

可縮3次元多様体についての  
いくつかの注意

東大 教養 松本 幸夫  
Complutense大 J.M. Montesinos

1. この稿では次の問題に関連したいくつかの注意を述べる。考えるカテゴリーはPLカテゴリーである。

問題.  $D^r$ を $r$ 次元球体とし,  $\Delta^3$ を可縮3次元多様体とする.  
積多様体  $\Delta^3 \times D^2$ は5次元球体  $D^5$ とPL同相であるか。

3次元Poincaré予想が肯定的ならば, もちろんこの問題も肯定的であり,  $\Delta^3 \times D^2$ は $D^5$ とPL同相である.  $\Delta^3 \times D^1$ が $D^4$ とPL同相か, という問題は(Schöenfliesにより)もとのPoincaré予想と同値であり, また高次元Poincaré予想が解決されていることから,  $\Delta^3 \times D^r$  ( $r \geq 3$ )は $D^{3+r}$ とPL同相である事が証明される. したがって $r=2$ に相当する上の問題は, 残っている唯一の"弱い形のPoincaré予想"である.

"系"1. もし上の問題が肯定的ならば, どんな  $\Delta^3$ も  $S^4$ の中のあるファイバー結び目のファイバーとして埋め込む事ができる。

次の予想は有名である。

Unknotting 予想.  $S^4$ に埋め込まれた  $S^2$ の補集合が  $S^1$ と同じホモトピー型をもてば,  $S^2$ は  $S^4$ の中で3次元球体  $D^3$ を張る.

$\Sigma^3$ によって3次元ホモトピー球面を表わす.

"系2. もしはじめに述べた問題と Unknotting 予想のどちらも肯定的ならば i)  $\Sigma^3 \times S^1$  は  $S^3 \times S^1$ に PL 同相である.  
ii) また  $\Sigma^3$  は  $S^3$ に PL 同境である. とくに  $\Sigma^3$ の  $\mu$ -不変量は0(ゼロ)である.

## 2. Connor, Haken, Poenaru の定理

この節では §1 の問題と次の定理の関連を考える.

定理 (Connor, Haken [1], Poenaru [3]) 任意の3次元ホモトピー球面  $\Sigma^3$ は次の性質  $(\alpha), (\beta), (\delta)$ を満たす "Heegaard 分解"を持つ.  $\Sigma^3 = V^3 \cup W^3$ , ここに  $V^3, W^3$ は種数  $2n$ の把手体であり,  $V^3 \cap W^3 = \partial V^3 = \partial W^3$ , また  $V^3$ には円板(2次元)  $A_i^2, B_i^2$ が, また  $W^3$ には円板  $X_i^2, Y_i^2$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) が埋め込まれている.

$\alpha$ )  $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$  はどの2つも交わらず,  $V^3 - (A_1 \cup \dots \cup A_n \cup B_1 \cup \dots \cup B_n)$  は3次元開球体である.

$\beta$ )  $X_i \cap Y_i$  は一本の弧  $Z_i$  であって,  $\partial Z_i = \partial X_i \cap \partial Y_i$ ,  $X_i \cap Y_j = X_i \cap X_j = Y_i \cap Y_j = \phi$  ( $i \neq j$ ). そして  $W^3 - (X_1 \cup$

$\dots \cup X_n \cup Y_1 \cup \dots \cup Y_n$ ) はいくつかの南半球体よりなる.

$\delta$ )  $\partial X_i$  と  $\partial A_k, \partial B_k$  ( $k=1, \dots, n$ ) の交わりを円順列的に縮約した読み (cyclically reduced reading) は  $\partial A_i$  との交わりに対応した  $a_i$  であり,  $\partial Y_i$  と  $\partial A_k, \partial B_k$  ( $k=1, \dots, n$ ) の交わりを円順列的に縮約した読みは,  $\partial B_i$  との交わりに対応した  $b_i$  である.

注意:  $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$  は  $H_2(W, \partial W; \mathbb{Z})$  の基底をなす.

上の定理に述べられたような分解を簡単に CHP-分解 と呼ぶことにしよう. CHP-分解は  $\Sigma^3$  のハンドル分解を与え, しかもこのハンドル分解は下の補題で述べるようにかなり特殊な性質を持つ. そしてその性質は, はじめに述べた問題を考える際に有用である (かの) ように見える.

$V^3$  のハンドル分解  $V^3 = H^0 \cup H^1(A_1) \cup \dots \cup H^1(A_n) \cup H^1(B_1) \cup \dots \cup H^1(B_n)$  を考えよう. ここに  $H^1(A_i)$  のバルト球面 (= ハンドルの双対心棒の境界) は  $\partial A_i$  であり,  $H^1(B_i)$  のバルト球面は  $\partial B_i$  である. 弧  $Z_i$  の  $W$  における正則近傍を  $H^1(Z_i)$  とし,  $T_{i1}, T_{i2}$  を  $X_i - H^1(Z_i)$  の閉包の連結成分,  $T_{i3}, T_{i4}$  を  $Y_i - H^1(Z_i)$  の閉包の連結成分とする.  $H^2(T_{ij})$  を  $T_{ij}$  の,  $W - (H^1(Z_1) \cup \dots \cup H^1(Z_n))$  の閉包における正則近傍とする. そうすると,  $\Sigma^3$  の次のようなハンドル分解を得る.

$$\Sigma^3 = H^0 \cup \bigcup_{i=1}^n H^1(A_i) \cup \bigcup_{i=1}^n H^1(B_i) \cup \bigcup_{i=1}^n H^1(Z_i) \cup \bigcup_{i=1, j=1}^n H^2(T_{ij}) \cup \bigcup_{i=1}^{m+1} H^3(R_i)$$
 ここに  $H^3(R_i)$  は  $W - [\bigcup_{i=1}^n H^1(Z_i) \cup \bigcup_{i=1, j=1}^n H^2(T_{ij})]$  の連結成分  $(R_1, \dots, R_{m+1})$  の閉包である.

補題 1.  $W$  は円板  $T_1, T_2, \dots, T_{2n}$  の埋め込まれた種数  $2n$  の把手体とし次の3条件を満たすとする.

$\alpha)$   $T_i \cap T_{i+n}$  は弧  $Z_i$  であり,  $\partial T_i \cap \partial T_{i+n} = \partial Z_i$ ,  $T_i \cap T_j = \emptyset$  ( $j \neq i \pmod{n}$ ).

$\beta)$   $W - \bigcup_{i=1}^{2n} T_i$  は3次元南半球体よりなる.

$\gamma)$   $T_1, \dots, T_{2n}$  は  $H_2(W, \partial W; \mathbb{Z})$  の基底をなす.

そのとき, 各  $i=1, \dots, n$  において  $(T_i \cup T_{i+n}) - Z_i$  のただひとつの連結成分を選び, 3次元南半球体とこれらの円板との和集合が連結であるようにできる.

証明.  $n$  に関する数学的帰納法で証明する.  $n=0$  の時は明らかである.  $n-1$  まで証明されたものと仮定しよう. オイラー-標数を使った議論により,  $W - \bigcup_{i=1}^{2n} T_i$  は  $n+1$  個の3次元南半球体  $R_1, \dots, R_{n+1}$  からなることがわかる. 各  $R_i$  を "部屋" と呼ぶ.  $(T_i \cup T_{i+n}) - Z_i$  の各連結成分の閉包を "壁" と呼び, 弧  $Z_i$  を "柱" と呼ぼう. 証明することは, 各 "柱" に接する壁をひとつずつ全部で  $n$  個選び, それらと  $R_1, \dots, R_{n+1}$  の和集合が大きなひとつの部屋 (大部屋) となる事である. これを

示すために2つの主張を用意しよう.

主張1. 各々の柱  $Z_i$  は少くとも2つの相異なる部屋に接する.

主張1の証明. 添数  $i$  をひとつ固定して考える.  $T_i \cup T_{i+n}$  の  $W$  における正則近傍を  $X$  とする. もし  $W-X$  の閉包  $Y$  が連結でなければ主張1は明白であるから,  $Y$  は連結であると仮定しよう. マイヤ-ヴィエトリス完全列を使って  $H_1(W; \mathbb{Z})$  は  $H_1(Y; \mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}^3$  と同型である.  $\mathbb{Z}^3$  は,  $Z_i$  のまわりのどれかの壁を1回通りすぎるループ3つ  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  により生成され, もし,  $Z_i$  が唯一ひとつの部屋にしか接しなれば,  $\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3$  は  $S = \{T_1, T_2, \dots, \hat{T}_i, \dots, T_n, T_{n+1}, \dots, \hat{T}_{n+i}, \dots, T_{2n}\}$  のどの壁にも交わらない. ところが  $S$  は  $H_2(Y, \partial Y; \mathbb{Z}) \cong H_1(Y; \mathbb{Z})$  を生成し,  $\text{rank } H_1(Y; \mathbb{Z}) = 2n-3$  であるから  $S$  の元の向には自明でない線型の関係  $L$  がなりたつ. ループ  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  のどれも  $S$  のどの壁にも交わらなければ, この関係  $L$  は  $T_j$  達を  $H_2(W, \partial W; \mathbb{Z})$  の元と考えた時にもなりたたねばならないが, それは,  $S$  の元は  $H_2(W, \partial W; \mathbb{Z})$  の基底の一部をなす事に反する. よって,  $Z_i$  は相異なる2つ以上の部屋に接する.  $\square$

主張2.  $W - T_i \cup T_{i+n}$  の連結成分の個数が高々2であるような添数  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  が存在する.

主張2の証明. まず各  $T_i$  は  $W$  を分ける事がなから、 $W - T_i \cup T_{i+n}$  の連結成分の個数は高々3であることに注意しよう. もし主張2が正しくなければ  $W - T_i \cup T_{i+n}$  の連結成分の個数はどの  $i$  についても丁度3であるという事になる. これが矛盾である事を証明しよう. そのために次のようなグラフ  $G$  を考える: その頂点は2種類あって、部屋と1対1に対応する部屋頂点及び柱と1対1に対応する柱頂点に分たれる.  $i$  してある部屋と柱とが接する時、しかも  $i$  の時にかぎり対応する部屋頂点と柱頂点を一本の線分(辺)で結ぶことにする.  $W$  が連結であるから、グラフ  $G$  は連結である. 各々の柱に接する部屋数は高々4部屋であり、また  $W - T_i \cup T_{i+n}$  の連結成分の個数は3であるから少くとも3部屋が接している. したがって柱頂点は3本の辺が出ている3価の柱頂点と、4本の辺が出ている4価の柱頂点に分かれる. 3価の柱頂点の個数を  $t$ , 4価の柱頂点の数を  $q$ , 部屋頂点の数を  $r$  とする. 前にも述べたように、オイラー標数を使った議論によって  $r = n + 1$  がわかる. 明らかに  $t + q = n$  であるから、 $r = t + q + 1$  を得る.

さて、ある辺をグラフ  $G$  からとり除いてもグラフが連結なままであるとき、しかも  $i$  の時にかぎり  $i$  の辺を赤く塗る事にする. 3価の柱頂点および  $i$  くに接する3本の辺(の内部)

を  $G$  からとり除くと連結成分の個数は 3 になるのだから、3 個の柱頂点から赤い辺が出てくることはない。同様の議論によって 4 個の柱頂点からは丁度 2 本の赤い辺が出てくる事がわかる。  $C_1, \dots, C_s$  を "赤い部分グラフ" の連結成分とする。赤くない辺をとり除けば  $G$  の連結成分の個数は変わるが 1 次元バッチ数は明らかに変わらない。従って、  $b_1(G) = b_1(C) = \sum_{i=1}^s b_1(C_i)$  となる。ここに  $C = C_1 \cup \dots \cup C_s$ .

$C_i$  に含まれる 4 個の柱頂点は  $q_i$  個、部屋頂点は  $r_i$  個であるとすると、  $C_i$  には 3 個の柱頂点は含まれないのだから、頂点の総数  $= q_i + r_i$ 。また(赤い)辺の総数 ( $C_i$  に含まれるものの) は  $2q_i$ 。ゆえに  $\chi$  をオイラー標数として  $b_1(C_i) = 1 - \chi(C_i) = 1 - q_i - r_i + 2q_i = 1 + q_i - r_i$ 。この式から  $C_i \neq \phi$  なら  $b_1(C_i) \leq q_i$  を知る。  $q = \sum_{i=1}^s q_i$  ゆえ  $b_1(G) = \sum_{i=1}^s b_1(C_i) \leq \sum_{i=1}^s q_i = q$  がなりたつ。もし  $C = \phi$  なら全ての辺が"赤くない"から、  $G$  は木であり、  $b_1(G) = 0$ 。よってこの場合も不等式  $b_1(G) \leq q$  がなりたつ。  $G$  は連結ゆえ、  $b_1(G) = 1 - \chi(G) = 1 - ((t+q+1) + t+q - 3t - 4q) = t + 2q \leq q$ 。ゆえ  $t = q = 0$ 、  $n = t + q = 0$  となって矛盾に導かれた。主張 2 の証明終り。  $\square$

補題 1 の証明を続けよう。主張 2 で存在の保証された添数  $i \in \{1, \dots, n\}$  を選ぶ。  $W - T_i \cup T_{i+n}$  の連結成分の個数は高

々2である. もし  $W - T_i \cup T_{i+n}$  が連結なら, 主張1によって  $Z_i$  のまわりの相異なる部屋が共通の壁によって隣あっていることになる. この壁を  $w$  としよう.  $W - T_i \cup T_{i+n}$  が連結でなければ相異なる連結成分に属する2つの部屋が共通の壁で隣あっている. この場合もこの壁を  $w$  としよう. いずれの場合も,  $(T_i \cup T_{i+n} - w)$  の  $W$  における正則近傍を  $U$  とし,  $W - U$  の閉包を  $W'$  とすれば,  $W'$  は種数  $2(n-1)$  の把手体であり,  $\{T_1, \dots, \hat{T}_i, \dots, T_n, T_{n+1}, \dots, \hat{T}_{n+i}, \dots, T_{2n}\}$  が補題の条件  $\alpha), \beta)$  を満たす. よって各  $Z_j$  ( $j \in \{1, \dots, n\} - \{i\}$ ) のまわりで壁  $w_j$  を選んで  $W' - \{T_1, \dots, \hat{T}_i, \dots, T_n, T_{n+1}, \dots, \hat{T}_{n+i}, \dots, T_{2n}\}$  の3次元南半球体(達)と  $\{W_j\}_{j \in \{1, \dots, n\} - \{i\}}$  の和集合が連結であるようにできる(帰納法の仮定).  $\{W_j\} \cup \{w\}$  が求める壁である. 補題1の証明終り.  $\square$

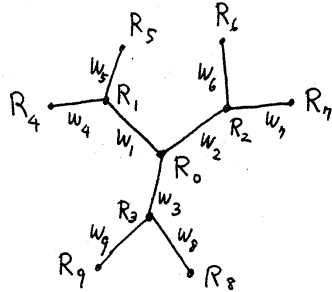
主張2と数学的帰納法から実は次の補題も証明されている.

**補題2.** 任意の  $i \in \{1, \dots, n\}$  について,  $W - T_i \cup T_{i+n}$  の連結成分の個数は高々2である.

この節(§2)のはじめに述べた  $\Sigma^3$  のハンドル分解の言葉で補題1の結果を言いかえてみよう. そのため  $(n+1)$  個の部屋を頂点とし, 補題1で選ばれた  $n$  個の壁を辺とするグラフを描けば, 補題1より, このグラフは連結であって, オイラー標数 (= 1) より木であることがわかる. よって勝手に基点



となる部屋  $R_0$  を選び、あとは下図にならって番号づける。



$w_i$  を 2-ハンドル  $H^2(w_i)$  の心棒と考え、 $R_i$  を 3-ハンドル  $H^3(R_i)$  の心棒と考える。すると

補題 1 の系、 $\Delta^3 = \Sigma^3 - H^3(R_0)$  のハンドル分解において、 $H^2(w_1)$  は  $H^3(R_1)$  と消し合い、そのあと  $H^2(w_2)$  は  $H^3(R_2)$  と消し合い、以下同様である。

### 3. 4次元への移行.

前節の  $\Sigma^3$  のハンドル分解から導びかれた  $\Delta^3$  のハンドル分解において、 $H^1(Z_i)$  の双対心棒となる 2次元円板を  $C_i$  としよう。 $\partial C_i$  と  $T_{ij}$  とは 1点  $P_{ij}$  で交わる。さて  $\Delta^3$  のハンドル分解は  $\Delta^3 \times [0, 1]$  のハンドル分解を導びく。新しい 4次元のハンドルの記号としては対応する 3次元のハンドルの記号  $H^1(A_i)$ ,  $H^1(B_i)$ ,  $H^1(Z_i)$ ,  $H^2(T_{ij})$ , etc. を流用しよう。例えば新しい  $H^1(Z_i)$  の双対心棒は  $\tilde{C}_i = C_i \times [0, 1]$  である。 $\partial \tilde{C}_i$  は  $\partial C_i$  により 2等分 (北半球と南半球) される。それぞれの半球の中に一本ずつ弧  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  をとって、 $\alpha_i$  は  $P_{i1}$  と  $P_{i2}$ ,  $\beta_i$  は

$P_{i_3}$  と  $P_{i_4}$  を結ぶようにする.  $H^2(T_{i_1})$  を  $\alpha_i$  に沿って滑らせ  $H^2(T_{i_2})$  の上を越せせる. 得られた 2-ハンドル  $H^2(T_{i_1}) + H^2(T_{i_2})$  の  $\tilde{A}_i (= A_i \times [0, 1])$ ,  $\tilde{B}_i (= B_i \times [0, 1])$ ,  $\tilde{C}_i$  に関する (円順列的に縮約された) 読みは CHP-定理により  $a_i$  (場合によっては  $b_i$ ) である. また  $H^2(T_{i_3})$  を  $\beta_i$  に滑って  $H^2(T_{i_4})$  の上を越えるように滑らせて得られる 2-ハンドル  $H^2(T_{i_3}) + H^2(T_{i_4})$  の読みは CHP-定理により  $b_i$  (場合によっては  $a_i$ ) である. 必要ならば  $T_{i_1}, T_{i_2}, T_{i_3}, T_{i_4}$  の順序を変えて, §2 で選んだ壁  $\omega_i$  が  $T_{i_4}$  に相当するようにしよう. もし  $H^2(T_{i_4})$  と  $H^3(R_i)$  との関係が, 上のハンドルの加法の後にも, 補題 1 で記述されるような良い関係であり続けられれば, 一番はじめに述べた問題は肯定的に解ける. しかし実際には, その関係は下の定理で記述されるように変わってしまう. それがはじめの問題の困難さの本質的な点であると思われる.

しかし上の加法によって 1-ハンドルと 2-ハンドルの相対的位置関係は (少なくとも代数的には) うまくアレンジされたことになる. すなわち  $\Delta^3 \times [0, 1]$  はひとつの 0-ハンドルと, 1-ハンドル  $H^1(A_i), H^1(B_i), H^1(Z_i)$  ( $i=1, \dots, m$ ), 2-ハンドル  $H^2(T_{i_1}) + H^2(T_{i_2}), H^2(T_{i_2}), H^2(T_{i_3}) + H^2(T_{i_4}), H^2(T_{i_4})$  ( $i=1, \dots, m$ ) 及び 3-ハンドル  $H^3(R_i)$  ( $i=1, \dots, m$ ) をもっていて,  $H^2(T_{i_1}) + H^2(T_{i_2})$  は  $H^1(A_i)$  (又は  $H^1(B_i)$ ) と代数的に消し合い,  $H^2(T_{i_2})$

は  $H^1(Z_i)$  と消し合ひ、 $H^2(T_{i3}) + H^2(T_{i4})$  は  $H^1(B_i)$  (又は  $H^1(A_i)$ ) と代数的に消し合ひ。定理にまとめよう。(定理の ii) は証明略)

定理  $\Delta^3 \times [0, 1]$  は次のようなハンドル分解を持つ:

$$\Delta^3 \times [0, 1] = H_0 \cup 3nH^1 \cup 3nH^2 \cup nH^2(w) \cup nH^3(R).$$

ここに i)  $H_i^2 \in 3nH^2$  は  $H_i^1 \in 3nH^1$  と代数的に消し合ひ。

ii)  $H^2(w_i)$  の双対心棒の境界は  $nH^3(R)$  の心棒の境界と。

次の公式に従って交わる:  $w_i = R_i K_i^{-1} L_i M_i^{-1}$ , ここに  $R_i, K_i, L_i, M_i$  は柱  $Z_i$  のまわりの部屋で,  $w_i$  (壁) との位置関係は次の図式で与えられるものとする。

$$\begin{array}{c|c} M_i & R_i \\ \hline L_i & K_i \end{array} w_i$$

3次元多様体の中の  $S^1$  のホモトピー-類とイソトピー-類とは異なるという良く知られた困難 (Cf. Mazur [2]) により、4次元ではこれ以上幾何学的結論は下せない。

#### 4. 5次元への移行.

5次元の把手体では、もしある 2-ハンドルがある 1-ハンドルと代数的に消し合っていったら、それらは幾何的にも消し合ひ。従って前節最後の定理から導びかれた  $\Delta^3 \times [0, 1]^2$  のハンドル分解において  $3n$  個の 1-ハンドルは全て、 $3n$  個の 2-ハンドルと消し合ひとしてよい。しかし 2, 3-ハンドルが  $n$  個ずつ残ってしまう。我々はこれ等を処理する方法を知

らなり。ただ、この残された  $n$  個の 3-ハンドルが、やはり残された  $n$  個の 2-ハンドルにどのような代数的関係で付いているかという事は定理の ii) で記述され、それは結局、柱  $Z_i$  のまわりの部屋的位置関係で決まる。この点で次の補題は有用かも知れない。

補題 3. 補題 1 の条件の下に、各柱  $Z_i$  のまわりには次の 4 つの状況のうちどれかひとつが現われる。(同じ記号は同じ部屋を表わす)

$$\text{i) } \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & B \end{array} \quad \text{ii) } \begin{array}{c|c} A & A \\ \hline B & C \end{array} \quad \text{iii) } \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & A \end{array} \quad \text{iv) } \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}$$

証明の方針. 補題 1 の証明中の主張 1 により  $\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & A \end{array}$  は現われな。  $\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline B & B \end{array}$  は把手体  $W$  の  $\mathbb{Z}$ -係数 Poincaré 双対定理に矛盾し、現われな。  $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & A \end{array}$  は  $W$  の  $\mathbb{Z}/2$ -係数の双対定理に矛盾し、やはり現われな。こうして上の 4 つの場合が残される。

上のような現われる図式の制約は柱の対、 $\equiv$  対にも拡張されるかも知れない。

## 文献

- [1]. W. Haken: Various aspects of the three-dimensional Poincaré problem, *Topology of Manifolds*, p140-151 (1969).
- [2]. B. Mazur: A note on some contractible 4-mfd, *Ann.* (1961)
- [3]. V. Poenaru: Sur la structure des sphères d'homotopie lisses en dimension 3, (I), (II). *Publ. Math. d'Orsay*.