数理解析研究所講究録
第 344 巻 1979 年 61-66

Sharp Permutation Groups

清田正夫
東大 理 大学院

以下に述べることは 伊藤達郎氏と筆者の共著の論文[1]の紹介である。

(G, Ω) を permutation group, $|\Omega| = n$ とし θ をその permutation character とする. $L = \{l_1, \cdots, l_r\} = \{\theta(x) \mid x \in G, x \neq 1\}$, $l_1 < \cdots < l_r$ とおく. このとき次の不等式 (*) が成立する (cf. [2]):

$$(*) \qquad |G| \leq \prod_{i=1}^{r} (n - l_i) .$$

(*) で等号が成立している時, G を sharp (or L-sharp) permutation gp と呼ぶ. 次の問題は極めて自然である.

<u>問題</u>　自然数の集合 L が与えられた時, L-sharp group をすべて求めよ.

$L = \{l, l+2\}$, $\{l, l+3\}$, $\{l, l+1, \cdots l+r-1\}$ $(r \geq 2)$
の場合には　L-sharp group は次のように分類される.

$$F(G) = \{\alpha \in \Omega \mid \alpha^x = \alpha \quad \forall x \in G\},$$
$f(G) = |F(G)|$,　$\Omega' = \Omega - F(G)$ とおく.

<u>定理 1</u>　(G, Ω) を $\{l, l+2\}$-sharp group とする.
このとき次のいずれかが起こる.

(i) $f(G) = l$,　G は Ω' 上 transitive, rank 3 である.

$G \cong D_8$, S_4, $GL(2,3)$, $PSL(2,7)$.

$|\Omega'| = 4$, 6, 8, 14.

(ii) $f(G) = l-1$,　G は Ω' 上に 2 つの orbits を持つ.

$G \cong S_4$, $PSL(2,7)$

$|\Omega'| = 7$, 15.

(i) において, S_4 は 2 つの異なる置換表現を持つ.

<u>定理 2</u>　(G, Ω) を $\{l, l+3\}$-sharp group とする.
このとき次のいずれかが起こる.

(i) $f(G) = l$,　G は Ω' 上 transitive である.

$G \cong (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_2$, $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes S_3$, $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes S_4$

$\mathbb{Z}_3 \times PSL(2,4)$, $\mathbb{Z}_3 \times PSL(2,7)$

$|\Omega'| = 6, 9, 27, 15, 24$ (resp).

(iii) $f(G) = \ell - 2$, G は Ω' 上 3 つの orbits を持つ.

$G \cong (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_2$, $|\Omega'| = 8$.

(i) において, $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes S_3$ は 2 つの異なる置換表現を持つ.

<u>定理 3</u>　(G, Ω) を $\{\ell, \ell+1, \cdots, \ell+r-1\}$ - sharp group ($r \geq 2$) とする. このとき $f(G) = \ell$, G は Ω' 上 sharply r - transitive である.

以下, 定理 1 の証明を述べる.

<u>補題 4</u>　(G, Ω) を $\{0, \ell_2, \cdots, \ell_r\}$ - sharp group とする. このとき G は Ω 上 transitive である. さらに $(G_\alpha, \Omega - \{\alpha\})$ は $\{\ell_2 - 1, \cdots, \ell_r - 1\}$ - sharp となる $(\alpha \in \Omega)$

<u>証明</u>　(G_α, Ω) に $(*)$ を用いればよい.

<u>補題 5</u>　(G, Ω) を $\{\ell, \ell+s\}$ - sharp group とする. このとき $f(G) \geq m$ となる. ここで

$$m = \ell + (1-s)s' + s'^2 - 1$$

$$s' = \max\left\{1,\ \left[\frac{s-1}{2}\right]\right\}$$ とおく.

<u>証明</u>　$\theta = \sum_{\chi_i \in Irr(G)} a_i \chi_i$, $\chi_0 = 1_G$ とおく. 明らかに

(α)　$f(G) + \sum_{i \neq 0} a_i \geq a_0$ が成立する. また

$\hat{\theta} = (\theta - l\chi_0)(\theta - (l+s)\chi_0)$ とおくと, $\hat{\theta}$ は G の正則表現の指標になるから $(\hat{\theta}, \chi_0) = 1$. よって

(β)　$\sum a_i^2 - (2l+s)a_0 + l(l+s) = 1$ が成立する.

$\sum a_i^2 \geq a_0^2 + 1$ だから (β) と合わせて $l \leq a_0 \leq l+s$.

一方 $a_0 = (\theta, \chi_0) > l$ だから

(γ)　$l < a_0 \leq l+s$.

(α) と (β) から　$f(G) \geq a_0 - 1 + (a_0 - l)(a_0 - l - s)$.

容易な計算により, m を上のように定義すると

$$\min\{a_0 - 1 + (a_0 - l)(a_0 - l - s) \mid a_0 = l+1, \cdots, l+s\} = m$$

となることが分かる. 従って $f(G) \geq m$.

<u>定理 1 の証明</u>　$F(G) = \phi$ としてよい. 補題 5 より次の 2 つの場合が起こる.

Ⅰ　$L = \{0, 2\}$

Ⅱ　$L = \{1, 3\}$

Ⅰの場合. 補題 4 より G は Ω 上 transitive となる.

また G_α は Ω 上に3つの orbits を持ち，orbit の長さはそれぞれ $1, 1, |G_\alpha|$ となることもすぐ分かる．$(\alpha \in \Omega)$
このような rank 3 permutation group は [3] で分類されている．

II の場合．補題5の証明と同様にして $\theta = 2\chi_0 + \chi_1 + \chi_2$ となることが分かる．従って G は Ω 上に2つの orbits Δ_1, Δ_2 を持ち，各 orbit 上に2重可移である．

1° G^{Δ_1} が not faithful の時．

$|\Delta_1| = 2$ または 3 となる．$\alpha, \beta \in \Delta_1$ とする．

$G_{\alpha\beta}$ に (*) を用いて

$(n-1)(n-3) = |G| \leq 6\,|G_{\alpha\beta}| \leq 6\,(n-3)$．

よって $n \leq 7$ となる．$G \cong S_4$, $n = 3+4$ となることが容易に分かる．

2° G^{Δ_i} が faithful の場合 $(i = 1, 2)$

$|\Delta_1| \geq \frac{n}{2}$ としてよい．$\alpha, \beta \in \Delta_1$ とする．

$$(n-1)(n-3) = |G^{\Delta_1}| = |\Delta_1|(|\Delta_1| - 1)\,|G^{\Delta_1}_{\alpha\beta}|$$
$$\geq \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2} - 1\right)|G^{\Delta_1}_{\alpha\beta}|.$$

よって $|G^{\Delta_1}_{\alpha\beta}| \leq 3$ となる．また G^{Δ_1} は

regular normal subgroup を持たない. このような2重可移群 G^{Δ_1} は分類されている. それらの群は $PSL(2,7)$ を除くと要求される置換表現を持たない. よって $G \cong PSL(2,7)$, $n = 8+7$ となる.

Reference

[1] T. Ito and M. Kiyota, *Sharp permutation groups*, to appear

[2] M. Kiyota, *An inequality for finite permutation groups*, to appear in J. Comb. Theory (A)

[3] T. Tuzuku, *Transitive extension of certain permutation groups of rank 3*, Nagoya Math. J. 31 (1968), 31 − 36.