数理解析研究所講究録
第 344 巻 1979 年 141-145

有限半単純 Lie 環の nilpotent orbits に附随した trigonometrical sums について

阪大 理　川中 宣明

§1.　この節では，G を split BN-pair $\{B, N\}$ を持つ有限群（[1]）とする．$\{W, S\}$ を $\{G, B, N\}$ に附随する Coxeter 系；P_I $(I \subset S)$ を G の標準的な放物型部分群；L_I，V_I をそれぞれ P_I の Levi 部分群と unipotent radical とする．G 上の（複素数値）類関数 φ に対して，次式によって P_I 上の類関数 φ_I を定義する：

$$\varphi_I(x) = |V_I|^{-1} \sum_{u \in V_I} \varphi(xu) \qquad (x \in P_I).$$

Harish-Chandra の cusp forms の概念を，少し変更して次の概念を導入する．

定義 1.　G 上の類関数 φ が quasi-cuspidal である，とは，$^{\forall} I \subsetneqq S$ に対して $\varphi_I \equiv 0$ となることである．

G 上の類関数の空間を $Cl(G)$，quasi-cuspidal な元

全体のなす部分空間を $Cl(G)^{s.c.}$ と記すことにすると，

定理1. $Cl(G) = \bigoplus_{I \subset S} \mathrm{ind}_{P_I}^{G} (Cl(L_I)^{s.c.})$: $Cl(G)$ 上の標準的な hermete 内積に関する直交分解．但し，$f \in Cl(L_I)$ は $f(xu) = f(x)$ $(x \in L_I, u \in V_I)$ とおくことによって $Cl(P_I)$ の元と考える．

この定理のひとつの応用として，Harish-Chandra の結果（[1 ; Th.(3.5)]）が次のように一般化できる．

定理2. P_1, P_2 を G の放物型部分群で，$L = P_1 \cap P_2$ が P_1 の Levi 部分群であると同時に P_2 の Levi 部分群でもある，とする．$\varphi \in Cl(L)$ を，定理1におけると同様に P_1 あるいは P_2 上の類関数と考えて次の等式が成立する：

$$\mathrm{ind}_{P_1}^{G}(\varphi) = \mathrm{ind}_{P_2}^{G}(\varphi) .$$

$\varphi \in Cl(G)$ に対して，$\hat{\varphi} \in Cl(G)$ を次式によって定義する：

$$\hat{\varphi} = \Sigma_{I \subset S} (-1)^{|I|} \mathrm{ind}_{P_I}^{G}(\varphi_I) .$$

定理3. (i) $\varphi \in Cl(G)$ の定理1の分解を $\varphi = \Sigma_{I \subset S} \varphi(I)$

とすると, $\hat{\varphi} = \sum_{I \subset S} (-1)^{|I|} \varphi(I)$. とくに $\varphi_1, \varphi_2 \in Cl(G)$ に対して $(\varphi_1, \varphi_2)_G = (\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2)_G$ が成立.

(iii) φ が G の線型表現の指標なら $\hat{\varphi}$ は一般指標である. とくに φ が既約指標なら $\hat{\varphi}$ or $-\hat{\varphi}$ も既約指標である.

定理3 (iii) により, G の既約指標の pairing が定義できる. この pairing は, $\mathrm{ind}_B^G(1_B)$ の既約成分の pairing を induce することは容易にわかる. これが Hecke 環 $H_{\mathbb{C}}(G, B)$ の Goldman による involutory automorphism ([2]) から induce される pairing と一致していることは, 行者明彦氏により証明された.

§2. $\underline{G}$ を有限体 k ($\mathrm{char}.\, k = p$) 上定義された連結かつ reductive な線型代数群, $\underline{g}$ をその Lie 環とし, $\underline{G}$ および $\underline{g}$ の Frobenius 写像を同じ記号 F で表わす.

定理 (T. A. Springer [3]) $\underline{N}$ を $\underline{g}$ の nilpotent な元全体のなす $\underline{g}$ の closed irreducible subvariety, $\underline{V}$ を G の unipotent な元全体のなす $\underline{G}$ の closed irreducible subvariety とする. 今 p が $\underline{G}$ (のルート系) に対して '良い素数' であるとする. このとき, $\underline{V}$ から $\underline{N}$ への morphism f で次の三条件を満たすものが存在する:

(a) f は homeomorphism.

(b) f は $\underline{G}$ の $\underline{V}$ および $\underline{N}$ への作用(conjugation および adjoint action)と可換.

(c) f は Frobenius map F と可換.

$\underline{\mathcal{O}}$ を $\underline{N}$ における F-stable な $\underline{G}$-orbit, $\underline{\mathcal{O}}$ を上の f によって $\underline{\mathcal{O}}$ に対応するような($\underline{V}$ における)F-stable な $\underline{G}$-orbit とする. $\underline{\mathfrak{g}}$, $\underline{G}$, $\underline{\mathcal{O}}$, $\underline{\mathcal{O}}$ の F-不動点全体のなす集合を, それぞれ $\mathfrak{g}$, G, $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}$ と記すことにする. また, $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}$ の $\mathfrak{g}$, G における characteristic function をそれぞれ $1_{\mathcal{O}}$, $1_{\mathcal{O}}$ と書くことにする. $\mathfrak{g}$ における $1_{\mathcal{O}}$ の Fourier 変換像 $\mathcal{F}(1_{\mathcal{O}})$ を考える:

$$\mathcal{F}(1_{\mathcal{O}})(X) = q^{-N}\sum_{f\in\mathcal{O}} \chi(\langle X, f\rangle) \quad (X\in\mathfrak{g}),$$

ここに q^N は G の p-Sylow 部分群の位数, χ は k の($\mathbb{C}^*$-値)指標($\neq 1$), $\langle\ ,\ \rangle$ は'Killing form'である. ここでは, 特に X が nilpotent である場合に注目する:

定理 4. $\widehat{(1_{\mathcal{O}})}(u) = \mathcal{F}(1_{\mathcal{O}})(f(u))$, ここに左辺の $\wedge$ は §1 で導入したもの, 右辺の f は上の Springer の定理に出てくるもの, とする.

系. $\sum_X \mathcal{F}(1_{\mathcal{O}})(X)\overline{\mathcal{F}(1_{\mathcal{O}'})(X)} = \begin{cases} |\mathcal{O}| & (\mathcal{O}=\mathcal{O}'), \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$

ここに左辺の X は $\mathfrak{g}\cap\underline{N}$ を動くものとする.

§3. 定理3および定理4とその系を用いてEnnolaの予想(「$GL_n(\mathbb{F}_q)$のcharacter tableと$U_n(\mathbb{F}_q)$のcharacter tableとは，$q \to -q$という置き換えによって互に変換し合う。」)を，証明することができる．このことについては，もう少し証明を整理して別の機会に報告させて頂きたい．

文　献

[1] R.W. Curtis; Reduction theorems for characters of finite groups of Lie type, J. Math. Soc. Japan **27** (1975), 666-688.

[2] N. Iwahori; On the structure of the Hecke ring of a Chevalley group over a finite field, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **10** (1964), 215-236.

[3] T. A. Springer; The unipotent variety of a semi-simple group, in Proc. Bombay Colloq. on Algebraic Geometry (1968), 373-391, Tata Institute, 1969.