数理解析研究所講究録
第 341 巻 1978 年 143-152

擬微分作用素のL^2-有界性とコンパクト性について

東大 理　青木 薫

1. 序

有限階の微分可能性を仮定して、擬微分作用素のL^2-有界性を求めた結果は、次の様なものが知られている。

(i) A.P. Calderón－R. Vaillancourt [2, 3] (特に[2])

$$D_x^\alpha D_\xi^\beta a \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \quad \text{for } \alpha_\ell, \beta_k = 0, 1, 2, 3$$

ならば、$a(X, D)$ は L^2-有界である。

(ii) H.O. Cordes [4]

$$D_x^\alpha D_\xi^\beta a \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \quad \text{for } |\alpha|, |\beta| \leqq [n/2]+1$$

ならば、$a(X, D)$ は L^2-有界である。

(iii) T. Kato [5]　　$0 < \rho < 1$ の時

$$(1+|\xi|)^{(|\beta|-|\alpha|)\rho} D_x^\alpha D_\xi^\beta a \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \quad \text{for } |\alpha| \leqq [n/2]+2$$

$|\beta| \leqq [n/2]+1$　　ならば、$a(X, D)$ は L^2-有界である。

これらの証明方法は、すべて symbol を convolution に分解し、非常に扱い易い symbol を持つ擬微分作用素を重みをつけて、

積分するという形に、一般の擬微分作用素を表示して、L^2-operator norm を調らべるというものである。ここでは、(ii)と(iii)に於て、L^∞-norm を (L^1+L^p)-norm $(1\leqq p\leqq\infty)$ に取り替ても、同じ結果が成立すること、さらにコンパクト性に関しても($p=\infty$ の時には、ある付加条件の下で)結果が得られることを報告する。詳しい証明は、後日発表する予定である。

2、定義・記号

C^∞-symbol を扱うのではなく、有限階の微分可能性しか仮定しないから、simple symbol に対する擬微分作用素を次の様に定義する。(T. Kato [5] による。)

<u>定義</u> simple symbol $a(x,\xi)\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ に対して Ψ.D.Op $A=a(X,D):\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ を次の等式で定める。

$$ {}_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)}\langle Au, v\rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} = {}_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)}\langle a, w\rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)} $$

$$ w(x,\xi) = (2\pi)^{-n/2} e^{i\xi\cdot x}\,\hat{u}(\xi)\,v(x) $$

ここで $u,v\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$。

特に $a(x,\xi)=x_j$ の時 $a(X,D)=X_j$(函数 x_j を掛ける作用素)

$a(x,\xi)=\xi_j$ の時 $a(X,D)=D_j=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$ となる。

<u>記号</u> $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上の有界線型作用素の全体を $B(L^2(\mathbb{R}^n))$ とする。$C(L^2(\mathbb{R}^n))$ でコンパクト作用素全体を表わし、その部分空間 $C_p(L^2(\mathbb{R}^n))$ $(p>0)$ を norm $\|\cdot\|_p$ が有限なコンパクト作用素全体とする。ここで $\|\cdot\|_p$ は、コンパクト

作用素Tに対し、

$$|T| = (T^*T)^{1/2} = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_j \, (\cdot, \psi_j)\psi_j \ , \ \{\psi_j\} : \text{base of } L^2(\mathbb{R}^n)$$

$$\lambda_j \geqq 0 \ , \quad \|T\|_p = \begin{cases} (\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_j{}^p)^{1/p} & (0<p<\infty) \\ \sup_j \lambda_j & (p=\infty) \end{cases}$$

によって定義される。 特に、$C_1(L^2(\mathbb{R}^n))$は、trace classであり $C_2(L^2(\mathbb{R}^n))$は Hilbert-Schmidt class、$C_\infty(L^2(\mathbb{R}^n)) = C(L^2(\mathbb{R}^n))$である。

3、基本等式

<u>補題1.</u>　　$1/p + 1/q \geqq 1$、　$1 \leqq p, q \leqq \infty$ の時、
$b \in L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ と $g \in L^q(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ に対して次の等式が成立する。

$$(b * g)(X, D) = \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} dx d\xi \ b(x,\xi)\, e^{i\xi X} e^{-ixD} g(X,D)\, e^{ixD} e^{-i\xi X} \quad \square$$

ここで、$*$ は $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上での convolution を示す。

4、作用素解析

補題1の等式の右辺に出ている作用素積分の operator norm に関し次の事実が成立する。

<u>補題2.</u>　　$1/p + 1/q \geqq 1$、　$1 \leqq p, q \leqq \infty$ の時
$b \in L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ と $G \in C_q(L^2(\mathbb{R}^n))$ に対して

$$b\{G\} \in \begin{cases} B(L^2(\mathbb{R}^n)) & (1/p + 1/q = 1 \text{ の時}) \\ C_r(L^2(\mathbb{R}^n)) & (1 + 1/r = 1/p + 1/q > 1 \text{ の時})。\end{cases}$$

ここで $b\{G\} = \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} dx d\xi \ b(x,\xi)\, e^{i\xi X} e^{-ixD} G\, e^{ixD} e^{-i\xi X}$。
さらに次の事実が成立する。

(i) $\|b\{G\}\|_r \leqq (2\pi)^{(1-1/p)n}\|b\|_{L^p}\|G\|_q$.

(ii) $b \geqq 0,\ G \geqq 0 \Rightarrow b\{G\} \geqq 0$.

(iii) $|(b\{G\}u, v)_{L^2}|^2 \leqq (|b|\{|G|\}u, u)_{L^2}(|b|\{|G|\}v, v)_{L^2}$

for $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$. ◻

補題2の $1/p + 1/q = 1$ の場合の証明は、T.Kato [5] の Theorem 3.1 と同様にできる。$1/p + 1/q > 1$ の場合は、下の H.Komatsu による C_p-norm の特徴付けを必要とする。

補題3.（H.Komatsu [6. Proposition 8.5]）

$1 \leqq p \neq \infty$ の時、$T \in B(L^2(\mathbb{R}^n))$ に対して

$\|T\|_p = \sup \{\sum_{k=1}^{\infty} |(Te_k, f_k)|^p\}^{1/p}$ が成立する。

ここで sup は $\{e_k\}, \{f_k\}$ を正規直交基底全体を動かして取る。◻

（注意）$T \notin C_p(L^2(\mathbb{R}^n))$ に対しては $\|T\|_p = \infty$ $(0<p<\infty)$ と考える。

5. 特別な symbol

補題1と2を利用するには、定係数Ψ.D.Op の基本解で、それを symbol にもつ Ψ.D.Op が $C_1(L^2(\mathbb{R}^n))$ に属する extension を持つものがあるとよい。この様な基本解は、$(1-\Delta)^s$ の基本解から求めることが出来る。（H.O.Cordes [4]、T.Kato [5]）

$(1-\Delta_x)^s \psi_s(x) = \delta(x)$ in $\mathbb{R}^n$ なる基本解 ψ_s は、次の性質を持つ。

$$\begin{cases} \psi_s \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \\ D^\alpha \psi_s(x) = \begin{cases} O(1+|x|^{2s-n-|\alpha|}) & \text{as } |x| \to 0 \quad \text{if } 2s-n-|\alpha| \neq 0 \\ O(\log|x|) & \text{if } 2s-n-|\alpha| = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$\{ D^\alpha \psi_s(x)$ decays exponentially as $|x| \to \infty$

特に、$s>0$ の時 $\psi_s \in L^1(\mathbb{R}^n)$，$s>n/4$ の時 $\psi_s \in L^2(\mathbb{R}^n)$。

補題4. $\psi, \varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ で、ψ と φ は $|x|\to\infty$ で指数減少すれば、$g(x,\xi) = \psi(x)\varphi(\xi)$ に対して、$g(X,D) \subset G \in C_1(L^2(\mathbb{R}^n))$。 ⏍

この補題と基本解 ψ_s の性質により、次の補題が成立する。

補題5. $g(x,\xi) = \psi_s(x)\psi_t(\xi)$ とする時、

$$g(X,D) \subset G \in C_1(L^2(\mathbb{R}^n)) \quad \text{if } s,t > n/4。$$

さらに、すべての multi-order α に対して、$g(X,D)D^\alpha, X^\alpha g(X,D)$ は $C_1(L^2(\mathbb{R}^n))$ に属する extension を持つ。 ⏍

補題6. 上の補題で、$s > n/4 + 1/2$，$t > n/4$ ならば、さらに $D_j g(X,D)$，$|D| g(X,D)$ は $C_1(L^2(\mathbb{R}^n))$ に属する extension を持つ。又、$s > n/4$，$t > n/4 + 1/2$ ならば $g(X,D)X_j$，$g(X,D)|X|$ も $C_1(L^2(\mathbb{R}^n))$ に属する extension を持つ。 ⏍

6、結果（I）

定理1. $a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$，$1 \leqq p \leqq \infty$（$\infty-$を含む）とする。

$$\exists s,t > n/4 \text{ s.t. } (1-\Delta_x)^s(1-\Delta_\xi)^t a \in L^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n) + L^p(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$$

$$\Rightarrow a(X,D) \in \begin{cases} B(L^2(\mathbb{R}^n)) & (p=\infty) \\ C_p(L^2(\mathbb{R}^n)) & (1\leqq p \leqq \infty-) \end{cases}$$

さらに、$\|a(X,D)\|_p \leqq C_{n,s,t} \|(1-\Delta_x)^s(1-\Delta_\xi)^t a\|_{L^1+L^p}$。 ⏍

ここで $L^{\infty-}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ は $L^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ の閉部分集合で、無限遠点の近傍に制限すると L^∞-norm が 0 に行く函数全体よりなる。

<u>定理2.</u>　　$1 \leqq p \leqq \infty$（$\infty-$ を含む）とする。

$D_x^\alpha D_\xi^\beta a \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) + L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ for $|\alpha|, |\beta| \leqq [n/2]+1$

$$\Rightarrow \quad a(X, D) \in \begin{cases} B(L^2(\mathbb{R}^n)) & (p=\infty) \\ C_p(L^2(\mathbb{R}^n)) & (1 \leqq p \leqq \infty-) \end{cases}$$

さらに、$\|a(X,D)\|_p \leqq C_n \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqq [n/2]+1} \|D_x^\alpha D_\xi^\beta a\|_{L^1+L^p}$ 。□

定理1は、補題1,2,5より示す。定理2は、仮定から、定理1の仮定が満足されることを示せばよい。それには、次の補題を使う。

<u>補題7.</u>　　すべての実数 $s>0$ に対して、

$(1-\Delta)^{1/2-s} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ は、

$$(1-\Delta)^{1/2-s} = (1-\Delta)^{-(1/2+s)} - i\sum_{j=1}^n S_j^s D_j \ 。$$

ここで $(1-\Delta)^{-(\frac{1}{2}+s)}$ と S_j^s は、それぞれ L^1-convolution kernel $\psi_{1/2+s}$ と $\partial\psi_{s+1/2}/\partial x_j$ とを持つ。□

ここで、定理3の証明に必要となる補題も同様に示される。

<u>補題8.</u>　　すべての p ; $1 \leqq p \leqq \infty$ に対し、

$\exists\, \sigma > n/4 + 1/2$, $\exists\, \tau > n/4$, $\exists\, C_n > 0$

s.t. $$\|(1-\Delta_x)^\sigma (1-\Delta_\xi)^\tau a\|_{L^1+L^p} \leqq C_n \sum_{\substack{|\alpha| \leqq [n/2]+2 \\ |\beta| \leqq [n/2]+1}} \|D_x^\alpha D_\xi^\beta a\|_{L^1+L^p}$$

$$\|(1-\Delta_x)^\tau (1-\Delta_\xi)^\sigma a\|_{L^1+L^p} \leqq C_n \sum_{\substack{|\alpha| \leqq [n/2]+1 \\ |\beta| \leqq [n/2]+2}} \|D_x^\alpha D_\xi^\beta a\|_{L^1+L^p}$$

□

7. 結果 (II)

<u>定理 3.</u> $0<\rho<1$, $1\leqq p\leqq\infty$ ($\infty-$を含む) とする。

$$(1+|\xi|)^{(|\beta|-|\alpha|)\rho} D_x^\alpha D_\xi^\beta a \in L^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)+L^p(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$$

$$\text{for } |\alpha|\leqq[n/2]+2,\ |\beta|\leqq[n/2]+1$$

$$\Rightarrow \quad a(X,D)\in\begin{cases} B(L^2(\mathbb{R}^n)) & (p=\infty) \\ C_p(L^2(\mathbb{R}^n)) & (1\leqq p\leqq\infty-)\end{cases}$$

さらに. $\| a(X,D)\|_p \leqq C_n \sum_{\substack{|\alpha|\leqq[n/2]+2\\|\beta|\leqq[n/2]+1}} \|(1+|\xi|)^{(|\beta|-|\alpha|)\rho} D_x^\alpha D_\xi^\beta a\|_{L^1+L^p}$。

□

<u>定理 3′</u> $0<\rho<1$, $1\leqq p\leqq\infty$ ($\infty-$を含む) とする。

$$(1+|x|)^{(|\alpha|-|\beta|)\rho} D_x^\alpha D_\xi^\beta a \in L^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)+L^p(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$$

$$\text{for } |\alpha|\leqq[n/2]+1,\ |\beta|\leqq[n/2]+2$$

$$\Rightarrow \quad a(X,D)\in\begin{cases} B(L^2(\mathbb{R}^n)) & (p=\infty) \\ C_p(L^2(\mathbb{R}^n)) & (1\leqq p\leqq\infty-)\end{cases}$$

さらに、$\| a(X,D)\|_p \leqq C_n \sum_{\substack{|\alpha|\leqq[n/2]+1\\|\beta|\leqq[n/2]+2}} \|(1+|x|)^{(|\alpha|-|\beta|)\rho} D_x^\alpha D_\xi^\beta a\|_{L^1+L^p}$。

□

<u>定理 3 の証明の概略.</u>

区間 $[0,\infty)$上の単位の分割 $\{\phi_k(r)\}_{k=1}^\infty$ を次の様にとる。

$$\begin{cases} \cdot\ \phi_1\in C_0^\infty[0,2),\ \phi_1(r)=1 \text{ for } {}^\forall r\in[0,1] \\ \cdot\ \phi_k\in C_0^\infty(k-1,k+1),\ \phi_k(k+r)=\phi_2(2+r) \quad (k\geqq 2)\end{cases}$$

$\mathbb{R}^n_\xi$ 上の単位の分割 $\{\Phi_k(\xi)\}_{k=1}^\infty$ を $\{\phi_k(r)\}_{k=1}^\infty$ を使って次の様に決める。

$$\Phi_k(\xi)=\phi_k(|\xi|^{1-\rho})$$

$a_k(x,\xi)=\Phi_k(\xi)a(x,\xi)$ とすると、

$a(x,\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k(x,\xi)$, $a(X,D)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k(X,D)$ となる。

$a_k(x,\xi)$ に対しては、次の不等式を満足する定数 C をとれる。

$$|(k^{-\gamma}D_x)^{\alpha}(k^{\gamma}D_\xi)^{\beta}a_k(x,\xi)|\leqq C\chi_k(\xi)\sum_{\beta'\leqq\beta}f_{\alpha,\beta'}(x,\xi)$$

$$\text{for } |\alpha|\leqq[n/2]+2,\ |\beta|\leqq[n/2]+1$$

ここで $\gamma=\rho/1-\rho>0$, χ_k は supp Φ_k の定義函数であり、

$f_{\alpha,\beta}(x,\xi)=|(1+|\xi|)^{(|\beta|-|\alpha|)\rho}D_x^{\alpha}D_\xi^{\beta}a(x,\xi)|$ である。

故に、定理2を使って、仮定より

$$a_k(X,D)\subset A_k\in\begin{cases}C_p(L^2(\mathbb{R}^n)) & (1\leqq p\leqq\infty-)\\ B(L^2(\mathbb{R}^n)) & (p=\infty)\end{cases}。$$

仮定より、$f_{\alpha,\beta}$ は L^1-function と L^p-function の和で表現できるから $f_{\alpha,\beta}(x,\xi)=f_{\alpha,\beta,1}(x,\xi)+f_{\alpha,\beta,p}(x,\xi)$

$f_{\alpha,\beta,q}\in L^q(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ $(q=1,p)$ とできる。

さらに $f_q(x,\xi)=\sum_{\substack{|\alpha|\leqq[n/2]+2\\|\beta|\leqq[n/2]+1}}|f_{\alpha,\beta,q}(x,\xi)|$ $(q=1,p)$ とする。

次の補題は、補題8と同値であるが、計算の為に explicit formula が必要になる。

<u>補題9</u>.

$^\exists s>n/4+1/2$, $^\exists t>n/4$ $^\exists$ non-negative function $\mu\in L^1(\mathbb{R}^n)$

s.t. $\mu(x)$ は $|x|\to\infty$ の時指数減少する。

$(1-k^{-2\gamma}\Delta_x)^s(1-k^{2\gamma}\Delta_\xi)^t a_k(x,\xi)=b_{k,1}(x,\xi)+b_{k,p}(x,\xi)$ とすると、

$$|b_{k,q}(x,\xi)| \leqq \begin{cases} \int dy\, k^{n\nu} \mu(k^{\nu}(x-y))\, \chi_k(\xi)\, f_q(y,\xi) & ([n/2]:\text{奇数}) \\ \int d\eta\, k^{-n\nu} \mu(k^{-\nu}(\xi-\eta))\, \chi_k(\eta)\, f_q(x,\eta) & ([n/2]:\text{偶数}) \end{cases}$$
$(q=1,p)$

上の数値 s, t を使って、$g_k(x,\xi)=\psi_s(k^{\nu}x)\psi_t(k^{-\nu}\xi)$ とすると、

$$g_k(X,D) \subset G_k \in C_1(L^2(\mathbb{R}^n)) \quad \text{となり、}$$

$$A_k = b_{k,1}\{G_k\} + b_{k,p}\{G_k\} \quad \text{となる。}$$

残りは、
$$\sum_k b_{k,1}\{G_k\} \in C_1(L^2(\mathbb{R}^n))$$

$$\sum_k b_{k,p}\{G_k\} \in \begin{cases} C_p(L^2(\mathbb{R}^n)) & (1\leqq p \leqq \infty-) \\ B(L^2(\mathbb{R}^n)) & (p=\infty) \end{cases}$$

を、補題3, 5, 6 と、G_k が互いに unitary equivalent なことを使って示せばよい。詳しくは、他の機会に譲る。

<u>追記</u>　定理1. 2. 3. 3′の弱い形は、[1]に発表してある。

<u>参考論文</u>

[1] S. Aoki : On L^2-boundedness and L^2-compactness of pseudo-differential operators. Proc. Japan Acad., <u>54A</u>, 1978, P.145-150.

[2] A.P. Calderón and R. Vaillancourt ; On the boundedness of pseudo-differential operators. J. Math. Soc. Japan, <u>23</u>, 1971, P.374-378.

[3] —— ; A class of bounded pseudo-differential operators Proc. Nat. Acad. Sci. USA, <u>69</u>, 1972, P.1185-1187.

[4] H. O. Cordes : On compactness of commutators of multiplications and convolutions, and boundedness of pseudo-differential operators J. Func. Anal., <u>18</u>, 1975, P.115-131.

[5] T. Kato : Boundedness of pseudo-differential operators
Osaka J. Math., 13, 1976, P. 1−9.

[6] H. Komatsu ; Theory of Locally Convex Spaces
Dept. of Math., Univ. of Tokyo, 1974.