数理解析研究所講究録
第 346 巻 1979 年 1-10

Cube with two handles 上の p.l. involutions について

東海大　　尾形 正和

▨ f が top. sp. M 上の involution

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} f \text{ は M から M への homeo} \\ f \neq \text{identity} \\ f^2 = \text{identity} \end{cases}$$

▨ f と g が M 上の involution であるとき

f と g が equivalent

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} {}^{\exists}h : M \longrightarrow M : \text{homeo} \\ f = hgh^{-1} \end{cases}$$

▨ M 上の involution f の fixed point set Fix(f) を

$$\mathrm{Fix}(f) \overset{\text{def}}{=} \{x : x \in M,\ f(x) = x\}$$

と定める

▨ f と g が equivalent なら Fix(f) と Fix(g) は同相

▨ $M = S^1$ or B^1 or B^2

のとき M 上の involutions の equivalent class は 決定

されている (Eilenberg, S. [1])

- $M=S^2$ $\mathrm{Fix}(f) \neq \phi$

  のときも同様

- $M=S^3$ のとき

$$\mathrm{Fix}(f) = \begin{cases} \phi \\ S^0 \\ S^1 \\ S^2 \end{cases}$$

の4種である (Smith, P.A. [2])

- M上の involutions の equivalent class は

  $\mathrm{Fix}(f)=\phi$ のとき unique (Livesay, G.R. [3])

  $\mathrm{Fix}(f)=S^0$ のとき unique (Hirsch, M.H.−Smale, S. [4], Livesay, G.R. [5])

  $\mathrm{Fix}(f)=S^1$ で f が p.l. のとき unique (Waldhausen, F. [6] Montgomery, D.−Samelson, H [7])

  $\mathrm{Fix}(f)=S^2$ で f が p.l. のとき unique (容易にわかる)

- $M=B^3$ のとき M上の p.l. involutions の equivalent class は S^3の p.l. involutions の決定の方法により決定できる (予定である)

▨ $M^3 = B^3 \cup H_1 \cup H_2$

B^3 : 3-ball

$H_i = D_i^2 \times I_i$ $(i = 1, 2)$

$H_1 \cap H_2 = \phi$

$B^3 \cap H_i = D_i^2 \times \{0\} \cup D_i^2 \times \{1\}$

f は p.l. involution on M

とするとき

f の equivalent class は 18 通りのいづれかである

∵) B^3, H_1, H_2 は 3-ball で

3-ball の p.l. involution は判っているから

$H_i \cap B^3$ に気をつけて組合せを全て考え分類

すればよい

(分類はほぼ Fix でできる

1 組だけは fixed point set の embedding

を用いる)

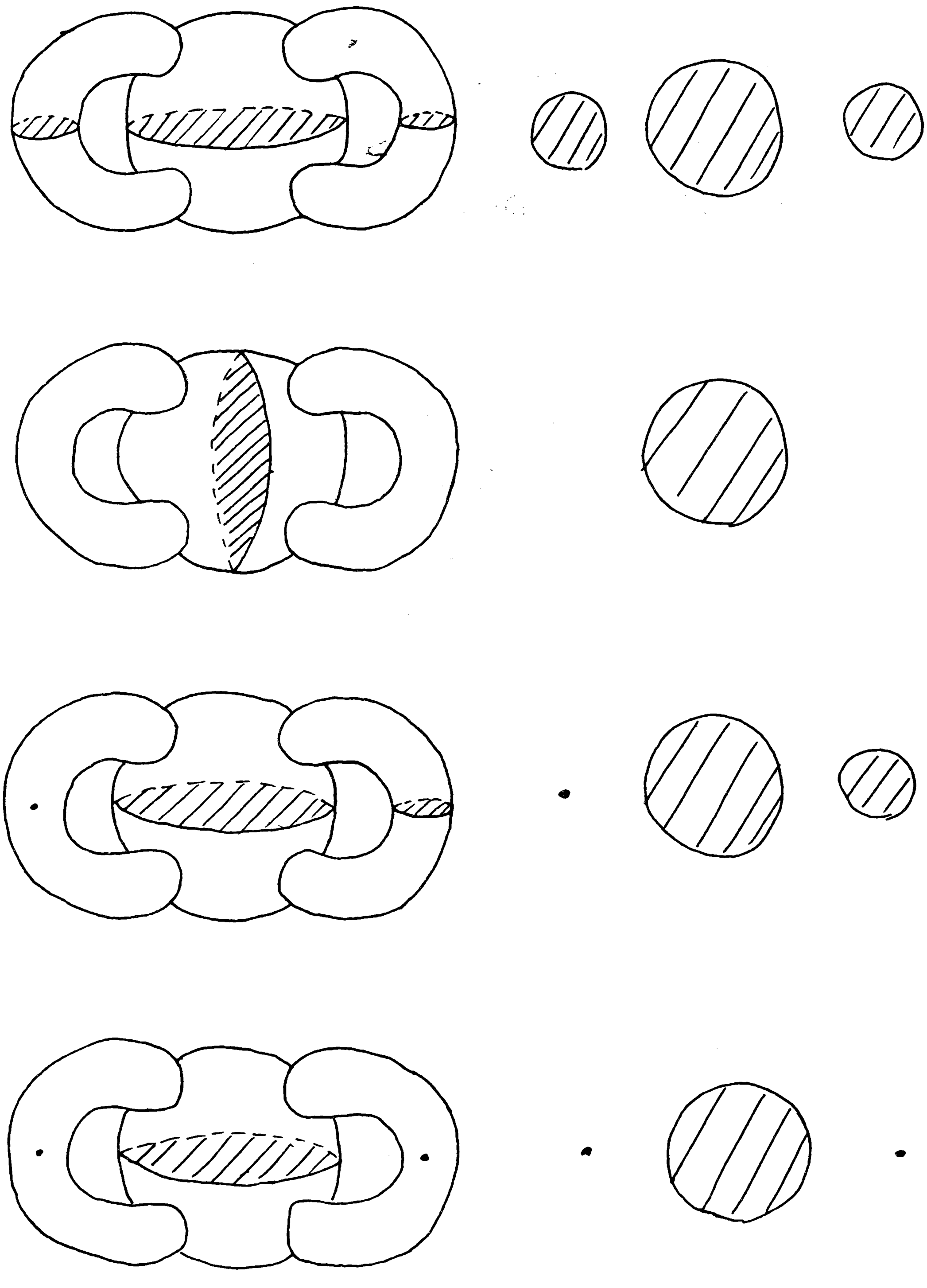
以下. 各 involution type の fixed point set と

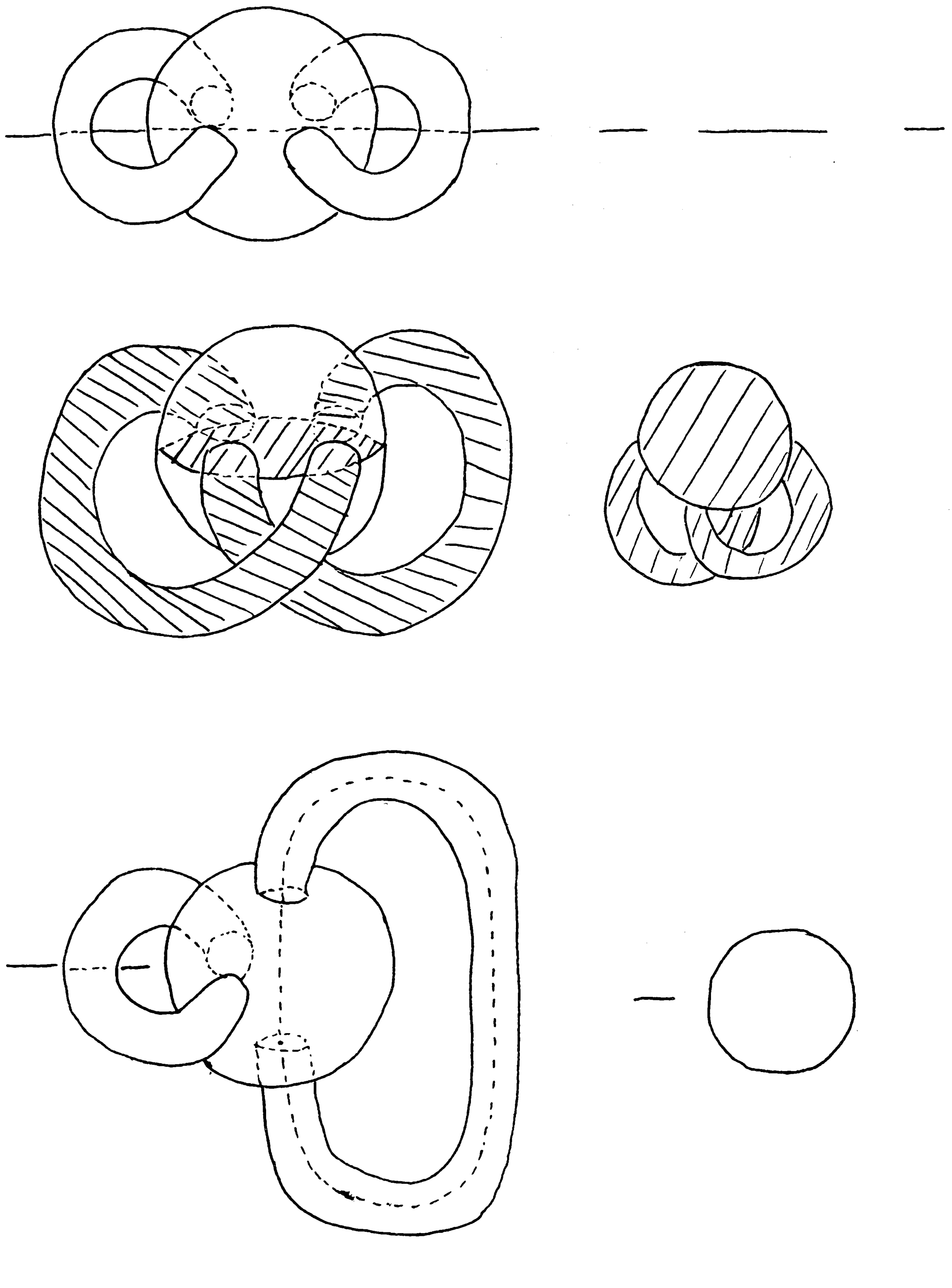
その embeddings を示す

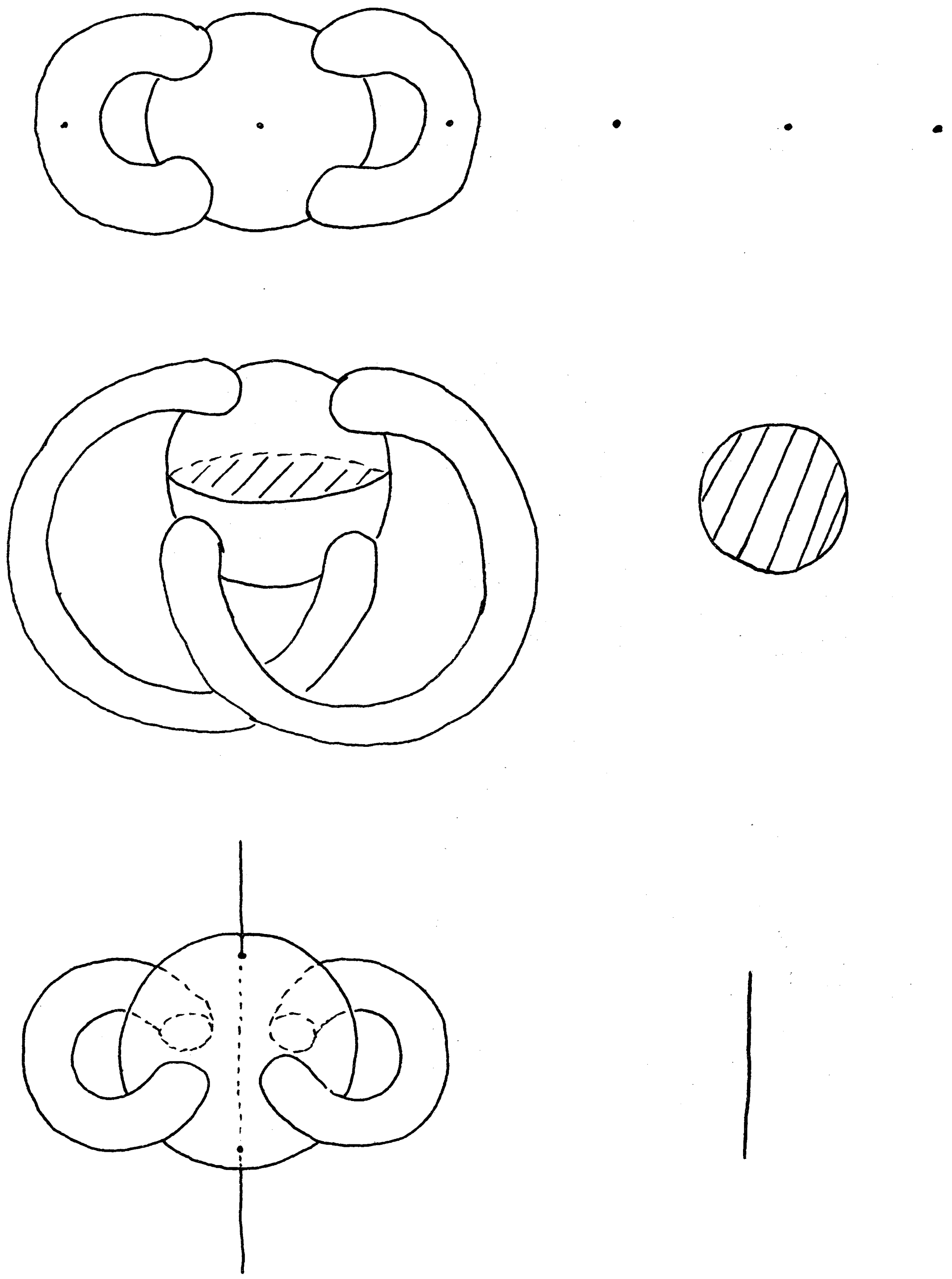
ball 上 及び handles 上の involution は

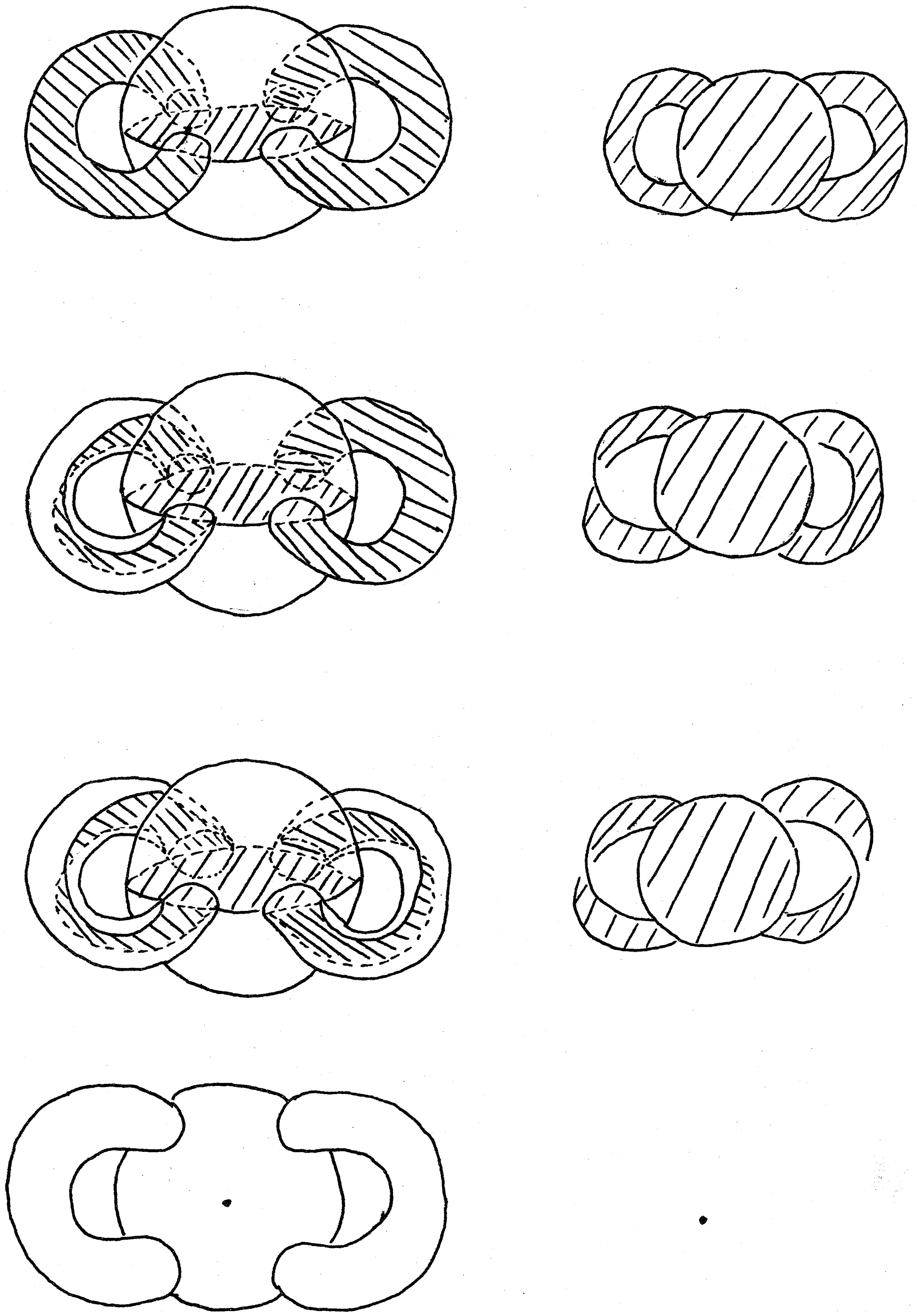
fixed point set に対する対称変換と equivalent

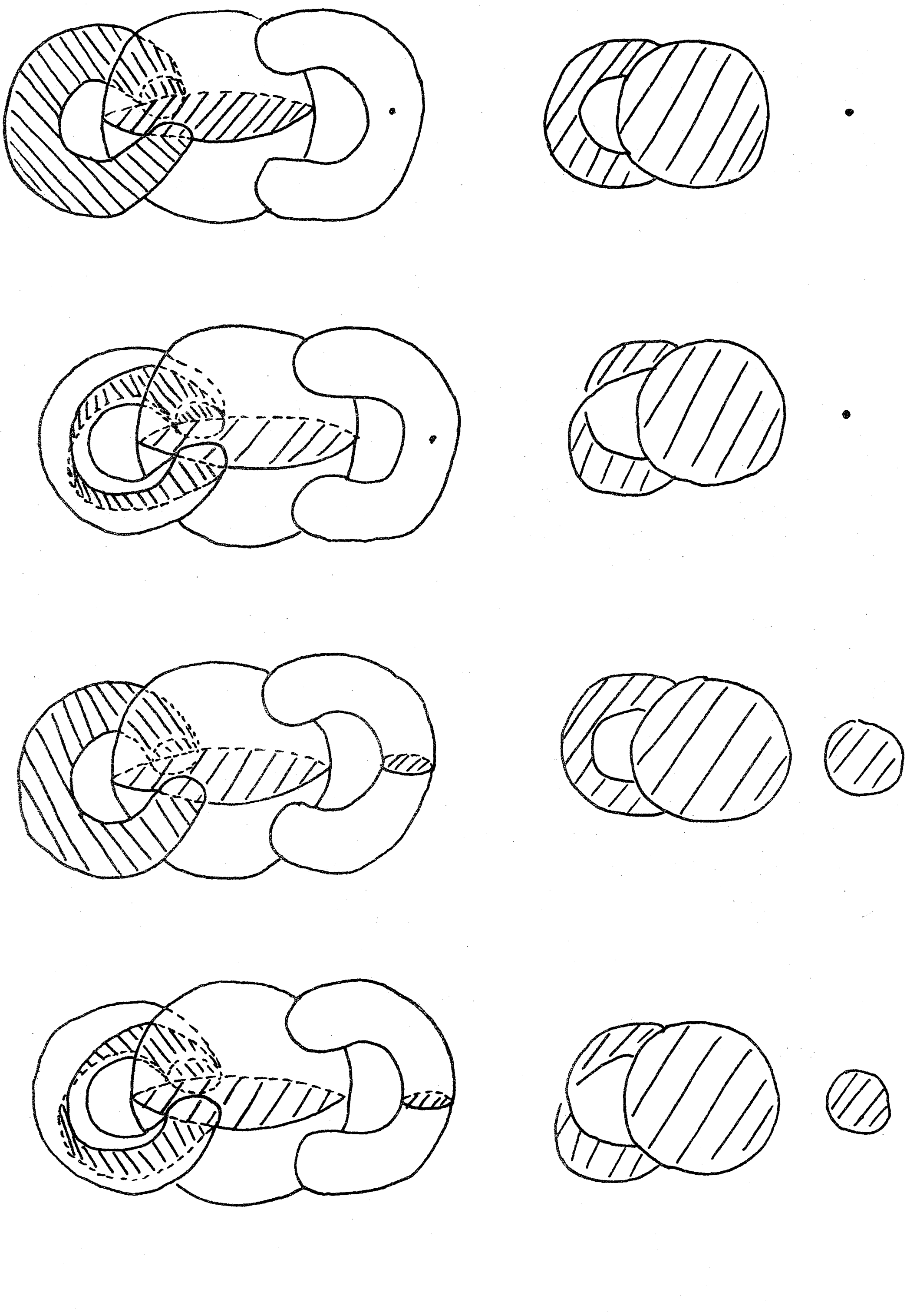
4











References

[1] Eilenberg, S. : Sur les transformations périodiques de la surface de sphère. Fund. Math., XXII (1934), 28-41.

[2] Smith, P.A. : Fixed points of periodic transformations. Appendix B in Lefschetz, Algebraic Topology, New York, (1942), 350-373.

[3] Livesay, G.R. : Fixed point free involutions on the 3-sphere. Ann. of Math., 72 (1960), 603-611

[4] Hirsch, M.W. & Smale, S. On Involutions of the 3-Spheres. Amer. J. Math., 81 (1959), 893-900

[5] Livesay, G.R. Involutions with two fixed points on the three-Sphere. Ann. of Math., 78 (1963), 582-593.

[6] Waldhausen, F. Über Involutionen der 3-Sphäre

Top., 8(1959), 81-91.

[7] Montgomery, D. & Samelson, H.
A theorem on fixed points of involutions in S^3,
Canad. J. Math., 7(1955), 208-220.