数理解析研究所講究録
第 341 巻 1978 年 70-71

形式解が常に収束する組型微分方程式のあるクラスについて

柏原 − 河合 − Sjöstrand

常微分方程式論で最も驚嘆すべき結果の一つとして，確定特異点型の方程式の形式解は常に収束する，という事実がある。（尚，この逆は成立しない。このような初等的事実のからくりがごく最近になる迄明らかにされなかったのはいささか不思議である。）更に驚くべきことは，偏微分方程式に対してはこの種の結果が殆んど知られていないことである。（但し，最近の Gérard − 渋谷 及び 真島 の結果は極めて示唆的である。）一般的な結果としては，わずかに，大島の一階単独方程式に対する結果と，Baouendi − Sjöstrand によるある種の退化した楕円型方程式に対する結果をかぞえ得るのみであろう。他方，最近，柏原 − 河合は，確定特異点型の極大過剰決定系の解析的特徴付けに成功した。具体的問題にその特徴付けを応用する際には，単独の方程式に対して形式解の収束性を保証する条件が知られれば極めて好都合である。このような，理論・応用両面からの要請に応えるべく考察して得られたのが次の結果である。

定理. $P = \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} a_{\alpha\beta}(x)\, x^\alpha D_x^\beta$ $\quad (a_{\alpha\beta}(x) \in \mathcal{O}_0)$

に対し $\displaystyle\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(0)\, x^{\alpha}\bar{x}^{\beta} \neq 0 \qquad (x \in \mathbb{C}^n - \{0\})$

が成立すれば、 $Pu=0$ の形式解は収束する。より詳しく言えば

$$\mathrm{Ker}(P;\ \hat{\mathcal{O}} \to \hat{\mathcal{O}}) \cong \mathrm{Ker}(P;\ \mathcal{O}_0 \to \mathcal{O}_0)$$

$$\mathrm{Cok}(P;\ \hat{\mathcal{O}} \to \hat{\mathcal{O}}) \cong \mathrm{Cok}(P;\ \mathcal{O}_0 \to \mathcal{O}_0)$$

論理的には必要ない注意であるが、この定理を得る際、楕円型方程式系に対する有限次元性の定理は、指導原理として本質的に有用であった。証明は、楕円型方程式系の解に対するアプリオリ評価を用いる。然るべき付帯条件の下に、定理を $\hat{\mathcal{O}}_{X|Y,0}$ に対しても拡張できる。極大過剰決定系への応用には、そちらの方がより有用かも知れない。