

Chevalley 群の Springer 表現について

東京理科大 庄司俊明

Introduction

G を標数 p ($\neq 0$) の代数的閉体 k 上定義された連結代数群,
 \mathfrak{g} を G の Lie 環とする. \mathfrak{g} の nilpotent element A に対し, \mathcal{B}_A
をその Lie 環が A を含む様な G の Borel subgroup 全体のなす
variety とする. W を G の Weyl 群とする時, T. A. Springer は,
[10] で compact support を持った l -adic cohomology $H_c^i(\mathcal{B}_A, \overline{\mathbb{Q}}_l)$
の上への W の表現を定義した. 但し $\overline{\mathbb{Q}}_l$ は l -進数体 ($l \neq p$)
の代数的閉包を表わすものとする. $Z = Z_G(A)$ を G における
 A の centralizer とし, $C(A) = C_G(A) = Z/Z^\circ$ とおく, (Z° は Z
の単位元の連結成分). $d_A = \dim \mathcal{B}_A$ とすると top cohomology
 $H_c^{2d_A}(\mathcal{B}_A) = H_c^{2d_A}(\mathcal{B}_A, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ の次元は \mathcal{B}_A の最大次元の既約成分の
個数に等しく, $C(A)$ の $H_c^{2d_A}(\mathcal{B}_A)$ への自然な作用は既約成分の
上への置換表現に一致する. 更に W の作用は $C(A)$ の作用と
可換になる. そこで $C(A)$ の既約指標 ϕ に対して

$C(A) \times W$ -module $H_c^{2d_A}(B_A)$ の ϕ -isotypic subspace の分解を $\phi \otimes \chi_{A,\phi}$ とおく. この時 Springer ([10]) は, この様にして定まる W の指標 $\chi_{A,\phi}$ が既約であり, W の既約指標は全て $\chi_{A,\phi}$ の形で (A,ϕ) の G -共役を除いて) 一意に定まることを示した. これを Springer 表現という. この小論では $\chi_{A,\phi}$ を具体的に求めることを考える.

$G = GL_n$ の場合, \mathfrak{g} の nilpotent element A は n の partition λ によって parametrise され, 常に $C(A) = 1$ である. この時 λ の dual partition λ^* に対応する $W = S_n$ の既約指標を χ_{λ^*} とすると, $\chi_{A,1} = \chi_{\lambda^*}$ となることが知られている. (例えば Hotta-Shimomura [3], Hotta-Springer [4]). ここでここでは, G が classical group 及び F_4 型 Chevalley 群の場合を扱う. 方針としては, G の適当な parabolic subgroup P の Weyl 群 W_P について, $H_c^{2d_A}(B_A)$ の W_P -module としての構造を決定する. B_n 型, F_4 型, 及び D_n 型の場合に於いて, W の既約指標はその W_P への制限によって決まるので, これにより $H_c^{2d_A}(B_A)$ の W -module としての構造も決めることが出来る.

§1. Unipotent variety

W の Springer 表現を定める為には, B_A の既約成分の上への $C(A)$ の作用を知る事が重要である. そこでまず B_A の既約成分の構成と, λ の上への $C(A)$ の作用を調べる.

$B \supset T$ を G の Borel subgroup, maximal torus とし, $W = N(T)/T$ とする. G の parabolic subgroup $P \supset B$ を固定する. $P = M \cdot U_P$ を P の Levi 分解, $W_P \subset W$ を P に対応する Weyl subgroup とする. P_A を λ の Lie 環が A を含む様な parabolic subgroup とし, P と共役なものの作る variety とし, $p: B_A \rightarrow P_A$ を canonical な surjection とする. P_A の上には自然に Z が作用して,

$P_A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$ と P_A の Z -orbit への分解が得られる. $y_0 \in P_A$ で P に対応する元を表わせば, $p^{-1}(y_0) = (P/B)_A \cong B_{A'}^M$ である. 但し $B_{A'}^M$ は M , $A' = A$ の M -component, に関する B_A と同様の variety とする. 簡単の為 $y_0 \in Y_\lambda$ と仮定して, $X_\lambda = p^{-1}(Y_\lambda)$ とおく. ここで $\{X_i\}$ を $B_{A'}^M$ の既約成分とすれば,

$X_\lambda = \bigcup_{a \in Z} a \cdot X_i$ であり, 各 $a \cdot X_i$ は X_λ の既約成分となる.

今, $C_p(A)$ を canonical map: $Z \rightarrow C(A)$ の $Z \cap P$ の像とし, $C'_p(A)$ を canonical map $Z \cap P \rightarrow Z_M(A') \rightarrow C_M(A')$ における $Z \cap P$ の像として定義する. 但し, $C_M(A') = Z_M(A')/Z'_M(A')$ である. すると X_λ の既約成分, 及び λ の上への $C(A)$ の作用は, Spaltenstein [9] により次の様に決定される.

(i) $C_p(A)$ は $\{X_i\}$ の上に作用する. X_i の $C_p(A)$ -orbit を

$$\bar{X}_i \text{ と表わすと, } Z^\circ X_i = Z^\circ X_j \iff \bar{X}_i = \bar{X}_j$$

(ii) $C_p(A)$ は $\{\bar{X}_i\}$ の上に作用し, $a, b \in C(A)$ に対して,

$$aZ^\circ X_i = bZ^\circ X_j \iff \begin{cases} a^{-1}b \in C_p(A) \text{ かつ} \\ \bar{X}_i = a^{-1}b\bar{X}_j \end{cases}$$

従, $\tau \Lambda$: 有限の場合には, B_A の全ての既約成分は $aZ^\circ X_i$ の closure の形で得られる. 一方, Spaltenstein [8] により B_A の既約成分は全て同次元であることが知られているので, $aZ^\circ X_i$ 達の中で最大次元のものを探し出せば, それが B_A の既約成分を全て与えることになる.

X_λ の既約成分は全て同次元であるから, そこで X_λ の次元を調べることも必要となる. それには次の lemma が有用である.

Lemma 1.1. p は very good とし, $Y_\lambda \ni y_0$ とする. この時

$$2 \dim(Z \cap P) \geq \dim Z + \dim Z_M(A').$$

ここで等号の成立つる場合には, $\dim X_\lambda = \dim B_A$.

証明は, p : very good より $\dim B_A = \frac{1}{2}(\dim Z - r)$,
 $\dim B_{A'}^M = \frac{1}{2} \dim(Z_M(A') - r)$, 但し $r = \text{rank } G$, とする事を使えば容易に出る.

最後に $Z \backslash P$ の parametrization に戻して述べる.

$\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を A の G -共役を P -共役類に分けた集合とする.

$Z \backslash P$ から $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の写像 f を $f(ZgP) = g^{-1}A$ の P -共役類として定めれば, f は well-defined な, bijection を与える

ことと容易に確かめられる. 従って $Z \backslash P$ の各元は $g^{-1}A$ の

P -共役類として parametrize できる.

注意 1.2. (i) G が classical group の場合, $P \in W_P$ が corank 1 の同じ type の Weyl subgroup に分る様に見える. すると Spaltenstein [9], Srinivasan [11], により Λ は有限である.

$$ZgP = Zg'P \iff (g^{-1}A)' \text{ と } (g'^{-1}A)' \text{ が } M \text{ での共役,}$$

と分る事が知られていす. (右辺の ' は M -component を表わす)

(ii) $G = F_4$ とする. $P \in W_P$ が C_3 型 と分るものを取す. その時 A が $A_3 + \tilde{A}_1$ ($C(A) \simeq S_4$), または $C_3 + A_1$

($C(A) \simeq Z_2$) の type の時を除いて Λ は有限集合となること

が確かめられる. (A の type については, Dynkin [2] 参照.)

§2. Springer 表現

§1 の結果を cohomology module の上に翻訳する.

P_A の locally closed subvariety Y に対 (て $X = p^{-1}(Y)$) とおく. その時.

Lemma 2.1. $H_c^i(X)$ に canonical な \mathbb{W}_p -module の構造を定義して, $H_c^i(B_A)$ に対 (ては) その \mathbb{W} -module の \mathbb{W}_p への制限と一致する様に出来る.

以下では $P_A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$ は finite union であるとして仮定する. すると Lemma 2.1 により $H_c^{2d_A}(B_A) = \bigoplus_{\lambda} H_c^{2d_A}(X_\lambda)$ と \mathbb{W}_p -module の直和に分解できる. 但し今は $\dim X_\lambda = \dim B_A$ とする. $\lambda \in \Lambda$ を動くものとする. そこで $X_\lambda = p^{-1}(Y_\lambda)$ により $Y_\lambda \ni y_0$ とし $Y_0 = \mathbb{Z}^0 y_0$, $X_0 = p^{-1}(Y_0)$ とおくと, $C(A)$ の作用を考慮して, $X_\lambda = \bigcup_a X_0$ (disjoint union) と表わせば, ここに $a \in C(A)/C_p(A)$ である.

更に X_0 の既約成分の上への $C_p(A)$ の作用は, $H_c^{2d_A}(X_0)$ の上に拡張できて, $C(A) \times \mathbb{W}_p$ -module の同型

$$H_c^{2d_A}(X_\lambda) \simeq \overline{\mathbb{Q}}_1[C(A)] \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_1[C_p(A)]} H_c^{2d_A}(X_0)$$

を得る.

そこで問題は $H_c^{2d_A}(X_0)$ の $C_p(A) \times \mathbb{W}_p$ -module の構造に帰着

する. これに対しては, いくつかの仮定のもとに $C_p(A) \times \mathbb{W}_p$ -module として $H_c^{2d_A}(X_0) \simeq H_c^{2d_{A'}}(\mathcal{B}_{A'}^M)^{C_p(A)}$ とおけることを示す. 但し $d_{A'} = \dim \mathcal{B}_{A'}^M$, 右辺は $C_p(A)$ -不変な部分空間を表わすものとする.

仮定 (S) 次の様な性質を満たす Y_0 の open dense subvariety Y , étale covering $c: \hat{Y} \rightarrow Y$ with group Π (Π : finite), \hat{Y} から \mathbb{Z}^n の morphism Δ が存在する.

(i) $\hat{Y} \simeq A^k \times S$, ; S は 1次元以下の torus, A^k は k -次元 affine space.

(ii) 任意の $y \in \hat{Y}$ に対して, $\Delta(y) y_0 = c(y)$

(iii) $\Delta(\sigma(y))^{-1} \Delta(y) \in \mathbb{Z}^n \cap P$ は $y \in \hat{Y}$ の取り方によらず, 但し $\sigma \in \Pi$ とする.

Lemma 2.2. 仮定 (S) のもとに \mathbb{W}_p -module として

$$H_c^{2d_A}(X_0) \simeq H_c^{2d_{A'}}(\mathcal{B}_{A'}^M)^{\Pi'}$$

但し Π' は (iii) によって定まる準同型 $\Pi \rightarrow \mathbb{Z}^n \cap P$ の像とする. 更に, もし Π' が $\mathcal{B}_{A'}^M$ の automorphism group として $\mathbb{Z}^n \cap P$ を不変ならば, 上の同型は $C_p(A) \times \mathbb{W}_p$ -module として取れる.

証明は $X \times_Y \hat{Y} \simeq p^{-1}(y_0) \times \hat{Y}$ とする事より, Springer 表現の定義に戻り Artin-Schreier covering に関する morphism に延長することによ, て得られる.

注意 2.3. G が classical group の場合には, Srinivasan [11] により 仮定 (5) を満たす様な Δ を直接構成することができる.

以下, connected reductive group G に対して 仮定 (5) が満たされる条件を調べる.

Lemma 2.4. $P, Z \cap P$ の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{p}, \mathfrak{z}$ とし, $L(Z \cap P)$ とし, A の子における centralizer を $Z_{\mathfrak{p}}(A)$ とおく. その時,
 $L(Z \cap P) = Z_{\mathfrak{p}}(A)$ ならば, $Y_0 \simeq Z^0/Z \cap P$

Lemma の仮定は, $Z_{\mathfrak{p}}(A)$ の次元を計算することにより Lemma 1.1 の不等式を利用して確かめることができる. 以下ではこの様な Y_0 についてのみ考えようとする.

ここで, p は very good であるから [1, E-III] により, A に対して G の parabolic subgroup Q , Levi subgroup $L \subset Q$ が canonical に定まると $Q = L \cdot U$ を Levi 分解とすれば

$Z = Z_Q(A) = Z_L(A) \cdot Z_U(A)$ は半直積で, $Z_L(A)$ は reductive, $Z_U(A)$ は Z の unipotent radical であり, $Z/Z^0 \simeq Z_L(A)/Z_L^0(A)$

とすることが知られている。そこで A の weighted Dynkin diagram $D(A)$ によって定まる \mathfrak{g} の grading を \mathfrak{g}_i で表かし, \mathcal{Q} の対応する部分 \mathcal{U}_i を \mathcal{U}_i で表す。従って, $\mathcal{U}_0 = \mathcal{L}$, $\mathcal{U} = \prod_{i>0} \mathcal{U}_i$ である。この時, P と \mathcal{Q} に関して次の仮定をする。

仮定 (Q)

- (i) $Z^0 \cap P = (Z^0(A) \cap P) \cdot (Z_0(A) \cap P)$: 半直積,
- (ii) $\mathcal{U} \cap P \cong \prod_{i>0} (\mathcal{U}_i \cap P)$ as varieties
- (iii) $Z^0(A) \cap P$ は $Z^0(A)$ の semi-parabolic subgroup, 又は semi-parabolic subgroup の Levi subgroup である。

但し $H \subset G$ が semi-parabolic とは, H が G の maximal unipotent subgroup を含むものとして定義する。

以上の仮定の元とて, 仮定 (S) の条件を確かめることができる。実際, この時 $Z_0(A) \cong A^n$, $Z_0(A) \cap P \cong A^m$, $Z_0(A)/Z_0(A) \cap P \cong A^{n-m}$ であり, 更に section $\rho_R: Z_0(A)/Z_0(A) \cap P \rightarrow Z_0(A)$ が存在することが容易に分る。一方, $Z^0(A) = C$ とおくと, (iii) より $S(C \cap P)^\circ$ が C の parabolic subgroup となる様子を S' ($\dim S' \leq 1$) が存在する。そこで étale covering $C/(C \cap P)^\circ \rightarrow C/(C \cap P)$ を考え, $S'(C \cap P)^\circ$ に対応する C の big cell $V_c \cdot S'(C \cap P)^\circ \subset C$ (V_c は $S(C \cap P)^\circ$ の opposite parabolic

subgroup の unipotent radical) を取れば,

$$C/(C \cap P)^\circ \supset V_c \cdot S(C \cap P)^\circ / (C \cap P)^\circ \cong V_c \cdot S \cong A^l \times S' \text{ は,}$$

open dense な $C/(C \cap P)^\circ$ の subvariety であり、section s_c が存在する。

$$\text{ここで } Y = V_c \cdot S(C \cap P)^\circ Z_U(A) / (Z^\circ \cap P),$$

$$\hat{Y} = V_c \cdot S(C \cap P)^\circ Z_U(A) / (Z^\circ \cap P)^\circ \text{ とすれば,}$$

$$\hat{Y} = V_c \cdot S(C \cap P)^\circ / (C \cap P)^\circ \times Z_U(A) / Z_U(A) \cap P \text{ であり,}$$

canonical map $c: \hat{Y} \rightarrow Y$ に対して, $\rho = (\rho_c, \rho_P)$ は仮定 (5) の条件を満たすことが確かめられる。更に, この時

Π' の $H_c^{2d_A}(\mathcal{B}_A^M)$ の作用は $c^*(A)$ に一致することも容易に分る。

注意 2.6. $G = \mathbb{F}_q$ の場合, $\dim Y_\lambda = \dim \mathcal{B}_A$ となり $Y_\lambda \supset Y_0$ に対して, Lemma 2.4 の仮定は成立する。又 nilpotent element の P -共役類の分類の結果より仮定 (2) の条件は全て成立する。

§3. Identification

$G = \mathrm{Sp}_m$, $O_m \subset \mathrm{GL}_m$ を自然な inclusion とする。 $A \in \mathfrak{g}$ を \mathfrak{gl}_m の元とみて m 次の Young diagram $d_m = d_m(A)$ で表わす事にする。 Sp_m , O_m の Lie 環をそれぞれ \mathfrak{sp}_m , \mathfrak{o}_m とし, ν を $d_m(A)$ の長さ i の行の個数とすると, $A \in \mathfrak{gl}_m$ に対して

$$\left\{ \begin{array}{l} A \in \mathcal{P}_m \iff \text{奇数 } i \text{ に対して } r_i \text{ は偶数} \\ A \in \mathcal{O}_m \iff \text{偶数 } i \text{ に対して } r_i \text{ は偶数} \end{array} \right.$$

と分り, 又

$$\Sigma_G(A) \text{ の reductive part } \simeq \begin{cases} \prod_{i: \text{even}} \mathbb{O}_{r_i} \times \prod_{j: \text{odd}} \mathbb{S}p_{r_j} & (G = \mathbb{S}P_m) \\ \prod_{i: \text{odd}} \mathbb{O}_{r_i} \times \prod_{j: \text{even}} \mathbb{S}p_{r_j} & (G = \mathbb{O}_m) \end{cases}$$

である. 従って $\Sigma_G(A)/Z_G^0(A) \simeq \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \dots \times \mathbb{Z}_2}_{a \text{ 個}} \simeq \mathbb{Z}_2^a$ である.

$G = \mathbb{S}P_m$ の時は, $a = \#\{r_i \mid r_i \neq 0, i \text{ は偶数}\}$,

$G = \mathbb{O}_m$ の時は, $a = \#\{r_i \mid r_i \neq 0, i \text{ は奇数}\}$ である.

そこで r_i に対応する $\Sigma_G(A)/Z_G^0(A)$ の generator を a_i と表わすことにする. $a_i^2 = 1$ であり, 奇数 i に対して $a_i = 1$

($G = \mathbb{S}P_m$), 又は 偶数 i に対して $a_i = 1$ ($G = \mathbb{O}_m$) である.

次に $W = W_n$ を C_n 型 Weyl 群とす. W の既約指標は

n の partition の pair (λ, μ) , $|\lambda| + |\mu| = n$ と bijective に対応

する. 但し partition $(\lambda) = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ に対して $|\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_r$

と表わす. partition pair $\tau = (\lambda, \mu)$ に対応する W の既約指標

を $\chi_\tau = \chi_{(\lambda, \mu)}$ と表わすことにする. n 型 D_n -型 Weyl 群は

W の index 2 の subgroup W_0 と同一視できる. その時 W_0 の

既約指標の全体は unordered partition pair (λ, μ) , $|\lambda| + |\mu| = n$

と bijective に対応する. 但し (λ, λ) は 2 回数えるものとする.

実際, W の既約指標 $\chi_{(\lambda, \mu)}$ に対して, $\lambda \neq \mu$ ならば

$\chi_{(\lambda, \mu)} |_{\mathbb{W}_0}$ も既約であり, $\lambda = \mu$ ならば $\chi_{(\lambda, \mu)} |_{\mathbb{W}_0} = \chi_1 + \chi_2$ と同じ次数の \mathbb{W}_0 の既約指標の和に分解する.

今, $\tau = (\lambda, \mu)$ ordered pair (又は unordered pair) に
 対して, $\lambda^* = (\lambda_i)$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r$,
 $\mu^* = (\mu_i)$, $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_s$ をそれぞれ
 (λ) , (μ) の dual partition (Young diagram の dual に対応する
 partition) とし, $d_\tau = (d_i)$ を次の様に定義する.

(C) $G = \text{Sp}_{2n}$

まず数列 $\{\nu_i\}$ を, $\nu_{2i-1} = \mu_i$ ($1 \leq i \leq s$), $\nu_{2i} = \lambda_i$ ($1 \leq i \leq r$)
 $\nu_i = 0$ その他, と定める. そして, $d_\tau = (d_i)$ を帰納的に次の
 様に定める.

- i) $\nu_i \geq \nu_{i+1} \Rightarrow d_i = 2\nu_i$,
- ii) $\nu_i = \nu_{i+1} - 1 \Rightarrow d_i = 2\nu_i + 1, d_{i+1} = 2\nu_i + 1$,
- iii) $\nu_i \leq \nu_{i+1} - 2 \Rightarrow d_i = 2\nu_{i+1} - 2, d_{i+1} = 2\nu_i + 2$,

(B) $G = \text{O}_{2n+1}$

まず $\{\lambda_i\}$, $\{\mu_j\}$ を $i > r, j > s$ に対して $\lambda_i = \mu_j = 0$ とし
 全ての自然数に拡張しておく. そして $d_\tau = (d_i)$ を次の様に定める.

- i) $\mu_i \geq \lambda_i - 1 \Rightarrow d_{2i-1} = 2\mu_i + 1$,
- ii) $\mu_i = \lambda_i - 2 \Rightarrow d_{2i-1} = 2\mu_i + 2, d_{2i} = 2\mu_i + 2$,

$$(ii) \mu_i \leq \lambda_i - 3 \Rightarrow d_{2i-1} = 2\lambda_i - 3, \quad d_{2i} = 2\mu_i + 3,$$

$$(i)' \lambda_i \geq \mu_{i+1} + 1 \Rightarrow d_{2i} = 2\lambda_i - 1,$$

$$(ii)' \lambda_i = \mu_{i+1} \Rightarrow d_{2i} = 2\lambda_i, \quad d_{2i+1} = 2\lambda_i$$

$$(iii)' \lambda_i \leq \mu_{i+1} - 1 \Rightarrow d_{2i} = 2\mu_{i+1} - 1, \quad d_{2i+1} = 2\lambda_i + 1.$$

$$(D) G = O_{2n}$$

標準形式順序に用いて, $\lambda^* \geq \mu^*$ と仮定する. $\{\lambda_i\}, \{\mu_j\}$ は

(B) の場合と同様にする. この時 $d_\tau = (d_i)$ を次の様に定める.

$$(i) \lambda_i \geq \mu_i + 1 \Rightarrow d_{2i-1} = 2\lambda_i - 1,$$

$$(ii) \lambda_i = \mu_i \Rightarrow d_{2i-1} = 2\lambda_i, \quad d_{2i} = 2\lambda_i,$$

$$(iii) \lambda_i \leq \mu_i - 1 \Rightarrow d_{2i-1} = 2\mu_i - 1, \quad d_{2i} = 2\lambda_i + 1,$$

$$(i)' \mu_i \geq \lambda_{i+1} - 1 \Rightarrow d_{2i} = 2\mu_i + 1,$$

$$(ii)' \mu_i = \lambda_{i+1} - 2 \Rightarrow d_{2i} = 2\mu_i + 2, \quad d_{2i+1} = 2\mu_i + 2,$$

$$(iii)' \mu_i \leq \lambda_{i+1} - 3 \Rightarrow d_{2i} = 2\lambda_{i+1} - 3, \quad d_{2i+1} = 2\mu_i + 3.$$

容易に分る様に, $d_\tau = (d_i)$ は有限個の項を除いて 0 であり
 それぞれの場合に G の nilpotent element の共役類を定め, そ
 こに対応する nilpotent element を A_τ と表わす.

一方, $C_G(A_\tau) = Z_G(A_\tau) / Z_G^0(A_\tau)$ の linear character ϕ_τ を
 次の様に定める.

$$\phi_\tau(a_i) = \begin{cases} -1 & d_\tau \text{ における長さ } i \text{ の行か上の} \\ & \text{定義式 (iii) } (G = \mathrm{Sp}_m), \text{ また (iii)', (iii)'} \\ & (G = \mathrm{O}_m) \text{ の表 } d_j \text{ と表わされるとき,} \\ 1 & \text{その他} \end{cases}$$

又、 $G = \mathrm{O}_m$ の場合は、 ϕ_τ の $C_G(A_2)$ の上への制限を同様の記号で表わすものとす。又、

Theorem 3.1.

(i) $G = \mathrm{Sp}_{2n}$ または $G = \mathrm{SO}_{2n+1}$ とす。partition pair $\tau = (\lambda, \mu)$ に対して (A_τ, ϕ_τ) を対応させる写像は G の Springer 表現を explicit に与える。即ち、 (A_τ, ϕ_τ) に対応する Springer 表現の指標を χ_{A_τ, ϕ_τ} とすれば、 $\chi_{A_\tau, \phi_\tau} = \chi_\tau$ とす。

(ii) $G = \mathrm{SO}_{2n}$ とす。 $\tau = (\lambda, \mu)$, $\lambda \neq \mu$ の場合は (i) と同様、 $\tau = (\lambda, \lambda)$ の場合は、 $\phi_\tau = 1$ で $\chi_\tau = \tilde{\chi}_{A_1, 1} + \tilde{\chi}_{A_2, 1}$ とす。但し χ_τ は τ に対応する W_n の指標、 A_i は A の SO_{2n} の共役類の代表元、 $\tilde{\chi}_{A_i, 1}$ は $(A_i, 1)$ に対応する W_0 の Springer 表現の指標を表わすものとす。

注意 3.2. $G = \mathrm{SO}_{2n}$ の場合、 W_F 上の制限を考慮し関係上これ以上は決まらぬが、 $\tau = (\lambda, \lambda)$ の場合には、 A_1, A_2 は共に parabolic type の nilpotent element になる。従って

\mathfrak{a}_i を A_i に対応する parabolic subgroup で決まる G の
 部分 root system とすると Hotta - Springer [4] により,
 \mathfrak{a}_i に対応する Macdonald 表現 $M_{\mathfrak{a}_i}$ により
 $X_{A_i, 1} = \text{reg} \otimes M_{\mathfrak{a}_i}$ と表わすことができる。従って、この
 場合にも identification は可能になる。

最後に $G = F_4$ の場合を扱う。§1 に述べたことから G の
 nilpotent element の P -共役類を決定し、その centralizer の次元を
 調べることによって \mathfrak{a}_+ の既約成分を決定できる。(§1 に
 述べた例外の場合は、別に扱う必要はない)。それに対して
 条件 (2) の成立することを確認し、(3) の場合の結果を使えば
 F_4 の場合にも W_P の制限を決めることができる。 F_4 の
 character table (T. Kondo [5]) によれば、 W の既約指標
 は全て W_P の制限によって決まるから、これから identification
 が出来る。結果は表 I に示す通りである。表 I において
 第一列は、nilpotent element の共役類の代表元を表わし、
 第三列の既約指標 $\chi_{i,j}$ は F_4 の character table において
 degree i の j 番目の指標を表わす。但し、 $\chi_4, \chi_{12}, \chi_{16}$ は
 それぞれの degree の isolated character である。 $A_3 + A_1$ の場合に
 下の記号は対応する $C(A) \simeq S_4$ の既約指標を表わす Young diagram
 を意味する。

表 I

F_4 の Springer 表現

A の type	$C(A)$	既約指標
ϕ	1	$\chi_{1,1}$
A_1	1	$\chi_{2,3}$
\tilde{A}_1	Z_2	$\chi_{4,1}, \chi_{2,1}$
$A_1 + \tilde{A}_1$	1	$\chi_{9,1}$
A_2	Z_2	$\chi_{8,3}, \chi_{1,3}$
\tilde{A}_2	1	$\chi_{8,1}$
$A_2 + \tilde{A}_1$	1	$\chi_{4,3}$
$A_1 + \tilde{A}_2$	1	$\chi_{6,1}$
B_2	Z_2	$\chi_{9,3}, \chi_{\neq}$
$A_1 + B_2$	Z_2	$\chi_{16}, \chi_{\neq,2}$
$A_3 + \tilde{A}_1$	S_4	$\chi_{12}, \chi_{9,2}, \chi_{6,2}, \chi_{1,2}$ $\square \quad \square \quad \square \quad \square$
B_3	1	$\chi_{5,2}$
C_3	1	$\chi_{8,4}$
$C_3 + A_1$	Z_2	$\chi_{9,\neq}, \chi_{2,2}$
B_4	Z_2	$\chi_{4,\neq}, \chi_{2,\neq}$
F_4	1	$\chi_{1,\neq}$

References

- [1] Borel, A et al. ; Seminar in algebraic groupes and related finite groups. Lecture Notes in Math. 131, Springer.
- [2] Dynkin, E. B. ; Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras. A. M. S. Translations (2) 6, (1957) 111-244.
- [3] Hotta, R. and Shimomura, N. ; The fixed point subvarieties of unipotent transformations on generalized flag varieties and the Green functions — combinatorial and cohomological treatments centering GL_n . To appear
- [4] Hotta, R and Springer, T. A. ; A specialization theorem for certain Weyl group representations and an application to the Green polynomials of Unitary groups.
Inventiones Math. 41, (1977) 113-127.
- [5] Kondo, T. ; The characters of the Weyl group of type F_4 .
J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec I, 11 (1965) 145-153.
- [6] Shoji, T. ; On the Springer representations of the Weyl groups of classical algebraic groups. To appear
- [7] Shoji, T. ; On the Springer representations of Chevalley groups of type F_4 . To appear

- [8] Spaltenstein, N. ; On the fixed point set of a unipotent element on the variety of Borel subgroup.
To appear
- [9] Spaltenstein, N. ; Sous groupes de Borel contenant un unipotent donné. To appear
- [10] Springer, T. A. ; Trigonometric sums, Green functions of finite groups and representations of Weyl groups.
Inventiones Math. 36. (1976), 173-207.
- [11] Srinivasan, B. ; Green polynomials of finite classical groups. Comm. in Algebra 5, (1977) 1241-1259.