数理解析研究所講究録
第 341 巻 1978 年 153-163

定数係数の混合問題の適切性について

上智大 理工 内山康一

§1. 問題と結果

$\mathbb{R}^{n+1} \ni x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) = (x', x_n) = (x_0, x'') = (x_0, x''', x_n)$

と記す．$P(D)$ を m 階定数係数単独偏微分作用素とし，同じく $B_j(D)$ は b_j 階で D_n に関しては高々 $m-1$ 階とする．

$$
(\mathrm{P})\begin{cases}
(1)\quad P(D)u = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^{n+1}_+ = \{x \in \mathbb{R}^{n+1};\ x_n > 0\}, \\
(2)\quad B_j(D)u|_{x_n=0} = \sum_{k=0}^{m-1} B_{jk}(D') D_n^k u|_{x_n=0} = g_j(x'), \quad x' \in \mathbb{R}^n \\
\qquad j = 0, 1, 2, \ldots, \mu' \\
(3)\quad \text{初期面 } \{x_0 = 0,\ x_n > 0\} \text{ における } u \text{ の Cauchy data;}
\end{cases}
$$

を考える．混合問題 (P) に対し，解 u の一意存在などによって「適切性」を定義し，適切になるような境界条件 $\{B_j(D)\}$ を特徴づけることを扱う．Hersh[3]は高階連立系 $P(D)$ が発展型のときを論じた．その後，$P(D)$ 単独のとき，上見，白田 [1] が L^2 適切の特徴づけを与え，坂本 [8] が C^∞ 適切の特徴づけを与えた．いずれも双曲型の非一様Lopatinski 条件を扱っている。柴田[9]は最近，基本解の存在によって適切性を定

め，境界 $\{x_n=0\}$ が P, B_j に対し特性的なときもこめて基本と同様の特徴づけを与えた[9]。ここでは Chazarain-Piriou [2] と同様に，楕円型境界値問題における Calderón の方法を使って問題を境界上に帰着し，上に挙げた文献の諸結果に対する補充と拡張を与える。

1.1 定義. $P(D)$ が x_0 方向に発展的とは（正）定数 γ_0 が存在して $\xi \in \{\mathrm{Im}\,\xi_0 < -\gamma_0\} \times \mathbb{R}^n$ に対し，$P(\xi) \neq 0$ かつ $P(\xi) = a\xi_0^p + \sum_{k=0}^{p-1} A_k(\xi')\xi_0^k$ $(a \neq 0)$ の形にかけることをいう。$P(D)$ が x_n 方向に正規とは $P(\xi) = P_q(\xi')\xi_n^q + \cdots \cdots + P_0(\xi')$ $(q \leq m)$ とかいたとき $P_q(\xi')$ が発展的であることをいう。$P(D)$ が x_0 方向に発展的で x_n 方向に正規なとき，これを(E)型ということにする。$P(D)$ が x_0 方向に発展的で，初期面 $\{x_0=0\}$ が $P(D)$ に関して非特性 (i.e. $P(\xi)$ の主部を $P^0(\xi)$ とするとき，$P^0(1,0,0) \neq 0$) のとき，(H)型（双曲型）ということにする。このとき $P(\xi)$ は双曲型多項式に他ならず，従ってその $(0,0,1)$ における局所化として得られる $P_q(\xi')$ は同じく双曲型多項式となり（笠原氏による注意[9]），$P(\xi)$ はつねに x_n 方向に関して正規となることに注意しておく。

1.2 定義. $P(D)$ を(E)型とする。$\xi' = (\xi_0, \xi'') \in \{\mathrm{Im}\,\xi_0 < -\gamma_0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ に対し，λ についての方程式 $P(\xi', \lambda) = 0$, $\mathrm{Im}\,\lambda > 0$

の根を重複をこめて $\lambda_0^+(\xi')$, $\lambda_1^+(\xi')$, $\ldots$, $\lambda_{\mu-1}^+(\xi')$ とかく。μ は ξ' に依らず一定である。境界条件の数については条件(B)：$\mu'=\mu$ をおく。次に $P^+(\xi',\xi_n)=\prod_{j=0}^{\mu-1}(\xi_n-\lambda_j^+(\xi'))$ とおき，$B_j(\xi)$ を ξ_n の多項式として $P^+(\xi',\xi_n)$ で割った余りを $B_j'(\xi)=\sum_{k=0}^{\mu-1}B_{jk}'(\xi')\xi_n^k$ とおく。$B'(\xi')=(B_{j,k}'(\xi'))_{0\le j,k\le\mu-1}$ を Lopatinskiĭ 行列といい，その行列式 $\det B'(\xi')=R(\xi')$ を Lopatinskiĭ 行列式という。

1.3 **定理** $e^{-\gamma x_0}$ の重みをつけた Sobolev 空間を $H_{s;\gamma}$ とかき，$\bigcap_{s\in\mathbb{R}}H_{s;\gamma}=H_{\infty;\gamma}$ とする。$P(D)$ を(E)型とし条件(B)のもとで次の二条件は同値である。

(i) $^\forall\gamma>\gamma_0$ に対し，$f\in H_{\infty;\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, $g=(g_j)\in H_{\infty;\gamma}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^\mu)$, $P(D)u=f$, $B_ju=g_j$ が一意解 $u\in H_{\infty;\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ を有する。

(ii) $\xi'=(\xi_0,\xi''')\in\{\mathrm{Im}\,\xi_0<-\gamma_0\}\times\mathbb{R}^{n-1}$ に対し，$R(\xi')\neq0$.

(i)または(ii)のもとで $\mathrm{supp}\,f\subseteq\{x_0\ge0\}$, $\bigcup_j\mathrm{supp}\,g_j\subset\{x_0\ge0\}$ ならば $\mathrm{supp}\,u\subset\{x_0\ge0\}$.

1.4 注意 Hersh [3] の定式化および推論は粗い。一階連立の場合は笠原[7]がそれを補った。単独高階は R. Melrose も厳密化を論じているが方法はちがう。定理 1.3 の $P(D)$ が正規である限り $\{x_n=0\}$ は特性境界でもよいが，正規性がないと一般に 1.2 の μ が ξ' について一定でなくなる。発展的

だが正規でない例として $P(D) = D_0 + D_n D_1$.

1.5 <u>定理</u> $P(D)$ は(H)型とし，条件(B)のもとで

$Pu = f$, $B_j u = g_j$ $0 \le j \le \mu - 1$, $D_0^k u = h_k$ $0 \le k \le m-1$ を考える。$\{f, g_j, h_k\}$ は $\{x_0 = x_n = 0\}$ において無限個の両立条件をみたすとする．このとき次の二条件は同値である．

(i) 上の混合問題は C^∞ 適切である (i.e. 一意に u が C^∞ で存在する．もちろん $f, g_j, h_k \in C^\infty$ とする)．

(ii) Lopatinski 行列式が次の (1) (2) をみたす．

(1) $R(\xi') \ne 0$ が $\xi' \in \{\mathrm{Im}\, \xi_0 < -\gamma_1\} \times R^{n-1}$

(2) $R(\xi')$ の主部を $\tilde{R}_0(\xi')$ とすると $\tilde{R}(-i, 0) \ne 0$.

1.6 <u>注意</u>. 定理1.5は $\{x_n = 0\}$ が $P(D)$ と $B_j(D)$ に対し非特性という附加条件をみたすとき坂本[8]において示された。

我々は (ii) ⇒"一意性"を示すとき，共役問題を経由せず，境界上の convolution 系を扱うのでこれらの附加条件は要らない。更に，(ii) (2) の必要性は，$\tilde{R}(-i, 0) = 0$ のとき自明でない零解を構成することにより示される．これは白田[10]と同様，Hersh [4] の証明を補うものである．Cauchy 問題との類比から，(ii) (2) は一意性の十分条件であることが期待される．混合問題における Holmgren の定理としてこれを捉えるなら，まず Cauchy - Kowalevsky の定理が必要となる．(e.g. 白田[10])．次いで (ii) (1) は"存在"に関わることが予想される．"Holmgren の

定理"が成り立つ範囲では十分性については Hörmander [5] の証明をたどればよいが，必要性のためには Hörmander [6] のように条件を修正する必要があると思われる。

例. $n=2$. $P(D)=D_0^2-D_1^2-D_2^2$, $B_0(D)=D_0-(D_1+i)^2$ は (ii) (1) をみたさないが，C^∞ 空間で解が存在する．

1.7 定理. $P(D)$ は狭義双曲型とし，$\{x_n=0\}$ は $P(D)$ に対して非特性的とし，$Pu=f\in H_{0,\theta;\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, $B_j u=g_j\in H_{m-1-b_j+\theta;\gamma}(\mathbb{R}^n)$ を条件 (B) のもとで考える. 次の (i) と (ii) は同値である.

(i) 解 $u\in H_{m,-1;\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ が一意に存在して

$$\gamma|u|^2_{m,-1;\gamma}+\sum_{j=0}^{m-1}\langle\gamma_j u\rangle^2_{m-1-j;\gamma}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{C}{\gamma^{2\theta}}\left(\frac{1}{\gamma}|f|^2_{0,\theta;\gamma}+\sum_{j=0}^{\mu-1}\langle g_j\rangle^2_{m-1-b_j+\theta;\gamma}\right).$$

さらに，f, g が $x_0<0$ で 0 なら u も $x_0<0$ で 0 であり，$f\in H_{\infty;\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, $g_j\in H_{\infty;\gamma}(\mathbb{R}^n)$ なら $u\in H_{\infty;\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$. ここで γ はある定数 γ_1 より大きい任意の正数.

(ii) (L_θ); $|A_{k,j}(\xi')|\leqslant\dfrac{C|\xi'|^{k-b_j+\theta}}{\gamma^\theta}$ が $\xi'\in\{\mathrm{Im}\,\xi_0<-\gamma_1\}\times\mathbb{R}^{n-1}$, $\xi_0=\sigma-i\gamma$ について成立する. ここで $(A_{k,j}(\xi'))$ は Lopatinskii 行列の逆行列である.

1.8 注意. 定理1.7 では $P(\xi)$, $B_j(\xi)$ が同次多項式のとき

Chazarain-Piriou [2] で示された．$\{x_n=0\}$ が特性的のときは，（この方法では）根 $\lambda_j(\xi')$ の評価がわるくなる分だけ，評価式がかわる．条件 (L_θ) は Lopatinskii 行列だけで記述されているという意味で見易い．その反面，L^2 不等式としては粗い．（cf. 上見-白田 [1]）．証明は [12] および [2]．

§2. 方法（Calderón 射影作用素による境界上への帰着）

2.1 跳躍公式. $u\in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ に対し，u を $x_n\geq 0$ に制限して $x_n<0$ に 0 で拡張したのを $u^0(x)$ とかく．$P(D)=\sum_{j=0}^{q} P_j(D')D_n^j$ に対して

$$P(u^0) = (Pu)^0 + \frac{1}{i}\sum_{\ell=0}^{q-1}\sum_{j=0}^{q-1-\ell} P_{j+\ell+1}(D')(D_n^j\delta(x_n)\otimes\gamma_\ell u)$$

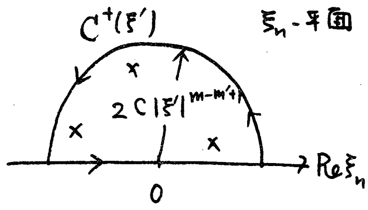
$$\equiv (Pu)^0 + \frac{1}{i}\sum_{\ell=0}^{q-1} L_\ell(D)(\delta(x_n)\otimes\gamma_\ell u)$$

$$\equiv (Pu)^0+\tilde{P}(\gamma u).$$

2.2 補題. $P(\xi)=\sum_{j=0}^{q} P_j(\xi')\xi_n^j$ が ξ_n について正規 i.e. $\xi'\in\{\mathrm{Im}\,\xi_0<-\gamma_0\}\times\mathbb{R}^{n-1}$ に対し，$P_q(\xi')=c\,\xi_0^{p'}+\sum_{k=0}^{p'-1}C_k(\xi'')\xi_0^k\neq 0$ とする．このとき，任意の $\gamma_1>\gamma_0$ に対し，C_{γ_1} が存在して，$|\lambda_j(\xi')|\leq C_{\gamma_1}|\xi'|^{m-q+1}/\gamma^{p'}$; ここで $\xi_0=\sigma-i\gamma$, $\gamma_1\leq\gamma$, $\xi''\in\mathbb{R}^{n-1}$, $P(\xi',\lambda_j)=0$ $(j=0,1,\dots,q-1)$.

2.3 積分路 $C^+(\xi')$. $P(\xi)$ は (E) 型とする．$C^+(\xi')$ を定義 1.2 の零点 $\lambda_j^+(\xi')$, $j=0,1,\dots,\mu-1$ を内に囲む複素上半平面 $\{\mathrm{Im}\,\xi_n\geq 0\}$ 内の閉路とする．特に以下は，補題 2.2 に鑑み，$\{\xi_n;\ \mathrm{Im}\,\xi_n=0,\ |\mathrm{Re}\,\xi_n|\leq 2C_{\gamma_1}|\xi'|^{m-q+1}/\gamma^{p'}\}\cup\{\xi_n=\frac{2C_{\gamma_1}}{\gamma^{p'}}|\xi'|^{m-q+1}e^{i\theta};$

$; 0 \leq \theta \leq \pi \}$ とする．



2.4 <u>Calderón射影作用素</u>.

$\xi' = (\xi_0, \xi'') \in \{\mathrm{Im}\,\xi_0 < -\gamma_0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$

に対して
$$Q_{k,\ell}(\xi') \equiv \int_{C^+(\xi')} \frac{1}{P(\xi',\lambda)} L_\ell(\xi',\lambda)\lambda^k \frac{d\lambda}{2\pi i}$$

とおけば，$Q_{k\ell}(\xi')$ は一意に定まる超関数 $Q_{k\ell} \in \bigcap_{\gamma > \gamma_0} H_{-\infty;\gamma}(\mathbb{R}^n)$ の Fourier-Laplace像である．convolution作用素 $Q_{k\ell}*$ を成分とする行列 $\{Q_{k\ell}*\}_{0 \leq k,\ell \leq g-1}$ を <u>Calderón射影作用素</u>という．

$P^+(\xi) = \prod_{j=0}^{\mu-1} (\xi_n - \lambda_j^+(\xi'))$ は ξ_nについては多項式だから跳躍公式 2.1 が考えられ，$L_\ell^+(\xi',\lambda)$ が定義できるから，
$$Q_{k\ell}^+(\xi') \equiv \int_{C^+(\xi')} \frac{1}{P^+(\xi',\lambda)} L_\ell^+(\xi',\lambda)\lambda^k \frac{d\lambda}{2\pi i}$$

とおく．$0 \leq k \leq g-1$, $0 \leq \ell \leq \mu-1$ だが，$Q^+ = (Q_{k\ell}^+)_{\substack{\mu \leq k \leq g-1 \\ 0 \leq \ell \leq \mu-1}}$ とおく．

2.5 <u>命題</u>. $P(D)$ を (E) 型とする．$\xi' \in \{\mathrm{Im}\,\xi_0 < -\gamma_0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ に対し，次の (i)(ii)(iii) は同値である．

(i) $Q(\xi')w = w$． ここで $w = (w', w'') \in \mathbb{C}^\mu \times \mathbb{C}^{g-\mu} = \mathbb{C}^g$.

(ii) $\begin{cases} P(\xi', D_n)U(x_n) = 0 \\ \gamma U = (U(0), D_n U(0), \cdots, D_n^{g-1}U(0)) = w \end{cases}$

の解が $\{x_n \geq 0\}$ で有界である．

(iii) $Q^+(\xi')w' = w''$.

2.6 <u>命題</u>. $P(D)$ は (E) 型とする. 次の (i) (ii) (iii) は同値である.

(i) $v \in \prod_{j=0}^{g-1} H_{m+s-j-1/2;\gamma}(\mathbb{R}^n)$ が $Q * v = v$ をみたす.

(ii) $u \in H_{m,s;\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ があって $P(D)u = 0$, $v = \gamma u$ をみたす.

(iii) $v = (v', v'') \in \prod_{j=0}^{\mu-1} \times \prod_{j=\mu}^{g-1} H_{m+s-j-1/2;\gamma}$ が $Q^+ * v' = v''$ をみたす.

更に, (i), (ii) または (iii) が成り立つなら, $P(D)u = 0$, $v = \gamma u$ の解は $u = E * \tilde{P} v|_{x_n \geq 0}$ で与えられる. ただし, E は $P(D)$ の基本解 $E = \mathcal{F}^{-1}[P(\xi)^{-1}]$ である.

2.7 <u>命題</u> $P(D)$ は (H) 型とする. 次の (i) (ii) (iii) は同値.

(i) $v \in \prod_{j=0}^{g-1} C^\infty_+(\mathbb{R}^n)$ が $Q * v = v$ をみたす.

(ii) $u \in C^\infty_+(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$ があって $P(D)u = 0$, $v = \gamma u$ をみたす.

(iii) $v = (v', v'') \in \prod_{j=0}^{\mu-1} \times \prod_{j=\mu}^{g-1} C^\infty_+(\mathbb{R}^n)$ が $Q^+ * v' = v''$ をみたす.

更に (i), (ii) または (iii) が成り立てば (ii) の解 u は $u = E * \tilde{P} v|_{x_n \geq 0}$ とかける.

ここで $C^\infty_+(\mathbb{R}^n) \equiv \{ v \in C^\infty(\mathbb{R}^n);\ \operatorname{supp} v \subseteq \{x_0 \geq 0\} \}$,

$C^\infty_+(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}) \equiv \{ u|_{\mathbb{R}^{n+1}_+} ;\ u \in C^\infty_+(\mathbb{R}^{n+1}) \}$.

2.8 <u>境界への帰着</u>. $P(D)$ は (H) 型とし, 条件 (B) のもとで C^∞ 適切について考える. $P(D)u = f \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$,

$B_j(D)u|_{x_n=0}=g_j\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\quad D_0^k u(0,x'')=h_k\in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$

は両立条件をみたすことから，結局，

$$Pu=0\ ,\quad B_j u=g_j\in C_+^\infty(\mathbb{R}^n),\qquad u\in C_+^\infty(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$$

という問題と同値になる。$Pu=0$ は $v=\gamma u$ とおいて，命題2.7を使うと $Q*v=v$ あるいは $Q^+*v'=v''$ と同値である．境界条件は

$$B_j u|_{x_n=0}=\sum_{k=0}^{g-1}B_{jk}(D)\gamma_k u=\sum_{k=0}^{g-1}\sum_{\ell=0}^{g-1}B_{j,k}Q_{k\ell}*v_\ell$$

$$=\sum_{k=0}^{\mu-1}\sum_{\ell=0}^{g-1}B'_{j,k}*Q_{k\ell}*v_\ell$$

$$=\sum_{k=0}^{\mu-1}B'_{j,k}*v_k=g_j$$

とかける．こうして，境界上の convolution 系 $B'*v'=g$ に帰着された．

2.9 <u>定理1.5の証明</u>．(ii) ⇒ (i)．双曲型函数についての補題（坂本[8]）により $B'*$ は $C_+^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^\mu)$ の同型となることがわかる．一意性は，$g=0\Rightarrow v'=0\Rightarrow v''=Q^+*v'=0\Rightarrow v=0\Rightarrow u=E*\tilde{P}(v)=0$．存在も同様の順でわかる。(i) ⇒ (ii)．(i) ⇒ (ii)(1) は坂本[8]による．[$B'*v'=g$ の一意存在から直接に (ii)(1) が云えれば方法論として首尾一貫するのだが，$B'*$ が微分作用素でないため難しいと思われる．] (i) ⇒ (ii)(2)．$\tilde{R}_0(-i,0)=0$ のとき零解を構成する．Cauchy 問題における Hörmander の構成にならう．s を複素パラメータ

として，$R(\xi'(s))\equiv 0$ となる $\xi'(s)$ をうまくとって，$B'(\xi'(s))\cdot v(s)\equiv 0$ となる非自明解 $v(s)$ で s について整型，高々多項式の増大度をもち，μ 個の成分のうちひとつは定数となるものを構成する．

$$V(x;s)=\int_{C^+(\xi'(s))}\frac{e^{i(\xi'(s)\cdot x'+\lambda x_n)}}{P^+(\xi'(s),\lambda)}\sum_{j=0}^{\mu-1}L_j^+(\xi'(s),\lambda)v_j(s)\frac{d\lambda}{2\pi i}$$

$$U(x)=\int_{M_1-i\infty}^{M_1+i\infty}V(x;s)e^{-s^q}ds \quad (q\text{は定数})$$

とおくと，$U(x)\in C_+^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$，$P(D)U=0$，$B_jU=0$ がすぐわかり，作り方から $U(x)\not\equiv 0$ がわかる．(詳しくは [11])．

Holmgren の定理とその応用については別の機会にゆずる．

文献表

[1] R. Agemi and T. Shirota, On necessary and sufficient conditions for L^2-well posedness of mixed problems for hyperbolic equations, J. Fac. Sc. Hokkaido Univ. 21 (1970) 133-151.

[2] J. Chazarain and A. Piriou, Caractérisation des problèmes mixtes hyperboliques bien posés, Ann. Inst. Fourier, 22 (1972), 193-237.

[3] R. Hersh, Boundary conditions for equations of evolution, Arch. Rat. Mech. Anal. 16 (1964), 243-263.

[4] ——, On surface waves with finite and infinite

speed of propagation, Arch. Rat. Mech. Anal <u>19</u> (1965)

[5] L. Hörmander, Linear Partial Differential Operators, Springer, 1969.

[6] ——, On the characteristic Cauchy problem, Ann. Math. <u>88</u> (1968) 341-370

[7] K. Kasahara, On weak well posedness of mixed problems for hyperbolic systems, Publ. RIMS, Kyoto Univ., <u>6</u> (1971) 503-514.

[8] R. Sakamoto, $\mathcal{E}$-well posedness for hyperbolic mixed problems with constant coefficients, J. Math. Kyoto U. <u>14</u> (1974) 93-118.

[9] Y. Shibata, a characterization of the hyperbolic mixed problems in a quarter space for differential operators with constant coefficients (to appear)

[10] 白田平, 双曲型方程式の混合問題の波の伝播速度について, 数理研講究録 <u>122</u> (1971)

[11] K. Uchiyama, Caractérisation des problèmes mixtes bien posés pour des opérateurs à coefficients constants, Thèse, (Dr d'Univ. de Nice) (1977)

[12] ——, ——, I. (to appear in Tokyo J. of Math.)