

non compact power ε も) 解析汎函数 ε について
 (n 次元の場合)

上智大 理工 森本光生

§1 定義.

$D^n = \mathbb{R}^n \sqcup S_\infty^{n-1}$ とし, $L \in D^n \times i\mathbb{R}^n$ の ε - ρ - γ -集合
 で, $L \cap \mathbb{C}^n$ が凸なものとある。例として, \mathbb{R}^n の閉凸集合 A
 と \mathbb{R}^n の ε - ρ - γ -凸集合 $K \in \varepsilon$ とし, $L = \overline{A + iK}$ (バー
 は D^n にあける閉包) とおけば, L は上の条件をみたす。

いま,

$$L_\varepsilon = \overline{L \cap \mathbb{C}^n + \{z \in \mathbb{C}^n; \|z\| \leq \varepsilon\}}$$

$\|z\|$ は \mathbb{C}^n の norm, とおく。

$K' \in \mathbb{R}^n$ の ε - ρ - γ -凸集合とし,

$$K'(\varepsilon') = K' + \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq \varepsilon'\}$$

$$H_{K'}(x) = \sup \{ \langle x, \eta \rangle; \eta \in K' \}$$

とおく。

いま, 整型汎函数空間 $\mathcal{Q}(L; K')$ を次のように定める:

$$\mathcal{Q}(L; K') = \lim_{\substack{\varepsilon \downarrow 0 \\ \varepsilon' \downarrow 0}} \text{ind} \mathcal{Q}_\varepsilon(L_\varepsilon; K'(\varepsilon')),$$

$$Q_{\varepsilon}(L_{\varepsilon}; K'(\varepsilon)) = \left\{ f \in C(L_{\varepsilon} \cap \mathbb{C}^n) \cap \mathcal{O}(L_{\varepsilon} \cap \mathbb{C}^n); \right. \\ \left. \sup_{z \in L_{\varepsilon} \cap \mathbb{C}^n} |f(z)| \exp(H_{K'}(z) + \varepsilon' \|x\|) < \infty \right\},$$

$\varepsilon = \varepsilon'$, $z = x + iy$ とし, $C(X)$ は X 上の連続函数の全体, $\mathcal{O}(X)$ は X 上の整型函数の全体を表わす。

この小文では, $Q(L; K')$ 上の解型汎函数 (L は直線ともう K' は型をもつ解析汎函数) の Cauchy 変換, Fourier 変換について論じた。 L が \mathbb{C}^n の n -次元 (n) 集合のときには, A. Martineau により論じられている。 $n=1$ のときには, 著者が [Tokyo J. Math. vol 1] の研究を行った。

§2 Cauchy 変換

(10) L および K' が直積型の場合には, 1変数の場合には容易に帰着する。

$$L_j = ([a_j, b_j] \cap \mathbb{R}) + i[k_j, l_j], \quad i = \sqrt{-1} \\ -\infty \leq a_j \leq b_j \leq \infty, \quad -\infty < k_j \leq l_j < \infty, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\ K'_j = [k'_j, l'_j], \quad -\infty < k'_j \leq l'_j < \infty, \\ j = 1, 2, \dots, n$$

とし,

$$L = \overline{L_1 \times L_2 \times \dots \times L_n}, \quad K' = K'_1 \times K'_2 \times \dots \times K'_n$$

と仮定. $\varepsilon > 0$ に $\bar{z} \notin L$,

$$L_{j,\varepsilon} = ([a_j - \varepsilon, b_j + \varepsilon] \cap \mathbb{R}) + i[k_j - \varepsilon, l_j + \varepsilon]$$

と仮定. $= z$ $-\infty - \varepsilon = -\infty$, $\infty + \varepsilon = \infty$ と規約可也.

命題 $f \in Q(L; K')$ と可也 \bar{z} , あり $\varepsilon > 0$ が存在して,
 $z \in L_\varepsilon^\circ \cap \mathbb{C}^n$ に $\bar{z} \notin L$, Cauchy の積分公式

$$f(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\partial L_{1,\varepsilon}} \dots \int_{\partial L_{n,\varepsilon}} \frac{f(\omega) \exp(-(\omega-z)^2) d\omega_1 \dots d\omega_n}{(\omega_1 - z_1)(\omega_2 - z_2) \dots (\omega_n - z_n)}$$

が成り立つ. $\in \mathbb{C}^n$, $(\omega - z)^2 = (\omega_1 - z_1)^2 + \dots + (\omega_n - z_n)^2$

定義 $T \in Q'(L; K')$ に $\bar{z} \notin L$,

$$\forall T(\omega) = \left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^n \left\langle T_2, \frac{\exp(-(\omega-z)^2)}{(\omega_1 - z_1)(\omega_2 - z_2) \dots (\omega_n - z_n)} \right\rangle$$

に $\bar{z} \notin L$, $\mathbb{C}^n \# L \equiv (\mathbb{C} \setminus L_1) \times (\mathbb{C} \setminus L_2) \times \dots \times (\mathbb{C} \setminus L_n)$ 上の
 整型函数と同様に T の Cauchy 変換 $\varepsilon > 0$ 。

つまり, $\forall \varepsilon > 0$ に $\bar{z} \notin L$,

$$L_r \# L_\varepsilon = (L_{1,r} \setminus L_{1,\varepsilon}) \times (L_{2,r} \setminus L_{2,\varepsilon}) \times \dots \times (L_{n,r} \setminus L_{n,\varepsilon})$$

と仮定,

$$R_\theta(\overline{L_r \# L_\varepsilon}; K'(\varepsilon')) = \{ F \in C(\overline{L_r \# L_\varepsilon}) \cap \mathcal{O}(L_r \# L_\varepsilon);$$

$$\sup_{\omega \in L_r \# L_\varepsilon} |F(\omega)| \exp(-H_{K'}(u) - \varepsilon'|u|) < \infty \}$$

$$|u| = |u_1| + \dots + |u_n|, \quad \omega = u + i\sigma,$$

$$R^L(\mathbb{C}^n \# L; K') = \lim_{\substack{r > \varepsilon > 0 \\ \varepsilon' > 0}} \text{proj } R_{\partial}(\overline{L_r \# L_\varepsilon}; K'(\varepsilon'))$$

とある。特に,

$$L_r \#_j L_\varepsilon = (L_{1,r} \setminus L_{1,\varepsilon}) \times \cdots \times L_{j,r} \times \cdots \times (L_{n,r} \setminus L_{n,\varepsilon})$$

↑
j 番目

と、

$$R^L(\mathbb{C}^n \#_j L; K') = \lim_{\substack{r > \varepsilon > 0 \\ \varepsilon' > 0}} \text{proj } R_{\partial}(L_r \#_j L_\varepsilon; K'(\varepsilon'))$$

と、 \mathbb{C}^n で、 $T \in Q'(L; K')$ には、 $\forall \alpha \sum_{j=1}^n R^L(\mathbb{C}^n \#_j L; K')$
 のように対応させる写像 (Cauchy 変換を用いる) を表わせば、
 次の定理を得る。

定理 Cauchy 変換

$$\begin{aligned} \mathcal{C}: T_2 &\longrightarrow \check{T}(\omega) \text{ の } \mathbb{R}^2 \\ \uparrow & \\ Q'(L; K') &\xrightarrow{\sim} R^L(\mathbb{C}^n \# L; K') / \sum_{j=1}^n R^L(\mathbb{C}^n \#_j L; K') \end{aligned}$$

は線型位相同型である。この同型を f と $z \in Q(L; K')$ と

$R^L(\mathbb{C}^n \# L; K') / \sum_{j=1}^n R^L(\mathbb{C}^n \#_j L; K')$ の内積は、 \mathbb{R}^2 で

与えられる:

$$\langle f, F \rangle = (-1)^n \int \cdots \int f(z) F(z) dz_1 dz_2 \cdots dz_n$$

$\partial L_{1,\varepsilon} \times \cdots \times \partial L_{n,\varepsilon}$

ε の $n-1$ 次 の 余輪作 を 定め,

$$\langle T, f \rangle = (-1)^n \sum_{j_1, \dots, j_n} \int_{\partial L_{j_1, \varepsilon}} \dots \int_{\partial L_{j_n, \varepsilon}} f(z) \prod_{j_1, \dots, j_n} T_{j_1, \dots, j_n}(z)$$

存在 反転公式 が 成立 する。 $\prod_{j_1, \dots, j_n} T_{j_1, \dots, j_n}(\omega)$ の 増大 度 を ε と して 表示 する こと が、問題 と して 残 った が、(1°) と 同様 の 結果 が 予想 できる。

(3°) 再び $L \in (1°)$ の 形 と し、 L の 形 の 異なる Cauchy 変換 を 考える。 可成 かつ、簡単 の ために A の 形 を 限定 して、

$$L \cap \mathbb{C}^n = A + iK$$

$$A = [a_1, \infty) \times [a_2, \infty) \times \dots \times [a_n, \infty)$$

$$K = [k_1, l_1] \times [k_2, l_2] \times \dots \times [k_n, l_n]$$

$$K' = [k'_1, l'_1] \times [k'_2, l'_2] \times \dots \times [k'_n, l'_n]$$

$$-\infty < a_j < \infty, -\infty < k_j \leq l_j < \infty, -\infty < k'_j \leq l'_j < \infty$$

と する。 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ の 時、

$$H_{K'}(x) = l'_1 x_1 + l'_2 x_2 + \dots + l'_n x_n$$

と する こと が、 L が 左側 に 有界 存在 すること より、

$$Q_\varepsilon(L_\varepsilon; K'(\varepsilon)) = \left\{ f \in C(L_\varepsilon \cap \mathbb{C}^n) \cap \mathcal{O}(L_\varepsilon \cap \mathbb{C}^n); \right. \\ \left. \sup_{z \in L_\varepsilon \cap \mathbb{C}^n} |f(z)| \exp((l'_1 + \varepsilon)x_1 + \dots + (l'_n + \varepsilon)x_n) < \infty \right\}$$

と する。 $\varepsilon = \varepsilon'$, $T \in Q'(L; K')$ が 与えられた と して、任意

の $\varepsilon' > 0$ に $\bar{\varepsilon} \neq 1$,

$$\checkmark T(\omega; \varepsilon') = \left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^n \left\langle T_{\bar{z}}, \frac{\exp(i(l_1 + \varepsilon')(\omega_1 - z_1) + \dots + i(l_n + \varepsilon')(\omega_n - z_n))}{(\omega_1 - z_1) \dots (\omega_n - z_n)} \right\rangle$$

とおく $\varepsilon = \varepsilon' \bar{\varepsilon}$ とする。

いま

$$\begin{aligned} R_{\bar{z}}^L(\mathbb{C}^n \# L; K'(\varepsilon')) \\ = \lim_{\varepsilon > 0} \text{proj} R_{\bar{z}}(\overline{L_{\varepsilon} \# L_{\varepsilon}}; K'(\varepsilon')) \\ \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

とおけば、 $\varepsilon' > 0$ と動かして得られる系 $[\checkmark T(\omega; 0)] = \{ \checkmark T(\omega; \varepsilon') \}_{\varepsilon' > 0}$ は空間

$$(*) \lim_{\varepsilon' > 0} \text{proj} \frac{R_{\bar{z}}^L(\mathbb{C}^n \# L; K'(\varepsilon'))}{\sum_{j=1}^n R_{\bar{z}}^L(\mathbb{C}^n \#_j L; K'(\varepsilon'))}$$

により、 $T \longmapsto [\checkmark T(\omega; 0)]$ は T 子変換は、 $Q'(L; K')$ と空間 (*) との間と同型を与える。これは、(変数) 場合の変換 [Tokyo J. Math] の結果と同様である。

§3. Fourier-(Borel) 変換

$T \in Q'(L; K') (\bar{\varepsilon} \neq 1)$,

$$\tilde{T}(\xi) = \langle T_{\bar{z}}, e^{-i\langle z, \xi \rangle} \rangle \equiv (\mathcal{F}T)(\xi)$$

ε 同様にして, T を Fourier - (Borel) 変換としよう. $=$ の § 2

は, L は次の形とある:

$$L = \overline{A + iK},$$

A は \mathbb{R}^n の 0 を頂点とある凸錐,

K は \mathbb{R}^n の γ -ノット凸集合.

さて, A の極集合 A° と

$$A^\circ = \{ \eta \in \mathbb{R}^n; \langle x, \eta \rangle < 0, \forall x \in A \}$$

とあり,

$$A^\circ \ominus K' = \{ \eta; \eta + K' \subset A^\circ \}$$

とある. 次の補題は容易に示すことができる.

補題 $0 \in K' \Rightarrow A^\circ \ominus K' \subset A^\circ$

$$\eta \in A^\circ \ominus K' \Rightarrow \eta + A^\circ \subset A^\circ \ominus K'.$$

定義 $h_L(\xi) = \sup \{ \operatorname{Im} \langle z, \xi \rangle; z \in L \}$

$$= \sup \{ \langle x, \eta \rangle + \langle y, \xi \rangle, x \in A, y \in K \}$$

$$= \begin{cases} \infty & \eta \notin \overline{A^\circ} \text{ かつ } \xi, \\ H_K(\xi) & \eta \in \overline{A^\circ} \text{ かつ } \xi. \end{cases}$$

定義 $\operatorname{Exp}(\mathbb{R}^n + i(A^\circ \ominus K'); L)$

$$= \{ F \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n + i(A^\circ \ominus K')); \forall \varepsilon > 0, \forall \varepsilon' > 0, \exists C \geq 0$$

$$|F(\xi)| \leq C \exp(h_L(\xi) + \varepsilon|\xi|)$$

$$\text{for } \xi \in \mathbb{R}^n + i(A^\circ \ominus K'(\varepsilon')) \}$$

$\pm z, T \in Q'(L; K')$ が与えらる T としよう。 $\forall \varepsilon > 0, \forall \varepsilon' > 0$ に $\exists \delta > 0$, T は $Q_\delta(L_\varepsilon; K'(\varepsilon'))$ 上で連続であるから、ある $C \geq 0$ と $C' \geq 0$ が存在して z 次式が成立する:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \dots\dots | \tilde{T}(z) | & \leq C \sup_{z \in L_\varepsilon} | e^{-i \langle z, \xi \rangle} | e^{H_{K'}(x) + \varepsilon \|x\|} \\ & \leq C' \sup_{z \in A(\varepsilon) + iK(\varepsilon)} e^{\langle x, \eta \rangle + \langle y, \xi \rangle + H_{K'}(x) + \varepsilon \|x\|} \\ & = C' \sup_{x \in A(\varepsilon)} e^{\langle x, \eta \rangle + H_{K'}(x) + \varepsilon \|x\|} e^{H_{K'}(\xi) + \varepsilon \|\xi\|} \end{aligned}$$

$\pm z, \eta \in A^\circ \ominus K' \ominus B_\varepsilon$ (B_ε は半径 ε の超球), 又 ϕ とし, $\eta + K' + B_\varepsilon \subset A^\circ$ とし,

$$\langle x, \eta \rangle + \langle \kappa', x \rangle + \left\langle \varepsilon \frac{x}{\|x\|}, x \right\rangle$$

$$= \langle x, \eta + \kappa' + \varepsilon \frac{x}{\|x\|} \rangle \leq 0, \quad \forall \kappa' \in K', x \in A.$$

故に, $\langle x, \eta \rangle + H_{K'}(x) + \varepsilon \|x\| \leq 0$ が $\forall z$ の $x \in A^\circ$ と $\eta \in A^\circ \ominus K' \ominus B_\varepsilon$ に $\exists \delta > 0$ 成立する。 (T が $\delta > 0$, $x \in A(\varepsilon)$ ならば, $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in A$, $\|x_2\| \leq \varepsilon$ と分解して,

$$\langle x, \eta \rangle + H_{K'}(x) + \varepsilon \|x\|$$

$$\begin{aligned} & \leq \{ \langle x_1, \eta \rangle + H_{K'}(x) + \varepsilon \|x_1\| \} \\ & \quad + \{ \langle x_2, \eta \rangle + H_{K'}(x_2) + \varepsilon \|x_2\| \} \\ & \leq 0 + \varepsilon \|\eta\| + \text{Const.} \end{aligned}$$

と評価できる。故に $\textcircled{D} \neq \eta$,

$$|\hat{T}(\xi)| \leq C_1 e^{H_K(\xi) + \varepsilon \|\xi\| + \varepsilon \|\eta\|}$$

がすべての $\eta \in A^\circ \ominus K' \ominus B_\varepsilon$ に対して成立する。これは、 \hat{T} が $\text{Exp}(\mathbb{R}^n + i(A^\circ \ominus K'); L)$ に属することを意味する。

定理 Fourier 変換子: $T \longmapsto \hat{T}$ は、次の空間の線型同型と与える:

$$T: \mathcal{Q}'(L; K') \xrightarrow{\sim} \text{Exp}(\mathbb{R}^n + i(A^\circ \ominus K'); L).$$

証明の方針 Fourier 変換子の逆写像を構成すればよい。

簡単のため、

$$A = [0, \infty) \times \dots \times [0, \infty)$$

$$K' = [k'_1, l'_1] \times \dots \times [k'_n, l'_n]$$

$$A^\circ = (-\infty, 0) \times \dots \times (-\infty, 0)$$

$$A^\circ \ominus K' = (-\infty, -l'_1) \times \dots \times (-\infty, -l'_n)$$

と可。 $F \in \text{Exp}(\mathbb{R}^n + i(A^\circ \ominus K'); L)$ に対し、その Fourier-Laplace 変換 \mathcal{E} ,

$$\mathcal{L}F(\omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty+i\eta_1^0}^{\infty+i\eta_1^0} \cdots \int_{-\infty+i\eta_n^0}^{\infty+i\eta_n^0} F(\xi) \times \\ \times e^{i\langle \omega, \xi \rangle} \bar{\Psi}\left(-\frac{\xi}{2}\right) d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n$$

とある。但し、 $\eta_j^0 < -l_j$, $j=1, 2, \dots, n$ は任意に固定
ある。また、

$$\bar{\Psi}(\xi) = \psi(\xi_1) \psi(\xi_2) \cdots \psi(\xi_n)$$

で、

$$\psi(\xi_1) = \int_{\xi_1}^{\infty} e^{-t^2} dt \equiv \int_0^{\infty} e^{-(\xi_1+t)^2} dt$$

は誤差函数である。

$\mathcal{L}F(\omega) \in \mathcal{R}^L(\mathbb{C}^n \# L; K')$ が示せて、§2 (1°) で示
した $\mathcal{R}^L(\mathbb{C}^n \# L; K')$ と $\mathcal{Q}(L; K')$ の内積により、 $\mathcal{L}F$
は $\mathcal{Q}'(L; K')$ の元と定まる。この変換が Fourier 変換の
逆になる。

(別法) Fourier 変換の逆は、著者の [Tokyo J. Math] で
示すように、Riesz 方法で与えられる。

$F \in \text{Exp}(\mathbb{R}^n + i(A^0 \ominus K'); L)$ と $\varepsilon' > 0$ ならば、

$$\hat{F}(\omega; \varepsilon') = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-i(l_1' + \varepsilon')}^{\infty} \cdots \int_{-i(l_n' + \varepsilon')}^{\infty} F(\xi) \times \\ \times e^{i\langle \omega, \xi \rangle} d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n$$

とある。積分路を $\mathbb{R}^n + i(A^0 \ominus K')$ の中で動かすと、 $\hat{F}(\omega; \varepsilon')$

が $\mathbb{C}^n \# L$ 上の解析接続である。そして、 $\varepsilon' > 0$ を動かすと、
 §2, (3°) の空間 (X) の元 ξ と $\xi' = \tau \xi$ が対応し、これが
 Fourier 変換の逆になる。

§4. Avanissian - Gay 変換

L が §2 (3°) で考えた時は、森本・吉野 [Hokkaido
 Math. J.] で考えられた Avanissian - Gay 変換 σ を用いて
 拡張できる。但し、各 L_j の幅 $l_j - k_j < 2\pi$ とし、増大度
 ξ と ξ' の l_j' は、 $l_j' < 1$ なる条件を満たすことができる。 σ と
 τ は、 $T \in \mathcal{O}'(L; K')$ に対して、

$$\check{T}_\pi(\omega) \equiv \left\langle T_\pi, \frac{1}{(1 - \exp(z_1 - \omega_1)) \cdots (1 - \exp(z_n - \omega_n))} \right\rangle$$

とよく。下 τ を π は、 \check{T}_π が周期 (period) $(2\pi i, 2\pi i, \dots, 2\pi i)$ を持つことを示す。まず、 $\text{Re } \omega_1 \rightarrow -\infty, \dots, \text{Re } \omega_n \rightarrow -\infty$ なる ω に対して $|\check{T}_\pi(\omega)| \rightarrow 0$ となる。
 又、 $R_{0, \pi}^L(\mathbb{C}^n \# L; K')$ を $R^L(\mathbb{C}^n \# L; K')$ の部分空間で、周期 $(2\pi i, 2\pi i, \dots, 2\pi i)$ をもち、 $\text{Re } \omega_1 \rightarrow -\infty, \dots, \text{Re } \omega_n \rightarrow -\infty$ なる ω に対して 0 になるものを σ の全体を表わせば、
 次の定理が成り立つ:

定理 $T = \check{T}_\pi$ に対応する変換 (Avanissian - Gay 変換)

操)は、線形位相空間の同型である。

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\quad} & \check{T}_\pi \\ \cap & & \cap \end{array}$$

$$\mathcal{Q}'(L; K') \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}_{0, \pi}^L(\mathbb{C}^n \# L; K').$$

$\varepsilon > 0$, $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, \dots\}$ と可なり, $|t_j| \gg 1$ の ε に対し,

$$\begin{aligned} & (1 - t_1 e^{z_1})^{-1} (1 - t_2 e^{z_2})^{-1} \dots (1 - t_n e^{z_n})^{-1} \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_+^n} t^{-\alpha} e^{-\langle \varepsilon, \alpha \rangle} \end{aligned}$$

と展開できる。 (ε が, ε , $|t_j| \gg 1$ の ε に対し,

$$\check{T}_\pi(-\log t_1, \dots, -\log t_n)$$

$$= \langle T_\varepsilon, \frac{1}{(1 - t_1 e^{z_1}) \dots (1 - t_n e^{z_n})} \rangle$$

$$= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_+^n} t^{-\alpha} \langle T_\varepsilon, e^{-i \langle \varepsilon, -i\alpha \rangle} \rangle$$

$$= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_+^n} t^{-\alpha} \tilde{T}(-i\alpha)$$

と展開できる。但し,

$$\tilde{T}(\xi) = \langle T_\varepsilon, e^{-i \langle \varepsilon, \xi \rangle} \rangle$$

は、前 § 1 述べた Fourier 変換である。Fourier 変換の同型性を用いるのは、森本-吉野 [Hokkaido Math. J.] の結果

ε n 次元に振張可子 = ε が ε 可子 (前回の共同研究会の報告も参照)

例えは、 $\Rightarrow R^0$ 成立する。

定理 $L = A + iK$, $K' \varepsilon = a \sum a_i \neq 0$ 且 $i = \varepsilon' \varepsilon$ 通り
 とある。 $F \in \text{Exp}(\mathbb{R}^n + i(A^\circ \ominus K')) ; K$ が、条件
 $F(-i) = F(-2i) = F(-3i) = \dots = F(-mi) = \dots = 0$
 とあるせば、 $F \equiv 0$ である。

— 以上 —