数理解析研究所講究録
第 341 巻 1978 年 173-179

対称空間上の不変微分作用素のスペクトル

東大 教養　大島 利雄

連結実半単純リー群 G の等質空間 $X = G/H$ は，H が G のある包合的自己同型 σ の固定元全体から成るとき *affine symmetric space* という。(H を，H の連結成分のいくつかから成る群に置き換えてもよいが，それは，G を G のある有限被覆群に取り換えると上の場合に帰着される)。たとえば，G の Cartan involution をとれば Riemannian 対称空間が，また $G \simeq G \times G / \Delta G$ $(\sigma(g, g') = (g', g))$ により G 自身が，X の例になっている。X 上の G-不変測度 dx による $L^2(X, dx)$ は

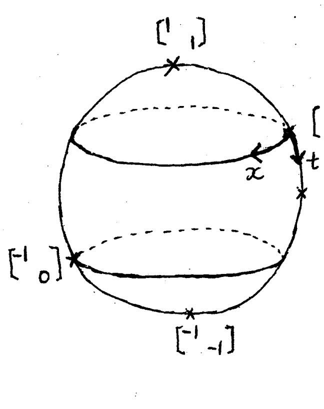
$$\begin{array}{ccc} G \times L^2(X, dx) & \longrightarrow & L^2(X, dx) \\ \quad\;\, \Psi \qquad\quad & & \;\Psi \\ (g,\ f(x)) & \longmapsto & f(g^{-1}x) \end{array}$$

により G のユニタリ表現空間となるが，この既約表現分解を求めることは，ユニタリ表現論の最も基本的な問題である。$X = G$ で，G が compact の場合は，Peter & Weyl が，non-compact の場合は Harish-Chandra が解決した。Riemannian

対称空間の場合は，Helgason & Harish-Chandra により得られている。一方，X上のG-不変微分作用素環は，自己共役な自由生成元 $\Delta_1,\dots,\Delta_l$ をもつ多項式環と同型となり，先の問題は，$\Delta_1,\dots,\Delta_l$ の同時スペクトル分解を求めることに対応する。これは，Xを compact 化することにより，確定特異点型境界値問題として捕えられる。この場合，普通の有界領域における楕円型境界値問題と異なり，点スペクトルや連続スペクトルが入り混ざって現われる。($l=1$ の場合は，変数分離によって，常微分方程式の Weyl-Stone-Titchmarsh-Kodaira の展開定理に帰着させることができる)。以下，最も単純な例で説明するが，その議論は一般のXにも適用する。

例1　$G/H = SL(2,\mathbb{R})/SO(1,1)$

$S^2 \simeq \left\{ \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} ;\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3-\{0\}/\mathbb{R}_+ \right\}$ の中へ実現する。Gの作用は $\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \mapsto g\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}{}^t g$　$(g \in G)$ で，$\begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$ の isotropy 群が $SO(1,1)$ となる。S^2 の G-軌道分解は，



$: X_+ \simeq G/SO(2) \simeq \mathbb{R}^2$

$\begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix} : B_1 \simeq G/P \simeq S^1,\ P=\left\{\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in G\right\}$

$\begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} : X \simeq G/SO(1,1) \simeq \mathbb{R}\times S^1$

$: B_2 \simeq G/P \simeq S^1$

$: X_- \simeq G/SO(2) \simeq \mathbb{R}^2$

$\begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix}$ の近傍で適当な局所座標系 (t, x) をとり，$t = y^2$ と

おく（X が $t>0$，B_1 が $t=0$ に対応する）。$l=1$ で，
$\Delta = y^2(\partial^2/\partial y^2 - \partial^2/\partial x^2)$ と表わせる。$\lambda \in \mathbb{C}$ に対し，

$$\mathcal{M}_\lambda : \ (\Delta - \chi_\lambda(\Delta))u \equiv (\Delta - (\lambda^2 - \tfrac{1}{4}))u = 0$$

という X 上の方程式の解空間を $\mathcal{B}(X\,;\mathcal{M}_\lambda)$ とおく。$\mathcal{M}_\lambda$ は $B=(B_1, B_2)$ に対し確定特異点型で，その特性根は $\frac{1}{2}\mp\lambda$ となるので，$\mathcal{B}(X\,;\mathcal{M}_\lambda)$ の元に対し境界値をとる写像 $\beta_{\frac{1}{2}\mp\lambda} = (\beta^1_{\frac{1}{2}\mp\lambda}, \beta^2_{\frac{1}{2}\mp\lambda})$ が定義される。$u \in \mathcal{B}(X\,;\mathcal{M}_\lambda)$ が ideally analytic solution*) ならば，generic λ に対し B_1 の近傍で

$$u = f_-(x,y)y^{\frac{1}{2}-\lambda} + f_+(x,y)^{\frac{1}{2}+\lambda} \qquad (f_\pm \text{ は analytic})$$

と表わせ，$\beta^1_{\frac{1}{2}\mp\lambda}(u) = f_\mp(x,0)$ である。また，X の不変測度が $y^{-2}\,dx\,dy$ と表わせることに注意すれば，χ_λ が点スペクトル，すなわち $L^2(X) \cap \mathcal{B}(X\,;\mathcal{M}_\lambda) \neq \{0\}$ となる為の必要十分条件は次の様になることがわかる。

(I) $\mathrm{Re}\,\lambda \neq 0$ かつ $\ker(\beta_{\frac{1}{2}-(\mathrm{sgn}\,\mathrm{Re}\lambda)\lambda}) \neq \{0\}$.

一方，λ を実解析的パラメータとする $\mathcal{M}_\lambda$ の ideally analytic solution u_λ に対し，$\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, u_{\sqrt{-1}t}\, dt$ （φ は compact 台を持つ C^∞-級関数）は $L^2(X)$ の元となるので（∵部分積分すればわかる），連続スペクトルは次で与えられることが示せる。

(II) $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$.

*) u が K-finite なら ideally analytic になる。

さて，$\mathcal{B}(G/P;\lambda) = \{ f \in \mathcal{B}(G);\ f(g\begin{bmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & \varepsilon\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{y} & 0\\ 0 & \sqrt{y}^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{bmatrix}) = y^{\frac{1}{2}-\lambda} f(g),\ \forall \varepsilon \in \{\pm 1\},\ y \in \mathbb{R}_+,\ t \in \mathbb{R} \}$ とおくと，$\beta_{\frac{1}{2}\mp\lambda}$ は $\mathcal{B}(X;\mathcal{M}_\lambda)$ から $\overset{2}{\oplus}\,\mathcal{B}(G/P;\pm\lambda)$ への G－準同型を引き起こすが，その逆写像は，Poisson 核

$$P_{+,\lambda} = \frac{|y/(y^2-x^2)|^{\frac{1}{2}+\lambda}}{\Gamma(\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{2})} \quad , \quad P_{-,\lambda} = \frac{\operatorname{sgn}(y^2-x^2)|y/(y^2-x^2)|^{\frac{1}{2}+\lambda}}{\Gamma(\frac{3}{4}-\frac{\lambda}{2})}$$

を核関数とする積分作用素（それを $(\mathcal{P}_{+,\lambda}, \mathcal{P}_{-,\lambda}) = \mathcal{P}_\lambda$ とおく）で与えられ，任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し，FS－空間の間の

$$\mathcal{B}(X;\mathcal{M}_\lambda) \simeq \mathcal{B}(G/P;\lambda) \oplus \mathcal{B}(G/P;-\lambda)$$

という topological G－同型が成立する。さらに，

$${}^t\beta_{\frac{1}{2}-\lambda} \circ \mathcal{P} = a_\lambda\, \Gamma(\lambda) \begin{bmatrix} \cos(\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{4})/\Gamma(\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{4}), & \sin(\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{4})/\Gamma(\frac{\lambda}{2}+\frac{3}{4}) \\ \cos(\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{4})/\Gamma(\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{4}), & \sin(\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{2})/\Gamma(\frac{\lambda}{2}+\frac{3}{4}) \end{bmatrix}$$

（a_λ はある正則行列）となる．（$\mathcal{B}(X;\mathcal{M}_\lambda)$ の位相や，上の行列の計算については [2] を参照）よって，(I) は

(I)　　$\lambda \in \{ \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \cdots \}$

となることがわかる。((I) は $PSL(2,\mathbb{R})$ の discrete series，(II) は $PSL(2,\mathbb{R})$ の principal series に対応している。$X = SO_0(2m+1,1)/SO_0(2m,1)$ の場合に同様の考察をすれば，$L^2(X)$ に点スペクトルが存在し，それは $L^2(SO_0(2m+1,1))$ の分解には現われない表現で，そのうちの $(m-1)$ 個が $SO(2m+1)$ に関し class 1 であることがわかる）以上をあわせると，

$$\{l^2+l;\ l\in\{0,1,2,3,\cdots\}\}\cup(-\infty,-\tfrac{1}{4}]$$

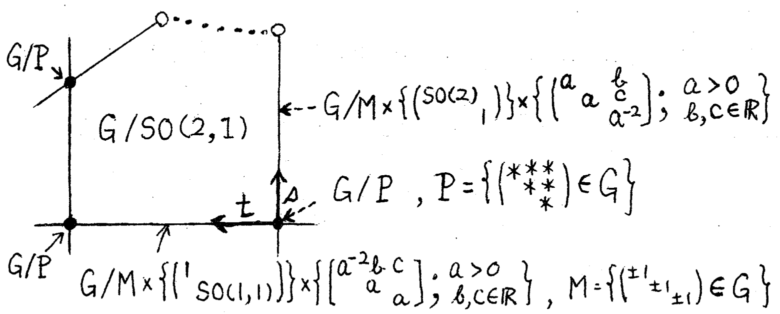
が Δ のスペクトルであることがわかる。

例2　$G/H = SL(3,\mathbb{R})/SO(2,1)$

compact 多様体の中へ実現し (cf. [2]), 局所座標系 (s,t,x,y,z) を選んで, X が $s>0$, $t>0$ に対応し,

$$\begin{cases} \Delta_1 = X_2X_3 + X_3X_1 + X_1X_2 - Y_{12}^2 + Y_{23}^2 + Y_{13}^2 \\ \Delta_2 = \sqrt{-1}\,(X_1X_2X_3 + X_1Y_{23}^2 + X_2Y_{13}^2 - X_3Y_{12}^2 - (Y_{23}Y_{12}+Y_{12}Y_{23})Y_{13}) \end{cases}$$

が不変微分作用素の自己共役な生成元にとれる。



$$\begin{cases} X_1 = -s\partial/\partial s+1,\ X_3 = t\partial/\partial t-1 \\ X_2 = s\partial/\partial s - t\partial/\partial t \\ Y_{12} = s(\partial/\partial x + y\partial/\partial z) \\ Y_{23} = t\partial/\partial y,\ Y_{13} = st\partial/\partial z \end{cases}$$

$\overline{X}-X$ の G-軌道は, $\bullet\ (\simeq G/P)$ が3個と $\bullet\!-\!\!\!-\!\bullet$ が2個と $\bullet\!-\!\!\!-\!\circ$ が2個とから成る。　$\mathbb{R}^2 \ni (\lambda_1,\lambda_2)$, (λ, l) に対し

$$(\chi(\Delta_1),\chi(\Delta_2)) = (\lambda_1^2+\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2,\ \lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)),\ (3\lambda^2-l^2,\ 2\lambda(\lambda^2+l^2))$$

とおき, X 上の方程式

$$\mathcal{M}_\chi :\ (\Delta_1-\chi(\Delta_1))u = (\Delta_2-\chi(\Delta_2))u = 0$$

を考える。((λ_1,λ_2) と (λ,l) が $\mathbb{R}^2$ を動けば $(\chi(\Delta_2),\chi(\Delta_2))$ は $\mathbb{R}^2$ 全体を動くことに注意). 不変測度は $s\to 0$, $t\to 0$ のとき $\sim s^{-3}t^{-3}\,ds\,dt\,dx\,dy\,dz$ となり, (s,t) に関する $\mathcal{M}_\chi$ の特性根 (α,β) は6個存在し, ideally analytic solution は,

$$u = \sum_{(\alpha,\beta):\text{特性根}} f_{(\alpha,\beta)}(s,t,x,y,z)\, s^{\alpha} t^{\beta}$$

と表わせる。任意の $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ に対し，$(\alpha-1,\beta-1)$ は純虚になるので，例1の場合と同様に，

(Ⅲ)　　$(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$

が連続スペクトルになることがわかる。一方，$(\lambda,l)\in\mathbb{R}^2$ に対しては，特性根は

$$(\alpha-1,\beta-1)=(-2i\lambda,-i\lambda\pm l),\ (i\lambda\pm l,2i\lambda),\ (i\lambda\pm l,-i\lambda\pm l)$$

と表わせるので，$l>0$ としたとき，特性根 $(-2i\lambda+1,-i\lambda-l+1)$ $(i\lambda-l+1,2i\lambda+1)$, $(i\lambda-l+1,-i\lambda-l+1)$ に対応する境界値が0の解 $\neq 0$ の存在条件を求めればよい。この場合のPoisson核は

$$P_{\substack{++\\(--)\\(+-)}} = s^{2i\lambda+1}t^{i\lambda+l+1}(s^2t^2+t^2x^2-(z-xy)^2)_{\substack{+\\(-)\\(+)}}^{-(l+\frac{1}{2})}(s^2t^2-s^2y^2-z^2)_{\substack{+\\(-)\\(-)}}^{-(\frac{l}{2}+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\lambda)}$$

の3個存在する。例1と同じ方法により，条件は

(Ⅳ)　$\lambda\in\mathbb{R}$，　$l=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\frac{7}{2},\cdots$

であることがわかる。以上をあわせると，スペクトル $(\chi(\Delta_1),\chi(\Delta_2))$ 全体の集合は

$$\{(u,v);\ 4u^3\geq 9v^2\}\cup\{(3\lambda^2-l^2,2\lambda(\lambda^2+l^2));\ \lambda\in\mathbb{R},\ l=\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},\cdots\}$$

となる。(Ⅳ) は次の様に考察できる.

u を，上に述べた特性根に対する境界値が0の解とする.

v を，s の特性根 $-2i\lambda+1$ に対応する $\{s=0\}$ 上への u の境界値とする. v は，t の特性根 $-i\lambda-l+1$ に対応する $\{s=t$

$=0\}$ 上への境界値が0になっている。$(s,t)\to(st^{\frac{1}{2}},t)$ と変数変換して考えれば，vは

$$\left((st^{1/2})^{2i\lambda-1}\Delta_1(st^{1/2})^{1-2i\lambda}-\chi(\Delta_1)\right)\Big|_{s=0}v$$

$$\equiv -\{t^2(\partial^2/\partial t^2-\partial^2/\partial x^2)-(\tfrac{1}{4}-l^2)\}v=0$$

$\left\{\begin{array}{l} s^{1-2i\lambda}t^{1-i\lambda\pm l} \\ =(st^{1/2})^{1-2i\lambda}t^{\frac{1}{2}\pm l}, \\ u\text{が ideally analytic なら} \\ v=\left((st^{1/2})^{2i\lambda-1}u\right)\Big|_{s=0} \end{array}\right.$

という方程式を満たし，特性根 $\frac{1}{2}-l$ に対する境界値が0になっている。この様な non-trivial solution の存在する条件は，例1で求めた．すなわち，$l=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\cdots$ であった。

一般に，$L^2(G/H)$ のスペクトルは，G/H より小さな対称空間の点スペクトルの場合に帰着される。よって，$L^2(G/H)$ の点スペクトルを調べることが重要になるが，その存在条件は

(C) θ を σ と可換な Cartan involution とする．G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の固有値1 (resp. -1) に対する θ (resp. σ) の固有空間を $\mathfrak{k}$ (resp. $\mathfrak{q}$) とおくとき，$\mathfrak{k}\cap\mathfrak{q}$ の maximal abelian subspace が $\mathfrak{q}$ の maximal abelian subspace になる。

と考えられる (i.e. $L^2(G)$ の場合と同様)。これが十分条件であることは，最近 Flensted-Jensen[1] により得られた。

[1] Flensted-Jensen: On a fundamental series of representations related to an affine symmetric space, preprint.

[2] Oshima & Sekiguchi: Eigenspace of invariant differential operators on an affine symmetric space, preprint.