数理解析研究所講究録
第342巻 1979年 5-10

Shape における Lusternik-Schnirelmann の category について

山口大 教育 渡辺 正

§0. 最近 K. Borsuk [1] が compact metric 空間の shape において, Lusternik-Schnirelmann の category を導入した。ここでは, 任意の空間の shape において Lusternik-Schnirelmann の category を導入する。shape における n-連結性との間の関係等を考察する。

§1. <u>ANR</u>, <u>CW</u> を各々 ANR 空間と連続写像よりなる category, CW-complex と連続写像よりなる category とする。<u>HANR</u>, <u>HCW</u> を各々 <u>ANR</u>, <u>CW</u> の homotopy category とする。"$\simeq$" は homotopic を示し, $[f]$ で f の homotopy class とする。

X を位相空間とし $K=\{f_a ; a\in A\}$, $f_a : X \longrightarrow P_a \in$ ANR とする。K が X の semi-projection であるとは次の条件を満足するときである。

(1) $\forall f : X \longrightarrow P \in$ ANR に対して $\exists a \in A$ $\exists g : P_a \longrightarrow P$ で $f \simeq g f_a$ を満足する。

category $\mathcal{C}$ に対して, pro-$\mathcal{C}$ を $\mathcal{C}$ の pro-category とする, すなわち, pro-$\mathcal{C}$ の object は $\mathcal{C}$ 上の inverse system である。pro-<u>HANR</u> の元 $\mathfrak{X}=\{X_a, [p_{aa'}], A\}$ が空間 X に associate するとは, $\exists \{p_a ; a\in A\}$, $p_a : X \longrightarrow X_a$ で次の条件を満足する.

(2) $p_a \simeq p_{aa'} p_{a'}$ for $a \le a'$

(3) $\forall f : X \longrightarrow P \in ANR$ $\exists a \in A$ $\exists g : X_a \longrightarrow P$ で $f \simeq g p_a$.

(4) $\forall f, g : X_a \longrightarrow P \in ANR$ $\exists a' \ge a$ で $f p_{aa'} \simeq g p_{aa'}$.

[6]において, 次の事実が示されている。

<u>Lemma</u> 1. X を空間とし $K=\{f_a ; a\in A\}$ を X の semi-projection とする。このとき X に associate する system $\mathfrak{X}=\{X_\alpha, [p_{\alpha\alpha'}], B\}$ で各 X_α は或る f_a の値域と一致するものが存在する。

§2. π_k を k-th homotopy group functor とする。空間 X が n-shape connected であるとは次の性質を満足することである。

(5) X に associate する system $\mathfrak{X}=\{X_a, [p_{aa'}], A\}$ に対して $\forall a\in A$ $\exists a' \ge a$ で $\pi_k(p_{aa'}) : \pi_k(X_{a'}) \longrightarrow \pi_k(X_a)$ が zero homomorphism for $k \le n$.

注意: この§では空間はすべて pointed であり, 写像も pointed である。Lemma 1 を使用して次の定理を得る。

<u>Theorem</u> 1. 空間 X が n-shape connected であるための必要十分条件は, X に associate する system $\mathfrak{X}=\{X_a, [p_{aa'}], A\}$

で各 X_α が n-connected であるものが存在することである。

この定理と古典的 Hurewicz の定理を組合せることにより shape における Hurewicz の定理を得る。

<u>Theorem</u> 2. $n \geq 1$ で X が n-shape connected とする。このとき、Hurewicz map : $\pi_k\{X\} \longrightarrow H_k\{X\}$ は $k \leq n+1$ に対して pro-isomorphism となる。各々 $\pi_k\{X\}$, $H_k\{X\}$ は X の k-th pro-homotopy group, k-th pro-homology group を示す。

上の <u>Th</u> 2 は森田 [5] で示されているが、ここでの証明の方が、はるかに簡単である。

§2. 空間 X の Lusternik-Schnirelmann の category を $\mathrm{cat}\,X$ で示す。すなわち $\mathrm{cat}\,X = n$ とは次の性質を満足する最小なる k のことである。

(6) $\exists\{U_1, \cdots, U_k\}$; X の open cover で各 U_i は X の中で contractible.

もしも、この様な k が存在しないときには $\mathrm{cat}\,X = \infty$ とする。

$f : X \to Y$ に対し $\mathrm{cat}\,f$ を次の様に定義する。$\mathrm{cat}\,f$ とは次の条件を満足する k のうちの最小なものである。

(7) $\exists\{U_1, \cdots, U_k\}$: X の open cover で $f|U_i : U_i \to Y$ が null-homotopic for $i \leq k$.

もしも、この様な k が存在しないときには、$\mathrm{cat}\,f = \infty$ とする。

$\mathrm{cat}\,X$, $\mathrm{cat}\,f$ は次の性質をもつ。

(8) X が Y によって homotopy category で支配されるならば

$\mathrm{cat}\, X \leq \mathrm{cat}\, Y$.

(9) X が contractible であるための必要十分条件は $\mathrm{cat}\, X = 1$.

(10) $\mathrm{cat}\, X = \mathrm{cat}\, 1_X$, $1_X : X \to X$ は恒等写像.

(11) $\mathrm{cat}\, f \leq \mathrm{Min}\{\mathrm{cat}\, X, \mathrm{cat}\, Y\}$, $f : X \to Y$.

(12) $\mathrm{cat}\, gf \leq \mathrm{Min}\{\mathrm{cat}\, f, \mathrm{cat}\, g\}$, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$.

(13) $f \simeq g$ ならば $\mathrm{cat}\, f = \mathrm{cat}\, g$

(14) $\mathrm{cat}\, f = 1$ であるための必要十分条件は f が null-homotopic であること。

次に pro-<u>HANR</u> の object $\mathcal{X} = \{X_a, [p_{aa'}], A\}$ に対して $\mathrm{cat}\, \mathcal{X}$ を次の様に定義する。 $\mathrm{cat}\, \mathcal{X}$ とは次の条件を満足する n のうちで最小なものとする。

(15) $\forall a \in A \ \exists a' \geq a$ で $\mathrm{cat}\, p_{aa'} \leq n$.

そして、この様な n が存在しないときには、$\mathrm{cat}\, \mathcal{X} = \infty$ とする。
(8) ~ (14) の性質を使用して次の Th を示すことができる。

<u>Theorem</u> 3. $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ を pro-<u>HANR</u> の object とする. そして $\mathcal{X}$ が pro-<u>HANR</u> に於て $\mathcal{Y}$ に支配されるならば $\mathrm{cat}\, \mathcal{X} \leq \mathrm{cat}\, \mathcal{Y}$.

この Th の Corollary として $\mathrm{cat}\, \mathcal{X}$ は pro-<u>HANR</u> での invariant であることが判る。

最後に shape における Lusternik-Schnirelmann の category を次の様に定義する。 X を空間とするとき $s\text{-}\mathrm{cat}\, X$ は、或

る X に associate する system $\mathcal{X}$ に対して $\text{s-cat}\, X = \text{cat}\, \mathcal{X}$ とする。この様に定義するとき，前述のごとく，$\mathcal{X}$ の取り方によらず $\text{s-cat}\, X$ が決まる。このとき，次の定理を得る。

<u>Theorem</u> 4. X が compact metric 空間であるとき，ここでの $\text{s-cat}\, X$ は Borsuk の定義した $\underline{\kappa}(X)$ と一致する。

ここで，すこし $\text{s-cat}\, X$ の性質を列挙しよう。

<u>Theorem</u> 5. X, Y を空間とし，$Sh(X) \leq Sh(Y)$ であるならば $\text{s-cat}\, X \leq \text{s-cat}\, Y$. したがって，s-cat は shape invariant である。

<u>Theorem</u> 6. X が ANR であれば，$\text{cat}\, X = \text{s-cat}\, X$.

<u>Theorem</u>. 7. X が trivial shape であるための必要十分条件は $\text{s-cat}\, X = 1$.

<u>Theorem</u> 8. X, Y を compact 空間とする. このとき
$$\text{Max}\{\text{s-cat}\, X, \text{s-cat}\, Y\} \leq \text{s-cat}(X \times Y) \leq \text{s-cat}\, X + \text{s-cat}\, Y - 1.$$

定理8は A. Bassi の定理の shape における定理である。次に Theorem 1 を使用して Grossman の定理に対応する定理を shape で示すと次になる。

<u>Theorem</u> 9. pointed 空間 X が n-shape connected であれば
$$\text{s-cat}\, X \leq \left[\text{d-dim}\, X / (n+1)\right] + 1.$$
ここで $\text{d-dim}\, X$ は X の deformation dimension を示す。

この Th の系として，次を得る。

<u>Theorem</u> 10. 連結な空間 X に対して $s\text{-cat}\,X \leq d\text{-dim}\,X + 1$.

詳しい証明は，いずれどこかに発表するつもりです。変分に相当する概念が shape 理論の方にできれば，s-cat の部分，幾何学的な意味を解明することができるであろう。

文献

[1]. K. Borsuk; On the Lusternik-Schnirelmann category in shape theory, Fund. Math. 99 (1978) 35–42.

[2]. I. Bernstein – T. Ganea; The category of a map and of a cohomology class, Fund. Math. 50 (1962) 265–279.

[3]. R. Fox; On the Lusternik-Schnirelmann category, Ann. of Math. 42 (1941) 333–370.

[4]. D. Grossman: An estimation of the Lusternik-Schnirelmann category. Doklady 54 (1946) 109–112

[5] K. Morita; The Hurewicz and the Whitehead theorems in shape theory, Sci. Reports of Tokyo Kyoiku Daigaku. 12 (1974) 246–258.

[6] T. Watanabe, On spaces which have the shape of compact metric spaces, to appear in Fund. Math.