数理解析研究所講究録
第 344 巻 1979 年 5-21

Homogeneous graph について

東大 理　榎本 彦衛

§1. 序

Homogeneous (均質) というのは、通常、群が可移に作用している、という意味に用いられます。しかし、グラフに関しては、頂点上可移ならば vertex-transitive, (向きを考えない) 辺上可移ならば edge-transitive, 向きも指定した辺上可移ならば symmetric graph という呼び名が既にあり、homogeneous というのは、部分グラフ上可移という意味に使われています ([1, 15章]). もちろん、同型でない部分グラフが移り合うはずはないので、[1, 15D] においては、

(*) 同型な部分グラフは、グラフ全体の自己同型で移すことができる

という性質を持つグラフを homogeneous と定義しています。そして、homogeneous graphs に関する結果がいくつか

書いてあり、それらは Sheehan [8] からの引用ということになっているのですが、[8] においては、

(**) 部分グラフ間の同型写像は、常にグラフ全体の自己同型に拡張できる

という性質を持つグラフを homogeneous と呼んでおり、Biggs が誤って引用したようです。Gardiner は [4] においてそのことを指摘するとともに、実は Biggs の述べている結果が (*) という弱い仮定の下でも成り立つこと、および (**) を満たすグラフの完全な分類を与えました。

(**) という仮定が (*) と本質的に異なる点は inductive であるということです。すなわち、(**) を満たすグラフにおいては、任意の頂点に対し、その頂点と隣接している頂点の全体がつくる部分グラフも (**) を満たし、帰納法を使うことができます。(*) というのはかなり強い仮定なのですが、上に述べた意味で inductive ではないために、分類が難航しました。(この講演の直前に JLMS に載った Ronse の論文 [7] において homogeneous graphs の分類が完成したようです。) Gardiner は [4] において、(**) という仮定は部分グラフに関する combinatorial な性質を導き出すためにしか使っておらず、combinatorially homogeneous graph というものをうまく定義して、帰納法が使えるように

すれば、もっと強い分類定理が証明できるかもしれない、と示唆しているのですが、実際、それが可能であることを§3で示すことにします。

Gardiner自身は(*)を満たすグラフの分類とは違う方向へ進んでいったようで、本質的には(**)のタイプの条件をもう少し弱くするということを考えているようです。(なお、[4]では(**)を満たすグラフを *ultrahomogeneous* と呼んで、(*)と区別していたのですが、その後[5, 6]では単に *homogeneous* と呼んでおり、あまり首尾一貫していません。)[5]では

(☆) 部分グラフの自己同型は、常にグラフ全体の自己同型に拡張できる

という性質を持つグラフが、[4]とほとんど同じ証明で分類することができ、その結果(☆)と(**)が同値な条件であることを示していますが、実は(☆)から(**)が直接証明できることを§4で注意します。

すべての部分グラフに関する均質性を仮定しなくても分類は可能であって、[6]では *locally ℓ-homogeneous graphs*, すなわち

(☆☆) 連結部分グラフの自己同型は、常にグラフ全体の自己同型に拡張できる

というグラフを分類しています。さらに、locally cone homogeneous かつ locally rake homogeneous な locally finite graphs も分類したことになっているのですが、結論の list から漏れているグラフがあるので、その構成法も§3に書いておきました。

$\mathcal{C}$-homogeneous graphs, すなわち,

同型な連結部分グラフは、グラフ全体の自己同型で移れる

というグラフも、combinatorially $\mathcal{C}$-homogeneous graphs を適当に定義すれば、帰納法により分類することができます（［3］）.

§2. 記号と定義

主として finite, simple (すなわち, loop や multiple edge がない), undirected graphs を考えるが、locally finite graphs についてもほぼ同様の議論ができる。グラフΓに対し、その頂点の全体を $V\Gamma$ と書く。$V\Gamma$ の部分集合 X と、X の点を結んでいる Γ の辺すべてでできるグラフを、（X からつくった）vertex-subgraph といい、$\langle X \rangle$ で表わす。ここでは、vertex-subgraphs 以外の部分グラフは考えないので、部分グラフというのは、適当な頂点の集

合からつくった vertex-subgraph のことと約束する。$V\Gamma$ には自然に距離が定義される。x と y の距離を $d(x,y)$, x から距離 i の頂点全体を $\Gamma_i(x)$ と書く。$\Gamma_1(x)$, すなわち, x と隣接している頂点の全体は、単に $\Gamma(x)$ と書くことが多い。さらに、$V\Gamma$ の部分集合 X に対し、

$$\Gamma(X) = \bigcap_{x \in X} \Gamma(x)$$

と定義する。すなわち、$\Gamma(X)$ というのは、X に入っているすべての頂点と隣接しているような頂点の全体を表わし、combinatorially homogeneous graphs の定義において、本質的な役割を果たす。($x \notin \Gamma(x)$ であるから、$\Gamma(X) \cap X = \phi$ となっていることに注意)

グラフの均質性を次のように定義する。

(1) Γ が ultrahomogeneous

$\Longleftrightarrow$ 部分グラフ間の任意の同型写像 $\sigma : \langle X \rangle \xrightarrow{\sim} \langle Y \rangle$ に対し、Γ の自己同型 τ で、$\tau|_X = \sigma$ となるものが存在する

(2) Γ が homogeneous

$\Longleftrightarrow$ $\langle X \rangle \cong \langle Y \rangle$ ならば、$X^\tau = Y$ となる $\tau \in \mathrm{Aut}\Gamma$ が存在する。

(3) Γが K-homogeneous

$\iff$ $\langle X\rangle \cong \langle Y\rangle$ ならば、$\langle \Gamma(X)\rangle \cong \langle \Gamma(Y)\rangle$

(4) Γが L-homogeneous

$\iff$ $\langle X\rangle \cong \langle Y\rangle$ ならば、$|\Gamma(X)| = |\Gamma(Y)|$

(1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) となることは明らかであるが、実はこれらはすべて同値な条件であることを§3で証明する。

部分グラフとして、あるグラフの family $\mathcal{P}$ に属するものだけを考えたとき、$\mathcal{P}$-homogeneous という。たとえば、連結部分グラフだけを考えると、

(1′) Γが $\mathcal{C}$-ultrahomogeneous

$\iff$ $\sigma : \langle X\rangle \xrightarrow{\sim} \langle Y\rangle$, $\langle X\rangle, \langle Y\rangle$: 連結, ならば、

$\tau|_X = \sigma$ となる $\tau \in \mathrm{Aut}\,\Gamma$ が存在する。

(2′) Γが $\mathcal{C}$-homogeneous

$\iff$ $\langle X\rangle$ と $\langle Y\rangle$ が同型な連結部分グラフならば、

$X^{\tau} = Y$ となる $\tau \in \mathrm{Aut}\,\Gamma$ が存在する

というような定義になります。しかし、K$\mathcal{C}$-homogeneous graphs を、$\langle X\rangle$ と $\langle Y\rangle$ が同型な連結部分グラフならば $\langle \Gamma(X)\rangle \cong \langle \Gamma(Y)\rangle$ となる、というように定義したのではうまく分類できません。(少し複雑な部分グラフ$\langle X\rangle$をとると、$\Gamma(X) = \phi$ になってしまう。) そこで、[3] では

次のように定義しましたが、もっと自然な定義があるかもしれません。

(3′) Γ が KC-homogeneous

$\Leftrightarrow$ $\langle X\rangle$ と $\langle Y\rangle$ が同型な連結部分グラフならば、X の任意の部分集合 Z に対して、$\langle \Gamma(Z)\rangle \cong \langle \Gamma(Z^{\sigma})\rangle$ となるような $\langle X\rangle$ から $\langle Y\rangle$ への同型写像 σ が存在する（σ は Z に depend してよい）

(4′) Γ が LC-homogeneous

$\Leftrightarrow$ $\langle X\rangle$, $\langle Y\rangle$: 同型な連結部分グラフ, $Z \subseteq X$ ならば、$\exists \sigma : \langle X\rangle \xrightarrow{\sim} \langle Y\rangle$ s.t. $|\Gamma(Z)| = |\Gamma(Z^{\sigma})|$.

(1′) $\Rightarrow$ (2′) $\Rightarrow$ (3′) $\Rightarrow$ (4′) となることは明らかですが、実は、これらもすべて同値な条件になります。

なお、グラフに関して次のような記号を使います。

$L(\Gamma)$ は Γ の line graph, Γ^c は Γ の補グラフ, $t.\Gamma$ は Γ と同型なグラフ t 個の disjoint union を表わします。また、K_r は r 点から成る完全グラフ, $K_{t;r} = (t.K_r)^c$ は regular complete t-partite graph, $K_{r,r} = K_{2;r}$ は regular complete bipartite graph, C_n は n 角形を表わします。

§3. Homogeneous graphs と ℓ-homogeneous graphs

Ultrahomogeneous graphs は Gardiner によって分類されました：

定理 3.1（[4]）. Ultrahomogeneous graph は次のいずれかと同型になる。

（i） $t.K_r$, $t, r \geqq 1$,

（ii） $K_{t;r}$, $t, r \geqq 2$,

（iii） C_5,

（iv） $L(K_{3,3})$.

Homogeneous graphs は Ronse [7] によって分類され、結局すべて ultrahomogeneous になることがわかります。K-homogeneous graphs を前節のように定義すると、上の定理の証明をほとんど変更せずに適用でき、K-homogeneous graphs が分類できます。ところが、最近、L-homogeneous ならば ultrahomogeneous になるということの直接証明ができました。

定理 3.2. L-homogeneous graphs は ultrahomogeneous である.

証明 Γを L-homogeneous graph, $X, Y \subseteq V\Gamma$, σを

$\langle X \rangle$ から $\langle Y \rangle$ への同型写像とします。このとき、σをΓの自己同型に拡大できることを $|X|$ に関する帰納法で証明することにします。（$X = V\Gamma$ のときは明らかですから、$X \subsetneqq V\Gamma$ と仮定できます。）

$|\Gamma(x) \cap X|$ が最大になるような頂点 $x \in V\Gamma - X$ を取ります。$X' = \Gamma(x) \cap X$，$Y' = (X')^{\sigma}$ とおきます。σが$\langle X \rangle$ から $\langle Y \rangle$ への同型写像であることから、

$$|\Gamma(X') \cap X| = |\Gamma(Y') \cap Y|$$

となることがわかり、一方 $\langle X' \rangle \cong \langle Y' \rangle$ ですから、L-homogeneous の定義より、

$$|\Gamma(X')| = |\Gamma(Y')|$$

となります。したがって、

$$|\Gamma(X') \cap (V\Gamma - X)| = |\Gamma(Y') \cap (V\Gamma - Y)| \geqq 1$$

となることがわかり、

$$y \in \Gamma(Y') \cap (V\Gamma - Y)$$

とることができます。（$|X'| = 0$ のときは、yとして$V\Gamma - Y$の任意の点がとれる。）すると、

$$Y' \subseteq \Gamma(y) \cap Y$$

となることは、yの選び方より明らかですが、実は

$$Y' = \Gamma(y) \cap Y$$

となることが容易にわかります。（$Y' \subsetneqq \Gamma(y) \cap Y$ とすると

$(\Gamma(y)\cap Y)^{\sigma^{-1}}$ を考えると、X'の極大性に矛盾する。)
そこで、$\tau : X\cup\{x\} \longrightarrow Y\cup\{y\}$ を

$$\begin{cases} \tau|_X = \sigma \\ x^\tau = y \end{cases}$$

と定義すると、τは$\langle X\cup\{x\}\rangle$から$\langle Y\cup\{y\}\rangle$への同型写像となる。帰納法の仮定より、$\tau$は$\Gamma$の自己同型に拡張でき、それは$\sigma$の拡張にもなっている。

上の定理により、L-homogeneous graphs の分類は、ultrahomogeneous graphs の分類に帰着できるわけです。Cameron は、L-homogeneous よりもっと弱い仮定で分類に成功したそうです([2])。すなわち、

$\langle X\rangle\cong\langle Y\rangle$ かつ $|X|\leqq 5$ ならば $|\Gamma(X)|=|\Gamma(Y)|$

という条件を満たすグラフは ultrahomogeneous graphs に限るそうです。

$\mathcal{C}$-homogeneous graphs に関しては、今の所分類を完成してみるまでは(1')~(4')の同値性が証明できないようで、$\mathcal{C}$-ultrahomogeneous graphs は[6]において分類されているのですが、もっと弱い仮定での分類をそこに帰着させることは難しそうです。結果的には、次の定理が成り立

ちます。

定理 3.3. (i) 条件 (1′)〜(4′) はすべて同値である.

(ii) Γ : $\mathcal{C}$-ultrahomogeneous $\Longleftrightarrow$ Γ の連結成分がすべて同型で $\mathcal{C}$-ultrahomogeneous

(iii) 連結な $\mathcal{C}$-ultrahomogeneous graph は次のいずれかと同型になる(必要十分).

(イ) K_r , $r \geqq 1$

(ロ) C_n , $n \geqq 5$

(ハ) $K_{t;r}$, $t, r \geqq 2$

(ニ) $L(K_{r,r})$, $r \geqq 3$

(ホ) $L(K_{2,r+1})^c$, $r \geqq 3$

(ヘ) $L(K_5)^c$ (Petersen's graph)

(ト) 5次元立方体の antipodal points を同一視してできるグラフ

$K\mathcal{C}$-homogeneous graphs の分類は [3] で証明してあります. $L\mathcal{C}$-homogeneous graphs の分類は未発表ですが. $K\mathcal{C}$-homogeneous の場合の証明とほとんど同じです.

なお、locally finite（すなわち、各点と隣接している頂点の数が有限）な無限グラフを考えても、homogeneous graphs としては新しいものは出てきませんが、有限でない ℓ-homogeneous graphs は存在します。[6, Theorem 3] には valency t の無限 tree T_t およびその line graph しか書いてありませんが、次のようなグラフ $T_{t,r}$ も ℓ-homogeneous になっていると思います。

$$VT_{t,r} = \{ (a_1, b_1, \cdots, a_m, b_m) \mid m \geqq 0,\ 1 \leqq a_i \leqq t,\ a_i \neq a_{i+1},\ 1 \leqq b_i \leqq r \},$$

$(a_1, b_1, \cdots, a_m, b_m)$ と隣接する点は、

$$\{ (a_1, b_1, \cdots, a_{m-1}, b_{m-1}) \}$$
$$\cup \{ (a_1, b_1, \cdots, a_{m-1}, b_{m-1}, a_m, b_m') \mid b_m' \neq b_m \}$$
$$\cup \{ (a_1, b_1, \cdots, a_m, b_m, a_{m+1}, b_{m+1}) \mid a_{m+1} \neq a_m \}$$

と定義します。$T_t \cong T_{t,1}$, $L(T_t) \cong T_{2,t-1}$ となっていることは容易にわかります。

一般に、グラフ Γ の maximal complete subgraphs の全体を頂点集合とし、Γ の共通頂点を含むとき隣接していると定義してできるグラフを Γ の dual graph Γ^d と定義します。一般のグラフについては $(\Gamma^d)^d \cong \Gamma$ とは限りませんが、上で定義したグラフについては、$(T_{t,r})^d \cong T_{r+1,t-1}$ となっています。

§4. Local homogeneity

Gardinerは[5, 6]において、

(𝒫に属する $\langle X\rangle$ について) $\langle X\rangle$ の自己同型が常に Γ の自己同型に拡張できる

という性質を持つグラフを、locally (𝒫-) homogeneous graph と定義しました。そして、[5]において、locally homogeneous graphsを、[6]において、locally $\mathcal{C}$-homogeneous graphs を分類しています。

(𝒫-)ultrahomogeneous ならば locally (𝒫-)homogeneous となることは明らかですが、逆が直接証明できる場合もあります。

定理4.1. Locally homogeneous graphs は ultrahomogeneous になる。

証明 Γ を locally homogeneous graph とします。任意の2頂点 x, y に対し、x と y を入れ替えるという操作は、x と y が隣接していてもいなくても、$\langle\{x, y\}\rangle$ の自己同型になります。したがって、Aut Γ が $V\Gamma$ 上可移になっていることに注意して下さい。証明すべきことは、部分グラフ間の任意の同型写像 $\sigma : \langle X\rangle \xrightarrow{\sim} \langle Y\rangle$ が Γ の自己同型に拡張できる、ということですが、これを帰納法を使って証明す

ることにします。Xに入る頂点xを任意にとります。$\sigma|_{X-\{x\}}$は$\langle X-\{x\}\rangle$から$\langle Y-\{x^\sigma\}\rangle$への同型写像ですから、帰納法の仮定により、$\Gamma$の自己同型に拡張できます。それを$\tau$とするとき、$x^\sigma = x^\tau$なら証明が終ります。$x^\sigma \neq x^\tau$のときには、$Z = Y \cup \{x^\tau\}$を考え、

$$z^\eta = \begin{cases} z & z \in Y-\{x^\sigma\} \\ x^\tau & z = x^\sigma \\ x^\sigma & z = x^\tau \end{cases}$$

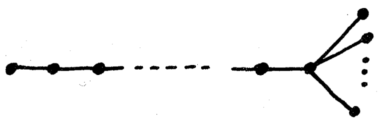
と定義すると、ηは$\langle Z\rangle$の自己同型になります。したがって、ηはΓの自己同型ξに拡張でき、$\tau\xi$はσの拡張になっています。

定理 4.2. 連結な *locally* $\mathcal{C}$-*homogeneous graphs* は $\mathcal{C}$-*ultrahomogeneous* になる。

証明　Γを連結な *locally* $\mathcal{C}$-*homogeneous graph* とします。任意の辺$\{x, y\}$に対し、xとyを入れ替えるという操作は、連結グラフ$\langle\{x, y\}\rangle$の自己同型ですから、Γの自己同型に拡張でき、$\mathrm{Aut}\,\Gamma$は$V\Gamma$上可移になります。証明すべきことは、連結部分グラフ間の同型写像がΓの自己同型に拡張できる、ということですが、任意の連結部分グラフ$\langle X\rangle$に対し、$\langle X-\{x\}\rangle$が連結になるような頂点xがXに存在

することに注意すれば、定理4.1と同様にして帰納法で証明することができます。

[6]においては、(自分以外の)すべての頂点と隣接しているような頂点が存在するグラフを cone,



という形の tree を rake (熊手) と定義し、locally cone homogeneous かつ locally rake homogeneous な locally finite graphs を分類しています。Cone も rake も連結グラフですから、locally $\mathcal{C}$-homogeneous graphs が全部出てくることは明らかですが、それ以外には位数2の射影平面の点と直線の incidence relation からできる14点グラフしか出てきません。

一般に、locally $\mathcal{P}$-homogeneous (または、$\mathcal{P}$-ultrahomogeneous) graphs を帰納法によって分類しようという場合には、cone がすべて $\mathcal{P}$ に入るということが本質的です。しかし、locally cone homogeneous graphs をすべて分類することはかなり難問です。

文 献

[1] N. L. Biggs, Algebraic Graph Theory, Cambridge Tracts in Mathematics 67 (1974).

[2] P. J. Cameron, Private communication.

[3] H. Enomoto, Combinatorially homogeneous graphs, Tech. Rep. 78-04, Dept. Information Science, Univ. of Tokyo, 1978 (a revised version is submitted to J. Combinatorial Theory).

[4] A. Gardiner, Homogeneous graphs, J. Combinatorial Theory (B) 20 (1976) 94 - 102.

[5] A. Gardiner, Homogeneous graphs and stability, J. Austral. Math. Soc. 21 (Ser. A) (1976) 371 - 375.

[6] A. Gardiner, Homogeneity conditions in graphs, J. Combinatorial Theory (B) 24 (1978) 301 - 310.

[7] C. Ronse, On homogeneous graphs, J. London Math. Soc. (2) 17 (1978) 375-379.

[8] J. Sheehan, Smoothly embeddable subgraphs, J. London Math. Soc. (2) 9 (1974) 212-218.