数理解析研究所講究録
第346巻 1979年 11-16

Reidemeister と Singer の定理の一般化とその応用

イリノイ大　　永瀬 輝男

1930年代にReidemeisterとSingerは，次の様な3次元多様体に関する基本定理を得た．

<u>定理</u>：　3次元閉多様体上の任意の2つのHeegaard分解は，互いにstablyに同値である．

このノートでは，involutionという立場から，上の定理を一般化出来ることを示し，その系として，3次元ホモロジー球面上の向きを保存するinvolutionに対し，signatureを定義出来ることを示す．その為に，いくつかの定義をする．以下に於て，$Cl(\cdots)$とは$(\cdots)$の閉包を示し，$F(f)$は，写像fの不動点の集合を表わす．

$f: M^m \to M^m$をm次元多様体上のinvolutionとする．Nが$(m-1)$次元のMの部分多様体で，次の条件を満すとき，Nは<u>特性部分多様体</u>と呼ばれる：Mの2つの部分多様体UとVが存在して，
$U \cup V = M$,　$U \cap V = \partial U = \partial V = N$，かつ$f(U) = V$．

特に，$m=3$ で，U と V が共にハンドルボディーである時，$(M; U, V, f)$ を M の特性Heegaard分解と呼ぶ．

$f, g: M^3 \longrightarrow M^3$ を M 上のinvolutionとし，$(M; U, V, f)$ と $(M; X, Y, g)$ を M の特性Heegaard分解とする．$(M; U, V, f)$ と $(M; X, Y, g)$ が基本ss同値であるとは，次の3種類の操作で，一方から他方に移行出来ることである．

(1)　M から M の上への同相写像 h が存在して，$g = h \circ f \circ h^{-1}$ かつ $h(U) = X$．

(2)　$f = g$ であり，U の中に次の様なdisk D が存在する：$\partial U \cap \mathrm{Int}\, D = \phi$，かつ $P = \mathrm{Cl}(\partial D - \partial U)$ は U に於てproperな曲線であり，$P \cap f(P) = \phi$．さらに，P の U 内の正則近傍 N で，次の条件を満すものがある：$N \cap f(N) = \phi$，かつ $X = \mathrm{Cl}(U - N) \cup f(N)$．

(3)　$f = g$ であり，M の中に次の条件を満す2つのdisk D_1 と D_2 が存在する：$D_1 \subset V$，$D_2 \subset U$，$D_1 \cap F(f) = \phi$，かつ $\partial D_1 \cap \partial D_2$ は ∂U の上でたゞ1つの交叉点より成る．さらに D_1 の正則近傍 N で，次の条件を満すものがある：$N \cap f(N) = \phi$，かつ $X = \mathrm{Cl}(U - f(N)) \cup N$．

(注)　(3)に於ての D_2 の役割は，変形結果が再び，Heegaard分解であることの保証の為のものです．

2つの特性Heegaard分解がss同値であるとは，上の基本

ss 同値の列で,一方から他方に移行出来ることである. すると,次の様な定理を証明出来る.

<u>定理1</u>: Mを向き付けられた3次元閉多様体とする. fとgをM上の向きを保存するinvolutionとする. このとき,2つの特性Heegaard 分解$(M;U,V,f)$と$(M;X,Y,g)$が ss 同値である為の必要十分条件は次の条件を満すことである: M上の同相写像hが存在して,$h(\partial U)\cap\partial X$が$F(g)$の$\partial X$上でのある開近傍を含むことである. 特に,$f$と$g$が conjugate な不動点を持たない involution であるならば,$(M;U,V,f)$と$(M;X,Y,g)$は, ss 同値である.

Mが連結でない時,MのHeegaard分解を,Mの各連結成分上のHeegaard 分解の和とすることにするならば,不動点を持たないinvolutionに対して,定理1は次の様に拡張される.

<u>系</u>: Mを3次元閉多様体とする(連結でないかも知れないし,向き付け不可能かも知れない). fとgをM上の不動点を持たない conjugate な involution とし, $(M;U,V,f)$と$(M;X,Y,g)$を広義の特性Heegaard 分解とする. すると,2つの特性Heegaard 分解は, ss 同値である.

Mを3次元閉多様体で,M'をMの copy とし, $h:M\longrightarrow M'$を同

相写像とする. 写像 $f: M \cup M' \longrightarrow M \cup M'$ を次の様に定義する:

$$f(x) = \begin{cases} h(x) & \text{もし } x \in M \\ h^{-1}(x) & \text{もし } x \in M'. \end{cases}$$

すると, f は $M \cup M'$ 上の不動点を持たない involution である. $(M; U, V)$ を M の Heegaard 分解とする. すると, $(M \cup M'; U \cup h(V), V \cup h(U), f)$ は, $M \cup M'$ 上の広義の特性 Heegaard 分解である.

上の考察によって, 上の定理は本来の Reidemeister と Singer の定理の一般化になることが次様にして証明出来る. $(M; U, V)$ と $(M; U', V')$ を M の Heegaard 分解とする. すると, 定理の系より, $(M \cup M'; U \cup h(V), V \cup h(U), f)$ と $(M \cup M'; U' \cup h(V'), V' \cup h(U'), f)$ は ss 同値である. この ss 同値の変形を M 上に制限すれば, M 上で与えられた2つの Heegaard 分解の stable 同値を与える.

Browder と Livesay は, $\mathbb{Z}$-ホモロジー球面 M 上の不動点を持たない involution に対して, signature 不変量を特性部分多様体 N を用いて, 次の様に定義した: U を M の部分多様体で, $\partial U = N$ となるものとする. $G = \mathrm{Ker}(i_* : H_1(N) \to H_1(U))$ とする, ここで, $i : N \hookrightarrow U$ は包含写像とする. $\varphi : G \times G \longrightarrow \mathbb{Z}$ を次の様に定める: $\varphi(x, y) = x \cdot f'_*(y)$, ここで・は交叉数

を示し，$f'=f|N$ である．すると，φ は２次形式であり，この φ の signature を f の signature と呼ぶ．

しかし，この Browder と Livesay の定義は，不動点を持つ様な involution に対しては成立しない．即ち，特性部分多様体の選び方によって，値が異なる．しかし，各特性部分多様体に対して，Browder と Livesay による方法で signature を定義することは出来る．各特性 Heegaard 分解 $(M;U,V,f)$ に対し，∂U によって決まる f の signature を $\sigma(M;U,V,f)$ で示すことにする．

M を向き付けられた３次元閉多様体で，$g:M\longrightarrow M$ を M 上の向きを保存する involution で，$F(g)=\sum_{i=1}^{n}S(i)$ となるものとする，ここで $S(i)\cong S^1$．H と G を M の特性部分多様体で，$F(g)$ を含むものとする．このとき，H の G に対するねじれを次の様に定義する：　$T(i)$ を M における $S(i)$ の正則近傍で，$T(i)\cap H$ と $T(i)\cap G$ が共に proper な円管であるものとする．$L(i,H)$ を $T(i)\cap H$ の１つの境界とし，$L(i,G)$ を $T(i)\cap G$ の１つの境界とする．$L(i,H)$ と $L(i,G)$ は共に S^1 に同相である．$T(i)$ は M から導びかれた向きを持ち，$\partial T(i)$ は，$T(i)$ より導びかれた向きを持つ．すると，$\partial T(i)$ 上に向き付けられた円 $L(i)$ と，$L(i,H)$ と $L(i,G)$ の向きで，$[L(i)]\cdot[L(i,H)]=[L(i)]\cdot[L(i,G)]=+1$ となるものが存在する．ここで $[(\cdots)]$ は向き付けられた $(\cdots)$ のホモロ

ジー類を示し，・は$\partial T(i)$上での交叉数(intersection number)を示す. $m(i)=[L(i,H)]\cdot[L(i,G)]$ とするとき，n個の数字の組$(m(1),\cdots,m(n))$をHのGに対するねじれと呼び，$tw(H;G)$で表わす. $\tau(H;G)=\sum_{i=1}^{n} m(i)$ とする.

定理2: Mを向き付けられた$\mathbb{Z}$-ホモロジー3次元球面とする. fをM上の向きを保存するinvolutionで，不動点を持つものとする. すると，

$$\sigma(M;X,Y,f)=\sigma(M;U,V,f)+\tau(\partial X;\partial U).$$

$\mathcal{H}(M,f)$をMの特性Heegaard分解$(M;U,V,f)$の中で，$\partial U-F(f)$が2つの連結成分よりなる様なものの全体とする. すると，Mが$\mathbb{Z}$-ホモロジー3次元球面の時は，$\mathcal{H}(M,f)\neq\phi$であり，$\mathcal{H}(M,f)$の任意の2つの元は，定理2より同一のsignatureを持つ. この値をfのsignatureと定義出来る.