数理解析研究所講究録
第 341 巻 1978 年 129-142

弱双曲型方程式に対するCauchy問題

早大 理工　瓜生 等

§1 序

特性根がm重に交わる或る双曲型方程式について、コーシー問題のパラメトリクスの構成を行う。

次の偏微分作用素に対してコーシー問題を考える。

$$\begin{cases} P(x,t,D_x,D_t)u(x,t) = f(x,t) & \text{in } \mathbb{R}^\ell \times (0,T] \\ (D_t^j u)(x,0) = u_j(x) & \text{for } j = 0,1,\cdots,m-1 \end{cases}$$

ここで、$P = D_t^m + \sum_{\substack{|\alpha|+j\leq m \\ j\leq m-1}} a_{\alpha,j}(x,t) D_x^\alpha D_t^j$, $a_{\alpha j}\in C^\infty$。

さらに P を同次部分に分解しよう。即ち,

$$P = P_m + P_{m-1} + \cdots + P_0.$$

ここで, $P_{m-j}(x,t,\xi,\tau) = \sum_{i=0}^{m-j} a_{ij}(x,t,\xi)\tau^{m-j-i}$

で、$a_{ij}(x,t,\xi)$ は ξ について i 次斉次。

このとき、次の定理が成立する。

定理 1

(1) $p_m(x, t, \xi, \tau) = \prod_{j=1}^{m} (\tau - t^k \lambda_j(x, t, \xi))$

$\{\lambda_j\}$ は real valued smooth function で互いに distinct, さらに $\lambda_j(x, 0, \xi) \neq 0$。

このとき、低階条件として、

(2) $a_{ij}(x, t, \xi) = t^{ik-j} \tilde{a}_{ij}(x, t, \xi)$ for $ik > j$

ここで, $\tilde{a}_{ij}(x, t, \xi) \in C^\infty$

$\Leftrightarrow$ P に対するコーシー問題は C^∞-適切である。

定理 2. (特に $l = 1$ のとき)

(3) $p_m(x, t, \xi, \tau) = \prod_{j=1}^{m} (\tau - x^k \lambda_j(x, t, \xi))$

$\{\lambda_j\}$ は real valued smooth function で互いに distinct, さらに $\lambda_j(0, t, \xi) \neq 0$

このとき, 低階条件として、

(4) $a_{ij}(x, t, \xi) = x^{ik} \tilde{a}_{ij}(x, t, \xi)$, ここで $\tilde{a}_{ij} \in C^\infty$

$\Leftrightarrow$ P に対するコーシー問題は、C^∞-適切である。

注.

十分性の証明は [8] 参照。必要性の証明は、Ivrii-Petkov [4] の定理 4.1 に適用するのだが、このとき伝播速度が有限である事を示す必要がある。

これについては田原氏より簡単に示せる事を教えていただきました。

さて、定理1, 定理2の条件の下でパラメトリクスの構成を行う。

定理 1′

定理1の条件の下で、次の函数を定義する。

$$G_i(x,\xi) = \sum_{j=0}^{m-1}(m-j)\lambda_i^{m-j-1}(x,0,\xi)\tilde{a}_{j,0}(x,0,\xi)$$

$$H_i(x,\xi) = k\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{2}(m-j)(m-j-1)\lambda_i^{m-j-1}(x,0,\xi)\tilde{a}_{j,0}(x,0,\xi) + \sqrt{-1}\sum_{j=1}^{m-1}\lambda_i^{m-j-1}(x,0,\xi)\tilde{a}_{j,1}(x,0,\xi)$$

このとき, $\{\lambda_i\}$ が互いに distinct であることより $G_i(x,\xi) \neq 0$ だから, $m_i = \sup_{(x,\xi)} Re\left\{-\frac{H_i(x,\xi)}{G_i(x,\xi)}\right\}$ が定義できる。

このとき任意の $\varepsilon>0$ に対して, 或る

$a_{h,i}(x,t,\xi) \in S^{\frac{1}{k+1}(m_i-h+\varepsilon),\, m_i+\varepsilon}$

$\tilde{a}_{h,i}(x,t,\xi) \in S^{\frac{1}{k+1}(m_i-h+\varepsilon)}$

が存在して、コーシー問題;

$$(5)\begin{cases} P(x,t,D_x,D_t)u(x,t) = 0 \\ (D_t^h u)(x,0) = u_h(x) \quad \text{for } h=0,1,\cdots,m-1 \end{cases}$$

に対するパラメトリクスは、

(6) $$E(t,x) = \sum_{h=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{m}\int e^{i\varphi_j(x,t,\xi)}(a_{h,j}+\tilde{a}_{hj})\hat{u}_h(\xi)d\xi$$

と表わされる。ここで $\varphi_j(x,t,\xi)$ は、次の方程式の解である。

(7) $$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = t^k\lambda_j(x,t,\nabla_x\varphi), \quad \varphi(x,0,\xi) = x\xi$$

注.

1° S^k ($S^{k,\ell}$) は Hörmander (Boutet de Monvel) class の擬微分作用素の表象.

2° m_i は、P_m と P_{m-1} のみで決る。

3° 中村氏 [2] の条件を我々の形に書きなおしてみると, $a_{ij}(x,t,\xi) = t^{\mu_{ij}}\tilde{a}_{ij}(x,t,\xi)$ とおいたとき, $\mu_{ij} > ik-j$ というものであった。従って氏の条件の下では, $H_i(x,\xi)$ において, 円 $\sum_{j=1}^{m-1}\lambda_i^{m-j-1}(x,0,\xi)\tilde{b}_{j,1}(x,0,\xi) = 0$ となっていて低階からの影響がでていなかった。

次に定理2に対応するパラメトリクスを考える。定理2の条件の下では主部が対角形の系になおすことができる。従って、Kumano-go, Taniguchi, Tozaki

[3]によるFourier積分作用素の多重積で基本解を構成する事ができる。まとめて,

定理2′

定理2の条件のもとで，Fourier積分作用素の多重積で基本解を構成することができる。

以下、本稿で行うことは、定理1′の略証を与える事である。

§2 定理1′の略証

簡単のため次のコーシー問題を考える。

$$(8)\begin{cases} P(x,t,D_x,D_t)u(x,t)=0 \\ u(x,0)=u(x), \quad (D_t^h u)(x,0)=0 \quad 1\leq h\leq m-1 \end{cases}$$

パラメトリクスとして、次の形を考える。

$$(9)\ E(t,x)=\sum_{j=1}^{m}\int e^{i\varphi_j(x,t,\xi)}e_j(x,t,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi$$

P を形式的に作用させてみると,

$$PE(t,x)=\sum_{j=1}^{m}\int e^{i\varphi_j(x,t,\xi)}T_j(x,t,\xi,D_x,D_t)e_j(x,t,\xi)\times\hat{u}(\xi)d\xi$$

なる作用素 $T_j(x,t,\xi,D_x,D_t)$ が定まる。これを transport operator と呼ぶことにする。

定義

$p(x,t,\xi,D_x,D_t)$ が semi-homogeneous degree j であるとは、変換：

$$(t,x,\xi) \longrightarrow (\lambda^{-\frac{1}{k+1}}, x, \lambda\xi) \quad \lambda>0$$

によって、p が $\lambda^j p(x,t,\xi,D_x,D_t)$ に移る事である。

このとき次の lemma が成立する。

Lemma 1

T_j は次のように semi-homogeneous part に分解される。$T_j = T_{j,0} + T_{j,1} + \cdots$，ここで $T_{j,i}$ は semi-homogeneous degree $\frac{m-i}{k+1}$。特に，

$$(10) \quad T_{j,0}\,u = e^{-i\frac{t^{k+1}}{k+1}\lambda_j(x,0,\xi)} L_0\left(e^{i\frac{t^{k+1}}{k+1}\lambda_j(x,0,\xi)} u\right)$$

ここで，$L_0 = \sum_{\substack{ik\geq j \\ j\leq \frac{k}{k+1}m}} \tilde{a}_{ij}(x,0,\xi)\, t^{ik-j} D_t^{m-i-j}$

次に $t=|\xi|^{-\frac{1}{k+1}}s$ と変換すると，L_0 は次のように表現できる。

$$(11)\quad L_0 = |\xi|^{\frac{m}{k+1}}\Big(\sum_{\substack{ik\geq j\\ j\leq\frac{k}{k+1}m}} b_{ij}(x,\xi)s^{ik-j}D_s^{m-j-i}\Big)$$

$$= |\xi|^{\frac{m}{k+1}} M_0$$

ここで，$b_{ij}(x,\xi) = |\xi|^{-i}\tilde{a}_{ij}(x,\xi)$

さらに singular な変換：$s' = \frac{1}{k+1}s^{k+1}$ を行って M_0 を $s'=\infty$ が不確定特異点 rank 1 となる作用素に移す。

Lemma 2

M_0 は変換：$s' = \frac{1}{k+1}s^{k+1}$ により次のように移る。

$$(12)\quad M_0 = \{(k+1)s'\}^{\frac{k}{k+1}m} N_0$$

ここで，$N_0 = D_{s'}^{m} + \sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{i=0}^{j} c_{ji}s'^{i}\Big)s'^{-j}D_{s'}^{m-j}$

N_0の解に対しては、形式解の $s'\to\infty$ での漸近的意味付が Nakamura [2] で与えられている。従って、M_0 の形式解の $s\to\infty$ での漸近的意味付を得る事ができる。

さて、パラメトリクスの構成を始めよう。transport operator を Lemma 1 で semi-homogeneous part に分解したが，$e_j(x,t,\xi)$ も同様に分解して求める。即ち，

$$e_j(x,t,\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} e_{j,i}(x,t,\xi)$$

ここで $e_{j,i}(x,t,\xi)$ は semi-homogeneous deg. $-\frac{i}{k+1}$

すると，$T_j(x,t,\xi,D_x,D_t)\,e_j(x,t,\xi)=0$ より，

$$(13)\begin{cases} T_{j,0}\,e_{j,0} = 0 \\ T_{j,0}\,e_{j,i} = -\sum_{r=1}^{i} T_{j,r}\,e_{j,i-r} \end{cases}$$

そこで，$e^{(i)}(x,t,\xi) = \sum_{j=1}^{m} e^{i\frac{1}{k+1}t^{k+1}\lambda_j(x,0,\xi)}\,e_{j,i}(x,t,\xi)$

とおくと，(13) は次の方程式に移る。

$$(14)\begin{cases} L_0\,e^{(0)} = 0 \\ L_0\,e^{(i)} = -\sum_{j=1}^{m} e^{i\frac{1}{k+1}t^{k+1}\lambda_j(x,0,\xi)} \sum_{r=1}^{i} T_{j,r}\,e_{j,i-r} \end{cases}$$

$\sum_{r=1}^{i} T_{j,r}\,e_{j,i-r}$ の semi-homogeneous deg. は $\frac{m-i}{k+1}$ である事に注意すると我々は次の問題を考えればよい。

$$(15)\quad \boxed{\begin{array}{l} L_0\,e^{(i)} = \sum_{j=1}^{m} e^{-\frac{1}{k+1}t^{k+1}\lambda_j(x,0,\xi)}\,g_j^{i}(x,t,\xi) \\ \text{ここで、} g_j^i(x,t,\xi) \text{ は，semi-homogeneous deg. } \frac{m-i}{k+1} \end{array}}$$

そこで，$t = |\xi|^{-\frac{1}{k+1}}s$ と変換してみると，(15)は

$$M_0 \tilde{e}^{(i)} = \sum_{j=0}^{m} e^{i\frac{1}{k+1}s^{k+1}\tilde{\lambda}_j(x,0,\xi)}\, g_j^i\left(x, s, \frac{\xi}{|\xi|}\right)$$

ここで， $\tilde{e}^{(i)}(x,s,\xi) = e^{(i)}\left(x,s,\frac{\xi}{|\xi|}\right)$

$\tilde{\lambda}_j(x,0,\xi) = \lambda_j(x,0,\xi)/|\xi|$

すでに見たようにM_0の形式解の漸近的意味付が与えられる事はわかっているので、我々は形式解にのみ注目すれば良い。この事から次のLemmaが従う。

Lemma 3

(16) $D_s^{\alpha_0} D_{x,\xi}^{\alpha}\, \tilde{e}_{j,i}(x,s,\xi) = O\left(s^{m_j+i-\alpha_0}(\log s)^{\Phi(\alpha,i)}\right)$

ここで，$\Phi(\alpha,i)$ は，positive integer

$\tilde{e}_{j,i}(x,s,\xi) = e_{j,i}\left(x,s,\frac{\xi}{|\xi|}\right)$

さて，Boutet de Monuel クラスを定義しよう。

定義

$a(t,x,\xi) \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+}\times\mathbb{R}^n\times\dot{\mathbb{R}}^n)$ が $S^{g,r}$ に属すとは、任意の α,β，$K \subset \mathbb{R}^n$ compact set，に対し或る $C_{\alpha\beta,K}$ が存在して，次の評価を満たす事である。

$$|D_t^{\alpha_0} D_x^{\alpha'} D_\xi^{\beta} a(t,x,\xi)| \le C_{\alpha\beta K}(1+|\xi|)^{g-|\beta|}\left(|\xi|^{-1}+t^{k+1}\right)^{\frac{r-\alpha_0}{k+1}}$$

lemma 3 より, $s=|\xi|^{\frac{1}{k+1}}t$ と変数をもどしてやると、次の lemma を得る。

Lemma 4.

(17) $e_{j,i}(x,t,\xi)\in S^{\frac{1}{k+1}(m_j+\varepsilon),\, m_j+i+\varepsilon}$

for any $\varepsilon>0$

ここで、Boutet de Monvel class の一般的な性質に注目しよう。

Proposition

1° $S^{g,r}\subset S^{g',r'}$ if $g-\frac{r}{k+1}\leqq g'-\frac{r'}{k+1}$

2° $S^{g,\infty}$ の元は、$S^{-\infty}$ の元と $t=0$ で flat な S^{g} の元との和で書ける。

3° $p_j\in S^{g,r+j}$ $(j=0,1,\cdots)$ が与えられたとき、或る p が存在し、$p\in S^{g,r}$ で

$$p-\sum_{j<N}p_j\in S^{g,r+N} \text{ for any } N\geqq 0$$

Lemma 4 より Proposition の 3° を使えば、或る $e_j\in S^{\frac{1}{k+1}(m_j+\varepsilon),\, m_j+\varepsilon}$ が存在して、

$$e_j-\sum_{i<N}e_{j,i}\in S^{\frac{1}{k+1}(m_j+\varepsilon),\, m_j+\varepsilon+N} \text{ for any } N\geqq 0$$

ところで，今求めた e_j でパラメトリクスが作れたわけではない。なぜなら，$T_j e_j \in S^{-\infty}$ ではないからである。ところが次の lemma が成り立つ。

<u>Lemma 5</u>

(18) $T_j e_j \in S^{\frac{1}{k+1}(m_j+\varepsilon)+m-1,\infty}$

従って Proposition 2° より $T_j e_j$ は $S^{-\infty}$ を法として $t=0$ で flat な表象 $S^{\frac{1}{k+1}(m_j+\varepsilon)+m-1}$ となる。

そこで、改めてパラメトリクスとして補正項を考え合わせ次のように書く。

$$E(x,t) = \sum_{j=1}^{m} \int e^{i\varphi_j(x,t,\xi)} (e_j + \tilde{e}_j)\, \hat{u}(\xi) d\xi$$

P を作用させると，

$$PE(x,t) = \sum_{j=1}^{m} \int e^{i\varphi_j(x,t,\xi)} T_j (e_j + \tilde{e}_j)\, \hat{u}(\xi) d\xi$$

$T_j(e_j + \tilde{e}_j) = 0$ となるように $\tilde{e}_j$ を求めたい。
上の注意より，そのためには次を解けば良い。

(19) $T_j \tilde{e}_j = r_j \qquad r_j \in S^{\frac{1}{k+1}(m_j+\varepsilon)+m-1}$
$\qquad\qquad\qquad\qquad r_j$ は $t=0$ で flat

今度は T_j を同次部分に分解する。

<u>Lemma 6</u>

$$T_j = \sum_{i=0}^{m-1} \tilde{T}_{j,i}$$

ここで $\tilde{T}_{j,i}$ は，ξ について $m-1-i$ 次斉次

特に，

$$(20)\quad \tilde{T}_{j,0} = t^{(m-1)k-1} A_{j,0}\left\{t\left(D_t + \sum_{\nu=1}^{n} A_{j\nu} D_{x_\nu}\right) + B_j\right\}$$

$$A_{j,0}(x,t,\xi) \neq 0$$

そこで $\dfrac{dX_\nu}{dt} = A_{j,\nu}(X,t,\xi)$，$X_\nu(0) = x_\nu$ の解

$X_\nu = X_\nu(x,t,\xi)$ で変数変換すると，(20) は，

$$(21)\quad \tilde{T}_{j,0} = t^{(m-1)k-1} \tilde{A}_{j,0}(t,X,\xi)\{tD_t + \tilde{B}_j(t,X,\xi)\}$$

に移る。

(19) を解くために，$\tilde{e}_j = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{e}_{ji}$ とすると，次の方程式群を得る。

$$\begin{cases} \tilde{T}_{1,0}\,\tilde{e}_{j,0} = r_j \\ \tilde{T}_{j,0}\,\tilde{e}_{j,i} = -\displaystyle\sum_{k=1}^{\min\{m-1,i\}} \tilde{T}_{j,k}\,\tilde{e}_{j,i-k} \qquad i \geq 1 \end{cases}$$

$\tilde{e}_{j,i} \in S^{\frac{1}{k+1}(m_j+\varepsilon)-i}$ で $t=0$ で flat であるように

解きたい。ところで、それを保障するものとして次の lemma がある。

<u>Lemma 7.</u> (Yoshikawa [6])

$a(t) \in C^\infty[0,\infty)$ のとき, $t=0$ で flat な $f(t) \in C^\infty[0,\infty)$ に対し方程式;

$$\left(t\frac{d}{dt} + a(t)\right) u(t) = f(t)$$

は $t=0$ で flat な解 $u(t) \in C^\infty[0,\infty)$ を持つ。

従って lemma 6, 7 より $\tilde{e}_{j,i} \in S^{\frac{1}{k+1}(m_j+\varepsilon)-i}$ で $t=0$ で flat になるように $\tilde{e}_{j,i}$ が求まる。さらに Hörmander class の性質より, 或る $\tilde{e}_j \in S^{\frac{1}{k+1}(m_j+\varepsilon)}$ が存在して、次を満たす。

$$\tilde{e}_j - \sum_{i<N} \tilde{e}_{ji} \in S^{\frac{1}{k+1}(m_j+\varepsilon)-N} \qquad N \geq 0$$

今度は, $T_j\tilde{e}_j = r_j$ を mod $S^{-\infty}$ で満たしている。従って、求めるパラメトリクスが得られた事になる。

参考文献

(1) Zeman, M., The wellposedness of the Cauchy problem for partial differential equations with multiple characteristics, comm. in Partial Differential Equations 2(3) 223-249 (1977)

(2) Nakamura, G., A parametrix of a certain linear hyperbolic partial differential equation with variable multiplicity, to appear

(3) Kumanogo, H., Taniguchi, K., Tozaki, Y., Multi-product of phase functions for Fourier integral operators with an application, comm. in Partial Differential Equations 3(4) 349-380 (1978)

(4) Ivrii, V., Petkov, V., Necessary conditions for the Cauchy problem for non-strictly hyperbolic equations to be well-posed, Russian Math. Surveys 29, 3-70 (1974)

(5) Ohya, Y., Le problème de Cauchy à caracteristiques multiples, Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa vol.IV, 4 757-805 (1977)

(6) Yoshikawa, A., Construction of a parametrix for the Cauchy problem of some weakly hyperbolic equation I, II, III, to appear

(7) Uryu, H., The Cauchy problem for weakly hyperbolic equations, in preparation

(8) Uryu, H., 弱双曲型方程式に対するコーシー問題. 早大理工修士論文 (1978)