数理解析研究所講究録
第344巻 1979年 80-88

$G_2(q)$のSchurの指数について

東京都立大学 理学部 大森常住

1. 序

$G=G_2(q)$を標数pの有限体$\mathbb{F}_q$ ($q=p^f$)上の(G_2)型のChevalley群とする. Gの指標表は$p\neq 2,3$の場合はB. ChangとR. Ree [4]によって, $p=2,3$の場合は榎本氏によって[5], [6]それぞれ与えられた. この講演では次の定理を証明する.

定理1. $p>2$とする. このとき, Gのすべての既約指標の有理数体$\mathbb{Q}$上のSchurの指数は1に等しい.

$p=2$の場合はまだcheckしていない3個の指標を除いて, 他の指標のSchurの指数はすべて1である.

以後, 有限群の既約指標φに対し, $m_F(\varphi)$によってφの(標数0の体)F上のSchurの指数を, $F(\varphi)$によって,

φ の値を添加して得られる F の拡大体を表わす．$\mathbb{Z}$ と $\mathbb{R}$ はそれぞれ有理整数環と実数体とを表わす．

2. 準備

この節では H によってひとつの有限群を表わす．

補題1．φ を H の既約指標，ξ を $\mathbb{Q}$ で実現されるような H の指標とする．このとき

$$m_{\mathbb{Q}}(\varphi) \mid \langle \varphi, \xi \rangle_H,$$

ただし H 上の二つの類関数 α と β に対し

$$\langle \alpha, \beta \rangle_H \underset{(\mathrm{def.})}{=\!=} \frac{1}{|H|} \sum_{g \in H} \alpha(g) \overline{\beta(g)}$$

（$\overline{}$ は複素共役）．

証明は例えば [7, Chap. II, (11.4), p. 62] を見よ．

以後，補題1の ξ のように，有理数体で実現される指標を単に H の有理指標と呼ぶ．

補題2．x を位数 n の H の元とする．H の元 y で位数が $\varphi(n)$（φ は Euler の関数），そして y によっ

て生成される巡回群 $\langle y \rangle$ が $\langle x \rangle$ に共役によって忠実に作用するものが存在するものとする．このとき，H の任意の指標 χ は x において $\mathbb{Z}$ に値を取り，χ が既約ならば $m_{\mathbb{Q}}(\chi)$ は $\chi(x)$ を割り切る．

$\langle y \rangle$ は $\langle x \rangle$ に忠実に作用しているので，x の位数 n と素であるような各整数 i に対して x^i と x とは $K = \langle y \rangle \cdot \langle x \rangle$（半直積）において互に共役である．したがって指標の性質により $\chi(x) \in \mathbb{Z}$．さて

$$\chi | \langle x \rangle = \sum_{\lambda} a_{\lambda} \cdot \lambda \tag{2.1}$$

と置く．ただし右辺の和は $\langle x \rangle$ のすべての線型指標 λ にわたって取り，a_{λ} は負ではない整数である．容易にわかるように，各 λ に対し $\lambda^* = \mathrm{Ind}_{\langle x \rangle}^{K}(\lambda)$ は K の既約指標であり，$\lambda^* | \langle y \rangle$ は $\langle y \rangle$ の正則表現の指標と一致する．補題1により $m_{\mathbb{Q}}(\lambda^*) = 1$ であり $\lambda^* \subset \mathbb{Z}$ だから λ^*，したがって $\mathrm{Ind}_{\langle x \rangle}^{H}(\lambda) = \mathrm{Ind}_{K}^{H}(\lambda^*)$ は有理指標である．再び補題1により，$m_{\mathbb{Q}}(\chi)$ は $a_{\lambda} = \langle \chi | \langle x \rangle, \lambda \rangle = \langle \chi, \mathrm{Ind}_{\langle x \rangle}^{H}(\lambda) \rangle$ を割り切る．(2.1) より次の式が得られる．

$$\chi(x)/m_{\mathbb{Q}}(\chi) = \sum_{\lambda} \left(a_{\lambda}/m_{\mathbb{Q}}(\chi)\right) \cdot \lambda(x).$$

この式で、右辺は代数的整数であり、左辺は有理数，したがって $m_{\mathbb{Q}}(\chi)$ は $\chi(x)$ を割り切る．（証終）．

補題 3．（M. Benard－M. Schacher [1, Theorem 1´]）．

$\mathbb{Q}(\chi)$ は 1 の原始 $m_{\mathbb{Q}}(\chi)$ 乗根を含む．特に $\chi \subset \mathbb{R}$ ならば $m_{\mathbb{Q}}(\chi) \leqq 2$（Brauer－Speiser の定理）．

補題 4． K を H の部分群，F を標数 0 の体，E を F の有限次拡大体とする． χ と ξ をそれぞれ E に値を取るような H と K の既約指標とする．このとき

$$m_F(\chi) \mid \langle \chi, \mathrm{Ind}_K^H(\xi) \rangle_H \cdot [E : F(\chi)] \cdot m_E(\xi).$$

証明は [7, §11] を見よ．

3．定理 1 の証明

この節では $p > 2$ とする．

補題 5． u を $p > 3$ のときは G の任意のべき単元（p-元），$p = 3$ のときは正則でないような G の任意のべき単元とする． χ を G の任意の既約指標とする．このとき

$$\chi(u) \in \mathbb{Z} \quad \underline{\text{かつ}} \qquad m_{\mathbb{Q}}(\chi) \mid \chi(u) .$$

k を $\mathbb{F}_q$ の代数的閉包，$\overline{G}$ を k 上の (G_2) 型の Chevalley群とする．$\overline{G}$ は中心が自明であるような半単純な連結線型代数群であり、$G=G_2(q)$ は $\overline{G}$ の $\mathbb{F}_q$-有理点のなす群と一致する．$\overline{G}$ のべき単元 u が正則であるためには（[3] の記号に従えば）$\overline{G}$ において u が $x_a(1) \times x_b(1)$ に共役であることが条件である．$p>3$ とする．p は $\overline{G}$ に関して良い素数で $\overline{G}$ の中心は連結だからこの場合定理は [8] に含まれる．$p=3$ あるいは >3 で，u が正則でないときは容易にわかるように u の位数は p であり，$\langle u \rangle$ に忠実に作用するような位数 $\varphi(p)=p-1$ である元 t が存在する．例えば $p>3$ で $u=x_b(1)x_{3a+b}(\mu)$（記号は [3, p. 199]）とすると

$$u^i = x_b(i)\,x_{3a+b}(i\mu)\,x_{3a+2b}\left(-\frac{i(i-1)}{2}\mu\right),\ 1 \le i \le p-1,$$
$$u^p = 1 .$$

そこで

$$t = h(\nu^{-1}, 1, \nu)\,x_b\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \quad , \ \langle \nu \rangle = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$$

と置けば

$$t^i = h(\nu^{-i}, 1, \nu^i)\, x_a\!\left(-\frac{\nu^i - 1}{2}\right), \quad 1 \le i \le p-2,$$
$$t^{p-1} = 1$$

かつ

$$\begin{aligned} t^{-1} u\, t &= x_a(\nu)\, x_{3a+a}(\nu\mu)\, x_{3a+2a}\!\left(-\frac{\nu(\nu-1)}{2}\mu\right) \\ &= u^\nu. \end{aligned}$$

他の元についても同様である.(証終).

さて χ を G の既約指標とする. χ に対し $\mathbb{Z}$ の ideal $\mathfrak{a}(\chi)$ を次のように構成する. すなわち, $p>3$ のときは, $\mathfrak{a}(\chi)$ は $\{\chi(u);\ u$ は G のべき単元$\}$ によって生成された ideal, $p=3$ のときは, $\mathfrak{a}(\chi)$ は $\{\chi(u) \mid u$ は正則ではない G のべき単元$\}$ によって生成された ideal. 補題5により, $\mathfrak{a}(\chi)$ は確かに $\mathbb{Z}$ の ideal である. $c_\chi > 0$ を $\mathfrak{a}(\chi)$ の生成元とする. 補題5により $m_{\mathbb{Q}}(\chi)$ は c_χ を割り切る.

補題 6 ([4], [5]). c_χ は $\chi(e)$ の p-part に等しい. よって $m_{\mathbb{Q}}(\chi)$ は p のべきを割り切る.

定理1を証明する．θと$\overline{\theta}$とを次数$q(q^2-1)/3$の二つの既約指標とする（$p>3$のときは[4, p.412]の記号で$\theta=\chi_{19}$，$\overline{\theta}=\overline{\chi_{19}}$，$p=3$のときは[5, p.242]の記号で$\theta=\theta_{12}(1)$，$\overline{\theta}=\theta_{12}(-1)$）．$\theta$と$\overline{\theta}$以外の$G$の指標はすべて$\mathbb{R}$に値を取るからBrauer－Speiserの定理（補題3）によって，それらの指数は高々2，よって補題6から主張が得られる．次にθと$\overline{\theta}$とは互いに複素共役で$\mathbb{Q}(\theta)=\mathbb{Q}(\overline{\theta})=\mathbb{Q}(\zeta_3)$（$\zeta_3$は1の原始3乗根）．補題3により$m_{\mathbb{Q}}(\theta)=m_{\mathbb{Q}}(\overline{\theta})$は6を割り切る．よって$p>3$のときは主張は正しい．$p=3$とする．[5, p.197]で構成された指標$\theta_9(i)$，$i=\pm1$に対し

$$\langle \theta|B,\ \theta_9(1)\rangle_B=1,$$
$$\langle \overline{\theta}|B,\ \theta_9(-1)\rangle_B=1$$

がそれぞれ成立し$\mathbb{Q}(\theta_9(i))\subset\mathbb{Q}(\zeta_3)$であるから，補題4により（$m_{\mathbb{Q}(\zeta_3)}(\theta_9(i))=1$は容易にわかる），$m_{\mathbb{Q}}(\theta)=m_{\mathbb{Q}(\zeta_3)}(\theta)=1$，$m_{\mathbb{Q}}(\overline{\theta})=m_{\mathbb{Q}(\zeta_3)}(\overline{\theta})=1$．（証終）．

4．$p=2$の場合．

$p=2$とする．まず$G=G_2(2^f)$のGelfand－Graevの指標Γ_Gが有理指標であることを示す．Γ_Gは

multiplicity-freeだから，Γ_G の既約成分のSchurの指数はすべて1である．これにより[6]において，その次数を q の多項式とみなしたときに次数6次であるような指標の指数は1である．u を正則ではない G のべき単元（すなわち u の位数は2のべき）とし，χ を G の既約指標とすると $\chi(u)\in\mathbb{Z}$ であり，かつ $m_{\mathbb{Q}}(\chi)\mid\chi(u)$ である．また $c_\chi = \chi(e)_p$ を見ることも容易である．よって奇数次数の既約指標はすべて指数が1である．更に[2]により，1_B^G（B は G のBorel部分群）にあらわれる指標はすべて有理指標である．実際[6]の記号に従えば

$$1_B^G = \theta_0 + 2\theta_1 + 2\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5,$$

ここで $\theta_0 = 1_G$，$\theta_5 = St_G$．$\theta_9^{(1)}$ と $\theta_9^{(2)}$ とは前節の $\theta, \bar{\theta}$ と同様に扱うことができる．以上によって，次の三つが残る：θ_1'，θ_2'，θ_8．なお，これら三つは $\mathbb{R}$ に値を取るので，指数は高々2である．

文　献

[1] M. Benard and M. Schacher, J. Alg. 22, 1972, p. 378—385.

[2] C. T. Benson and C. W. Curtis, Trans. A. M. S., 165, 1972, p. 251 - 273.

[3] B. Chang, J. Alg. 9, 1968, p. 190-211.

[4] B. Chang and R. Ree, Insti tuto Nationale dé Alta Mat., Symp. Mat. Vol. XIII, 1974, p. 395 - 413.

[5] H. Enomoto, Japan. J. Math. 2, 1976, p. 191-248.

[6] ________, The characters of Chevalley groups of type (G_2) over finite fields of characteristic 2, preprint.

[7] W. Feit, Characters of finite groups, Benjamin, 1967.

[8] Z. Ohmori, Quart. J. Math. Oxford (2), 28, 1977, p. 357-361.