数理解析研究所講究録
第 344 巻 1979 年 89-94

1点の stabilizer の socle が非可解なある種の2重可移群について

大阪教育大学　　平峰 豊

Ω 上の2重可移群 G の1点の stabilizer G_α $(\alpha\in\Omega)$ が、$PSL(3,q)$, $q=2^n$ に同型な正規部分群を含むものは、

$A\Gamma L(3,q)\geq G\geq ASL(3,q)$, $q=2^n$, $n\equiv 1 \pmod 2$,

22次の Mathieu 群 M_{22}, 及びその自己同型群 $Aut(M_{22})$

などがその例としてある。これに関して次の定理を証明する。

<u>定理</u>　G を Ω 上の2重可移群とし、$|\Omega|$ は偶数とする。G_α $(\alpha\in\Omega)$ が $PSL(3,q)$, $q=2^n$ と同型な正規部分群 N を含めば N は $\Omega-\{\alpha\}$ 上可移となり、さらに次の (i) (ii) (iii) のいずれかが成りたつ。

(i) G は regular normal な位数 q^3 の正規部分群をもち、n は奇数かつ $SL(3,q)\leq G_\alpha\leq \Gamma L(3,q)$

(ii) $|\Omega|=22$, $G\simeq M_{22}$, $N\simeq PSL(3,4)$

(iii) $|\Omega|=22$, $G\simeq Aut(M_{22})$, $N\simeq PSL(3,4)$

定理で(i)が起る場合は精密には次のことが成りたつ。
Eを regular normal な部分群とすると、ある元 g が Ω 上の対称群の中に存在して次をみたす。$\alpha^g=\alpha$, $(G_\alpha)^g E \triangleright E$,
$A\Gamma L(3,q) \geq (G_\alpha)^g E \geq ASL(3,q)$.

証明の概略

$\alpha \neq \beta \in \Omega$ とする。$G_\alpha \trianglerighteq N$ 故、N は $\Omega-\{\alpha\}$ 上 $\frac{1}{2}$-transitive となるから $|\Omega| = 1 + r \times |\beta^N|$ が成りたつ。ここで r は $\Omega-\{\alpha\}$ 上の N-orbits の数とする。又 G_α に含まれる N と共役な部分群は N に限ることは明らかであるから、N を N^α と書く。$|\Omega|$ が偶数であることより r 及び $|\beta^{N^\alpha}|$ はいずれも奇数となる。従って、$N^\alpha_\beta = N^\alpha \cap G_\beta$ は、N^α の odd index の真部分群となる。次の Lemma により、N^α_β のある位数 q^2 の elementary abelian 部分群 A が存在して $N^\alpha_\beta \leq N_{N^\alpha}(A)$ が成りたつ。

<u>Lemma</u>　$PSL(3,q)$, $q=2^n$ の odd index の部分群は、位数 q^2 の elementary abelian 部分群をその正規部群として含む。

N^α_β の 2-Sylow 群 を S とすると、S は

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \ a, b, c \in GF(q) \right\}$ と同型であることから

ちょうど2個の位数 q^2 の elementary abelian 部分群を含んでいる。これを A, B とおく。$N^\alpha \simeq PSL(3,q)$ の性質により次が成りたつことは容易に確かめられる。

(I) $A \simeq B \simeq E_{q^2}$, $A \not\sim B$ in N^α, $N_{N^\alpha}(A) \simeq N_{N^\alpha}(B)$.
$(N_{N^\alpha}(A))' = M$ とおくと $q \neq 2$ ならば $M/A \simeq PSL(2, q)$.

次に $E = A, B$ に対して $N_{G_\alpha}(E)$ が $F(E) - \{\alpha\}$ 上可移であることを示す。$\mathfrak{M}_1 = \{A^g \mid g \in N^\alpha\}$, $\mathfrak{M}_2 = \{B^g \mid g \in N^\alpha\}$ とおくと、前に述べたことにより $\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$ は N^α に含まれる E_{q^2} に同型な部分群の全体となるから G_α は2点よりなる集合 $\{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2\}$ 上に作用する。従って $K = \{g \in G_\alpha \mid \mathfrak{M}_1^g = \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2^g = \mathfrak{M}_2\}$ とおくと $|G_\alpha : K| = 1$ or 2 となる。故に K も $\Omega - \{\alpha\}$ 上可移となる。(I)により、$(K, \Omega - \{\alpha\})$ において A や B は Witt の条件をみたす N^α_β の部分群であるから $N_K(E)$ $(E = A$ or $B)$ は $F(E) - \{\alpha\}$ 上可移となる。よって次が示された。

(II) $E = A$ or B とするとき、$N_{G_\alpha}(E)$ は $F(E) - \{\alpha\}$ 上可移である。

次に $|N^\alpha_\beta / N^\alpha \cap N^\beta|$ が奇数であることを示す。[1] の Lemma 2.1 により $C_G(N^\alpha) \neq 1$ ならば $N^\alpha_\beta = N^\alpha \cap N^\beta$ が成りたつので、$C_G(N^\alpha) = 1$ としてよい。このときには

$PSL(3, q) \simeq N^\alpha \trianglelefteq G_\alpha \leq \mathrm{Aut}(N^\alpha)$ が成りたつ。

S_1 を N^β_α の 2-Sylow 群とし、$S_2 = S_1 \cap N^\alpha \cap N^\beta$ とおくと S_2 は $N^\alpha \cap N^\beta$ の 2-Sylow 群となる。一方、$S_1/S_2 = S_1/S_1 \cap (N^\alpha \cap N^\beta)$
$\simeq S_1 N^\alpha / N^\alpha$ であるから、上のことより $S_1 N^\alpha / N^\alpha \leq \mathrm{Out}(PSL(3, q))$

従って S_1/S_2 は $PSL(3,q)$ の外部自己同型群の部分群に同型となる。このことにより S_1/S_2 は rank が 2 以下のアーベル群となるが、S_1 は $PSL(3,q)$ の 2-Sylow 群に同型であることから $S_1/(S_1)' \simeq E_{q^2}$ となる。故に $S_1/S_2 \leq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ となる。このことと次の Lemma により矛盾を得ることは容易にたしかめることができる。

<u>Lemma</u> $N = PSL(3,q)$, $q = 2^{2m}$, t を N の位数 2 の field automorphism とする。S を t-不変な N の 2-Sylow 群とすると (i) $Z(\langle t\rangle S) \simeq E_{\sqrt{q}}$ (ii) $S_0 \leq \langle t\rangle S$, $S_0 \simeq S$ ならば $S_0 = S$ 。　　従って次を得る。

(III) $|N^{\alpha}_{\beta}/N^{\alpha} \cap N^{\beta}| \equiv 1 \pmod 2$

(III) により $A, B \leq N^{\alpha} \cap N^{\beta}$ 従って $A, B \leq N^{\beta}_{\alpha}$ であるから、β に対しても (II) と同様のことがいえて、次を得る。

(IV) $F(E) \ni \{\alpha, \beta\}$ ならば $N_G(E)^{F(E)}$ は 2 重可移。$(E = A, B)$.

又 $PSL(3,2) \simeq PSL(2,7)$ であるから [2] により定理が $q = 2$ のときに成りたつことは容易に確かめることが出来る。従って $q > 2$ としてよい。$(N_{N^{\alpha}}(B))' = L$ とおくと、(I) により $L/B \simeq M/A \simeq PSL(2,q)$ となるが、$M^{F(A)} = 1$, $L^{F(B)} \neq 1$ が成りたつことを示すことができる。従って、

(IV)により$N_G(B)$は$F(B)$上の2重可移群で、1点の stabilizer が、$PSL(2,q)$に同型な正規部分群$L^{F(B)}$を含むものとなっていることがわかる。このような2重可移群は[1]により決定されているので、これにより$r=1$つまりN^{α}が$\Omega-\{\alpha\}$上可移であること及び次の(1)(2)のいずれかが成りたつことがわかる。

(1) $|F(B)|=6$, $N_G(B)^{F(B)} \simeq A_6$ or S_6, $N^{\alpha} \simeq PSL(3,4)$

(2) $|F(B)|=q^2$, $N_G(B)^{F(B)}$は regular normal 部分群をもつ

(1)の場合は[4]の Satz 7を用いて$G^{\Omega}=M_{22}$ or $Aut(M_{22})$となる。

(2)の場合は、$N_{\beta}^{\alpha}=N^{\alpha}\cap N^{\beta}=M$, $q=2^n$, $n\equiv 1 \pmod 2$
$|N_{\beta}^{\alpha}|=(q-1)(q+1)q^3$, $|\Omega|=q^3$が示される。これにより$\Omega-\{\alpha\}$上での(従ってΩ上での)N^{α}の置換表現は完全に決まったことになる。とくにBが$\Omega-F(B)$上 semi-regular であることが容易にわかる。

T_1を$N_G(B)$の2-Sylow群、T_2を$N_G(T_1)$の2-Sylow群とすると$T_2 \supsetneqq T_1$は明らかであるが、$x\in T_2-T_1$とすると$U=B\cdot B^x$は位数q^4の elementary abelian 部分群となる。これはBが$\Omega-F(B)$上 semi-regular であることからすぐに示される。

いくつかの Lemma により、Gが$\Delta=\{U^g \mid g\in G\}$上

２重可移に作用することと及び $|\Delta| = |G : N_G(U)| = q^2+q+1$ が示される。O'Nan の定理［3］により $N_G(U)$ とくに U が Δ 上 faithful でないことが分かるので $O_2(G_\Delta) \cap U \neq 1$ となる。これは $O_2(G) \neq 1$ を示しているので、とくに G^Ω は regular normal 部分群をもつことが証明された。よって定理が示された。

参考文献

[1] Y. Hiramine : On doubly transitive permutation groups, Osaka J. Math. 15 (1978), 613–631.

[2] Y. Hiramine : On some doubly transitive permutation groups in which socle (G_α) is nonsolvable, to appear

[3] M. O'Nan : A characterization of $L_n(q)$ as a permutation group, Math. Z. 127 (1972), 301–314.

[4] H. Zassenhaus : Über transitive Erweiterungen gewisser Gruppen aus Automorphismen endlicher mehrdimensionaler Geometrien, Math. Ann. 111 (1935), 748–759.