\quad q_j\in C^\infty(\mathbb{R}^n),\ p_j\prec P_m,\ \deg p_j<m$$

と表わすことができる。これと補題1より次を得る。

補題2. (A)を仮定する。さらに、$a_\alpha\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f\in\mathcal{E}'$, $\mathrm{supp}\,f\subset\{x_1\geqq 0\}$ ならば

$$|\hat{u}_l(\xi-i\gamma\vartheta)|\leqq C(f)C(P_m)e^\gamma\gamma^{-1}(C(P_m,Q,s)/\gamma)^l\langle\xi\rangle^s,\quad l=0,1,2,\cdots,\ \gamma\geqq 1$$

が成立する。ここで、$|\hat{f}(\xi)|\leqq C(f)\langle\xi\rangle^s$, $\langle\xi\rangle=(1+|\xi|^2)^{1/2}$ である。

補題2と同じ仮定の下で、u を

$$\hat{u}(\xi-i\gamma\vartheta)=\sum_{l=0}^\infty\hat{u}_l(\xi-i\gamma\vartheta),\quad \gamma>C(P_m,Q,s)$$

によって定義すれば、u は(1)の解で

$$|\hat{u}(\xi-i\gamma\vartheta)|\leqq C'(f)C(P_m)e^\gamma\gamma^{-1}(1-C(P_m,Q,s)/\gamma)^{-1}\langle\xi\rangle^s,\quad \gamma>C(P_m,Q,s)$$

をみたす。特に $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ならば、$u\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ が従う。P^* も P と同じ仮定をみたすので、補題2と有限伝播性より、仮定(A)の下で Cauchy問題が well-posed であることが従う。また $\hat{u}_l$ を詳しく評価することによって、エネルギー不等式をしめすこともできる[5]。

2. $E(x,y)$ を $P(x,D)$ の基本解とする。すなわち

$$P(x,D_x)E(x,y)=\delta(x-y)$$

$$\operatorname{supp} E(x,y) \subset \{(x,y)\in \mathbb{R}^{2n};\ x-y\in \Gamma(P_m,\vartheta)^*\}$$

である。各$\xi^0\in\mathbb{R}^n$に対して

$$P(x, t\xi^0+\xi) = t^{r_{\xi^0}} P_{\xi^0}(x,\xi) + \sum_{j=1}^{\infty} t^{r_{\xi^0}-j} R^j_{\xi^0}(x,\xi),$$

$$R^j_{\xi^0}(x,\xi) \equiv 0 \quad \text{if } j > r_{\xi^0}$$

と表わす。ここで、r_{ξ^0}は非負整数でxには依存しない。また、$P_{\xi^0}(x,\xi)$はξ^0における$P(x,\xi)$の localization である。$P(x,\xi)$が仮定(A)をみたせば、$P_{\xi^0}(x,\xi)$も(A)をみたす。

$$P_{\xi^0}(x,D_x) E_0(x,y;\xi^0) = \delta(x-y),$$

$$P_{\xi^0}(x,D_x) E_j(x,y;\xi^0) = -\sum_{k=1}^{\infty} R^k_{\xi^0}(x,D_x) E_{j-k}(x,y;\xi^0),$$

$$\operatorname{supp} E_j \subset \{(x,y)\in\mathbb{R}^n;\ x-y\in\Gamma(P_{m\xi^0},\vartheta)^*\}$$

$$E_j(x,y,\xi^0) \equiv 0 \quad (j<0)$$

によって$E_j(x,y;\xi^0)$を定義すれば、次の定理を得る。

定理3. 仮定(A)の下で

$$t^N\{t^{r_{\xi^0}} \exp[-it(x-y)\cdot\xi^0] E(x,y) - \sum_{j=0}^{N} t^{-j} E_j(x,y;\xi^0)\}$$

$$\longrightarrow 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n}) \text{ as } t\to\infty, \quad N=0,1,2,\cdots$$

が成立する。さらに

$$\bigcup_{j=0}^{\infty} \{((x,y),(\xi^0,-\xi^0))\in T^*\mathbb{R}^{2n}\setminus 0;\ (x,y)\in \operatorname{supp} E_j(\cdot,\cdot;\xi^0)\}$$

$$\subset WF(E(x,y)), \qquad \xi^0\neq 0$$

が成立する。

3. (1)の解uの波面集合を(外側から)評価するには、基本解$E(x,y)$の波面集合の評価を導けばよく、[1]の方法と逐次近

似を用いて次の定理を得る。

定理4. 仮定(A)の下で、(1)の解 u に対して

$$WF(u) \subset C \circ WF(f)$$

が成立する。ここで

$$C = \{((x,\xi),(y,\eta)) \in T^*\mathbb{R}^n \times T^*\mathbb{R}^n \setminus 0\,;\ \xi=\eta \text{ and } x-y \in \Gamma(P_{m\xi},\vartheta)^*\}$$

である。

以下、定理4の略証を与える。一般性を失うことなく、$Q(x,D)$ の係数 a_α は C_0^∞ に属すると仮定してよい。定理をしめすには、

$$WF(E(x,y)) \subset \{((x,y),(\xi,\eta)) \in T^*\mathbb{R}^{2n} \setminus 0\,;((x,\xi),(y,-\eta)) \in C\}$$

を証明すればよい。$x^0, y^0 \in \mathbb{R}^n$, $\xi^0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $x^0-y^0 \notin \Gamma(P_{m\xi^0},\vartheta)^*$ とする。そのとき、x^0 の近傍 U_1 と y^0 の近傍 U_2, $\eta_0 \in \Gamma(P_{m\xi^0},\vartheta)$ が存在して、

$$(x-y)\cdot\eta^0 < 0 \qquad \text{for } {}^\forall x \in U_1,\ y \in U_2$$

をみたす。そのとき、[1] Lemma 5.1 より次を得る。

補題5. ξ^0 の凸開錐近傍 Γ, 正数 δ, t_0 が存在して、

$$P_m(\xi - i(t|\xi|\zeta + \vartheta)) \neq 0 \text{ when } 0 \leq t \leq t_0,\ \xi \in \Gamma,\ |\zeta-\eta^0| \leq \delta,\ \zeta \in \mathbb{R}^n$$

をみたす。

この補題　　　を用いて、定理4の証明において重要な

次の補題がしめされる。

補題6. $p \prec P_m$, $\deg p < m$ とする。そのとき、

$$\left|\frac{p(\xi - i(t|\xi|\eta^0 + \gamma\vartheta))}{P_m(\xi - i(t|\xi|\eta^0 + \gamma\vartheta))}\right| \leq C(P_m, p)/\gamma$$

$$\text{when } \xi \in \Gamma,\ 0 \leq t \leq t_0,\ \gamma \geq 1.$$

今、

$$P_m(D_x - i\gamma\vartheta)F_0(x, y; \gamma) = \delta(x-y),$$

$$P_m(D_x - i\gamma\vartheta)F_{l+1}(x, y; \gamma) = Q(x, D_x - i\gamma\vartheta)F_l(x, y; \gamma),$$

$$\mathrm{supp}\, F_l(x, y; \gamma) \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n};\ x - y \in \Gamma(P_m, \vartheta)^*\},$$

$$l = 0, 1, 2, \cdots$$

によって $F_l(x, y; \gamma)$ を定義する。そのとき、γ 十分大に対して

$$F(x, y; \gamma) = \sum_{l=0}^{\infty} F(x, y; \gamma)$$

が $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ で存在し、

$$F(x, y; \gamma) = \exp[-\gamma(x_1 - y_1)]E(x, y)$$

である。$\varphi_j \in C_0^\infty(U_j)$ $(j = 1, 2)$ に対して、$\varphi(x, y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$ とおく。そのとき、

$$\mathcal{F}_{(x,y)}[\varphi F_l](\xi, \eta) = \sum_{j_1, \cdots, j_l, \pm} (-1)^l (2\pi)^{-(1+l)n}$$

$$\times \int d\zeta^0\, \hat{\varphi}_1(\tfrac{1}{2}\xi - \zeta^0)P_m(\tfrac{1}{2}\xi + \zeta^0 - i\gamma\vartheta)^{-1}$$

$$\times \{\int d\zeta^1\, \hat{g}^{\varepsilon\pm}_{j_1, l}(\zeta^1; |\xi|)\, q_{j_1}(\tfrac{1}{2}\xi + \zeta^0 - \zeta^1 - i\gamma\vartheta)P_m(\tfrac{1}{2}\xi + \zeta^0 - \zeta^1 - i\gamma\vartheta)^{-1}$$

$$\times \{ \text{----}$$

$$\times\{\int d\varsigma^l\, \hat{q}^{\varepsilon\pm}_{j_l l}(\varsigma^l;|\xi|)\, p_{j_l}(\tfrac{1}{2}\xi+\varsigma^0-\varsigma^1-\cdots-\varsigma^l-i\gamma\vartheta)$$

$$\times P_m(\tfrac{1}{2}\xi+\varsigma^0-\varsigma^1-\cdots-\varsigma^l-i\gamma\vartheta)^{-1}\hat{\varphi}_2(\tfrac{1}{2}\xi+\eta+\varsigma^0-\varsigma^1-\cdots-\varsigma^l)\}\cdots\}.$$

ここで、$\hat{q}^{\varepsilon+}_{jl}(\varsigma;s)=\chi^\varepsilon_l(\varsigma;s)\hat{q}_j(\varsigma)$, $\hat{q}^{\varepsilon-}_{jl}(\varsigma;s)=(1-\chi^\varepsilon_l(\varsigma;s))\hat{q}_j(\varsigma)$,

$$\chi^\varepsilon_l(\varsigma;s)=1 \quad \text{if } |\varsigma|<\varepsilon s/l, \quad =0 \quad \text{if } |\varsigma|>\varepsilon s/l$$

である。

$$I^+=\Sigma_{j_1,\cdots,j_l,+}\quad(\,\text{〃}\,)$$

$$I^-=\mathcal{F}_{(x,y)}[\varphi F_l](\xi,\eta)-I^+$$

とおけば、補題1より

$$|I^-|\leqq C(Q)C(P_m)\gamma^{-1}l^N(C(P_m,Q)/\gamma)^l|\varphi_1|_{n+1}|\varphi_2|_0$$

$$\times|Q|_{N+n+1}\langle\xi\rangle^{-N},\qquad \gamma\geqq 1$$

が従う。ここで、$|Q|_k=\sup_j|q_j|_k$, $|f|_k=\sup_{|\alpha|\le k,\ x\in R^n}|D^\alpha f(x)|$ で、$C(Q)$ は Q に関しては、$\mathrm{supp}\, q_j$ と $|Q|_{n+1}$ にのみ依存し、$C(P_m,Q)$ は $|Q|_0$ に依存する。次に、I^+ を評価しよう。正数 ε と ξ^0 の錐近傍 Γ' を適当にとって、

$$\xi\in\Gamma' \text{ かつ } |\varsigma|<\varepsilon|\xi| \Longrightarrow \tfrac{1}{2}\xi+\varsigma\in\Gamma$$

となるようにできる。$\Phi(\varsigma)\in C^\infty$ を、$|\varsigma|\geqq 1$ において0次の正斉次函数で、$\Phi(\varsigma)=1$ on nb.d. of $\Gamma'\cap\{|\varsigma|\geqq 1\}$, $\mathrm{supp}\,\Phi\subset\Gamma\cap\{|\varsigma|>\tfrac{1}{2}\}$, $0\leq\Phi(\varsigma)\leq 1$ をみたすようにえらぶ。

$$v_t(\varsigma)=t|\varsigma|\Phi(\varsigma)\eta^0$$

$$V_t=\{\varsigma^0\in\mathbb{C}^n;\ \varsigma^0=\varsigma-iv_t(\varsigma),\ \varsigma\in R^n\}$$

とおけば、補題6とStokesの定理より、

$$I^{+} = \Sigma_{j_1,\cdots,j_l} (-1)^l (2\pi)^{-(1+l)n} \int_{V_{t_0}} d\xi^0 \int_{\mathbb{R}^n} d\xi^1 \cdots \int_{\mathbb{R}^n} d\xi^l$$
$$\cdots$$

を得る。補題6と[1]の方法によって、

$$|I^{+}| \leq C(Q)C(P_m)\gamma^{-1}(C(P_m,Q)/\gamma)^l |\varphi_1|_{N+n+1}|\varphi_2|_0 \langle\xi\rangle^{-N},$$
$$N=0,1,2,\cdots, \quad \text{if } \xi\in\Gamma' \text{ and } \gamma\geq 1$$

がしめされる。故に

$$|\mathcal{F}_{(x,y)}[\varphi F](\xi,\eta)| \leq C(P_m,Q,\gamma)(|\varphi|_{n+1}|Q|_{N+n+1}+|\varphi|_{N+n+1})$$
$$\times\langle\xi\rangle^{-N}, \quad N=0,1,2,\cdots, \text{ if } \xi\in\Gamma', \gamma>C(P_m,Q)$$

ここで、$C(P_m,Q,\gamma)$ も Q に関しては $|Q|_0$ にのみ依存する。これは、

$$((x^0,y^0),(\xi^0,\eta))\notin WF(E(x,y)) \text{ when } x^0-y^0\notin\Gamma(P_{m\xi^0},\vartheta)^*, \eta\in\mathbb{R}^n$$

をしめす。また、$((x^0,y^0),(\xi,\eta))\in T^*\mathbb{R}^{2n}\setminus 0$, $\xi\neq-\eta$ のとき、

$$((x^0,y^0),(\xi,\eta))\notin WF(E(x,y))$$

も容易に従う。よって、定理4がしめされた。

定理4の証明より次のことは明らかであろう。

定理7. 条件(A)を仮定し、さらに、$a_\alpha\in C^L(\mathbb{R}^n)$ ([3]参照)を仮定する。そのとき

$$WF_L(u) \subset C\circ WF_L(f)$$

である。

References

[1] Atiyah, M. F., Bott, R. and Garding, L., Lacunas for hyperbolic differential operators with constant coefficients I, Acta Math., 124 (1970), 109-189.

[2] Dunn, J. L., A sufficient condition for hyperbolicity of partial differential operators with constant coefficient principal part, Trans. Amer. Math. Soc., 201 (1975), 315-327.

[3] Hormander, L., Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients, Comm. Pure Appl. Math., 24 (1971), 671-704.

[4] Svensson, S. L., Necessary and sufficient conditions for the hyperbolicity of polynomials with hyperbolic principal part, Ark. Mat., 8 (1969), 145-162.

[5] Wakabayashi, S., Propagation of singularities for hyperbolic operators with constant coefficient principal part, to appear.