数理解析研究所講究録
第 347 巻 1979 年 9-18

余次元1実解析的葉層構造のトポロジー

東大 理 稲葉尚志

§1 序.

簡単の為に、全てをorientable categoryの中で考えることにする。またfoliationといえば全て余次元1のfoliationのことを指す。

さて、C^ω級foliationは、ふつうのC^∞級foliationにくらべるとさまざまな特徴的性質を備えているが、その中で我々の注目したいのは次の三つである。

C^ω1) null homotopicなclosed transverse curveをもたない。

C^ω2) leafの両側でのholonomy的挙動が同じである。

C^ω3) flat leafのholonomy群は自明である。

本稿では、これら3つの性質を使って、C^ω級foliationの構造とunderlying manifoldのtopologicalな性質との間の関係を調べる。

この分野の創始者はA. Haefligerであり、彼はC^ω1)を証明し

た。その後20年間近く進展がなかったが、最近J. Plante - W. Thurston [7], S. Goodman [1], C. Lamoureux [4] 等によって新結果が出された。本稿で述べるのは、それらの拡張であるから、彼等の論文が最も重要な参考文献となろう。

§2. 定理の statement

有限生成群 G が non-exponential growth をもつとは、G の有限生成集合 S に関する(語の)長さ関数 $l_S : G \longrightarrow \mathbb{Z}^+$ に対し、growth function $g_S : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}^+$ を $g_S(n) =$ cardinality of $\{x \in G \mid l_S(x) \leqq n\}$ で定義したとき、$\forall A > 0$, $\forall a > 1$ に対し、ある n が存在して $g_S(n) < Aa^n$ となるときにいう。

定理1. M を閉 C^∞ 多様体で $\pi_1(M)$ が non-exponential growth をもち、$H^1(M; \mathbb{R}) = 0$ であるものとするならば、M 上には、C^ω 級 foliation は存在し得ない。

定理2. M を3次元の閉 C^∞ 多様体で $\pi_1(M)$ が non-exponential growth をもつものとする。このとき、

i) M 上に C^ω 級 foliation が存在すれば、M は $S^1 \times S^2$ か、S^1 上の T^2 bundle (の total space) かである。

ii) i) の foliation が non-proper leaf をもっていれば、M は T^2 上

の S^1 bundle か M_{-1} である。(但し $M_{-1} \equiv T^2 \times I/\sim$, $(x,0)\sim(-x,1)$ for ${}^\forall x \in T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$)

iii) M 上に C^ω 級 foliation が存在すれば、その任意の leaf の holonomy 群は、rank 2 以下の free abel 群になる。更に、実際に rank 2 の holonomy 群をもつ leaf があれば、M は T^3 か M_{-1} でなければならない。

<u>定理3</u>. M を閉 C^∞ 多様体で $\pi_1(M)$ が abelian なるものとする。$\mathcal{F}$ を M 上の C^ω 級 foliation、L を $\mathcal{F}$ の leaf とする。

i) L が closed transverse curve と交わるならば、corank $i^L_* \geqq 1$.

ii) L の閉包が L 以外の non-compact leaf を含むならば、corank $i^L_* \geqq 2$.

但し、$i^L : L \longrightarrow M$ は inclusion, corank i^L_* は、$i^L_* : H_1(L;\mathbb{R}) \rightarrow H_1(M;\mathbb{R})$ の cokernel の rank のことである。

§3. 定理1の証明の概略

M を定理1の仮定を満たす多様体とする。M 上に C^ω foliation $\mathcal{F}$ が存在したとして矛盾を導く。

<u>補題3.1</u>. $\mathcal{F}$ は1枚以上有限枚の compact leaf をもつ。

<u>証明</u>. 無限枚あれば、non-isolated compact leaf が存在するが、それは flat leaf であるから C^ω 3) と Reeb の大域安定性定理により

$H^1(M;\mathbb{R})\neq 0$となり矛盾。1枚もなければC^ω1)とPlante, Tischler等の結果から再び$H^1(M;\mathbb{R})\neq 0$となって矛盾する。Q.E.D.

Mから全てのcompact leavesを抜き去ったときの連結成分を、$V_1, V_2, \cdots, V_p$とする。$\pi_1(M)$がnon-exponential growthであることと、Plante[5]を使えば、各V_i上にholonomy invariant measure μ_iが存在することがわかる。更にμ_i達は、$H^1(\overline{V_i};\mathbb{R})$のnon-zero elements Φ_iを定める。$(i=1,2,\cdots,p)$

<u>補題3.2.</u> $\overline{V_i}\cap\overline{V_j}\neq\phi$ $(i\neq j)$のとき、$\Phi_i|_{\overline{V_i}\cap\overline{V_j}}$と$\Phi_j|_{\overline{V_i}\cap\overline{V_j}}$は$H^1(\overline{V_i}\cap\overline{V_j};\mathbb{R})$の中で一次従属である。

<u>証明.</u> $\overline{V_i}\cap\overline{V_j}$は一枚のcompact leafである。本質的にはC^ω2)により証明されるが、具体的には、そのcompact leafのholonomy群がabelianのときには、Plante-Thurstonに従い、non-abelianのときには、Hectorの結果[3]を用いて証明する。Q.E.D.

補題3.2.とMayor-Vietorisの完全系列によって、$H^1(M;\mathbb{R})\neq 0$となるから矛盾。よって全ての場合に矛盾を生じたから、定理が証明されたことになる。

注) Plante-Thurstonが、$\pi_1(M)$ exponential growthの場合には、$H^1(M;\mathbb{R})=0$でもC^ω級foliationが存在するようなMの例を挙げているので、定理1のこれ以上の一般化は望めない。

§4. 定理2の証明の概略

Mを、$\pi_1(M)$がnon-exponential growthをもつような、向き付け可能な閉3次元多様体とする。$\mathcal{F}$をその上のorientableなC^ω級foliationとする。

<u>補題4.1</u>. $\mathcal{F}$とconcordantなtransversely-C^ω foliation $\mathcal{F}'$で、Reeb componentを一個も持たないものが存在する。

<u>証明</u>. $\mathcal{F}$にReeb componentがあると、C^ω2)により、それをconcordanceの範囲内で、消し去ることができる(modification along the transverse simple closed curveの逆操作)。これを有限回行なうことにより、Reeb componentは全て消される。 Q.E.D.

<u>補題4.2</u>. $\mathcal{F}'$の各leafは、S^2かT^2か$\mathbb{R}^2$か$S^1\times\mathbb{R}$かである。

<u>証明</u>. $\mathcal{F}'$はReeb componentを持たないから、Novikovにより、各leaf $L\in\mathcal{F}'$に対し、$i^L_\#:\pi_1(L)\longrightarrow\pi_1(M)$はinjective。$\pi_1(M)$がnon-exponential growthであったから、$\pi_1(L)$もnon-exponential growthとなる。基本群がnon-exponential growthになるような2次元orientable多様体は上述の4つに限る。 Q.E.D.

<u>補題4.3</u>. $\mathcal{F}'$はalmost without holonomyである。

<u>証明</u>. 補題4.2.により、$S^1\times\mathbb{R}$とdiffeoなleafがholonomyを持たないことを示せばよいが、やや複雑なのでここでは省略する。 Q.E.D.

$\mathcal{F}'$がもしS^2をleafに持てばReebの大域安定性定理により、

$M=S^1\times S^2$となる。また全ての leaf が T^2 であれば、M は S^1 上の T^2 bundle になる。そこで以下 $\mathcal{F}'$ は compact leaves を高々有限枚しか持っていないと仮定する。M から compact leaves を全て抜き去った後の連結成分を $V_1, V_2, \cdots, V_p$ とすると、これらは境界つき多様体の内部である。これらに境界をつけ足したものを $\hat{V}_1, \hat{V}_2, \cdots, \hat{V}_p$ と書く。各 $\hat{V}_i$ の内部の leaves は全て $\mathbb{R}^2$ であるか全て $S^1\times\mathbb{R}$ である。このような foliations は、Rosenberg-Roussarie, Chatelet-Rosenberg, Hector によって、位相共役を除いて完全に分類されている。即ち、

補題4.4. (plane foliation, cylinder foliation の分類定理) $(V, \mathcal{F})$ を、orientable 3次元多様体上の orientable C^2 foliation で、∂V の各連結成分は compact leaf であり、$\mathrm{int}V$ に属する leaf は、全て $\mathbb{R}^2$ であるか全て $S^1\times\mathbb{R}$ であるとする。この時 $(V, \mathcal{F})$ は次の6 types のどれかに位相共役である。

I) $(T^3, dx+\alpha dy+\beta dz)$ 但 $1, \alpha, \beta$ は $\mathbb{Q}$ 上一次独立。

II) $(S^1\times D^2$, Reeb component$)$

III) $(T^2\times I, \mathcal{F}_{\varepsilon,\alpha}) = (S^1\times I\times I, \mathcal{F}_\varepsilon\times I)/(\theta,s,0)\sim(\theta+\alpha,s,1),\ \forall\theta\in S^1, \forall s\in I$

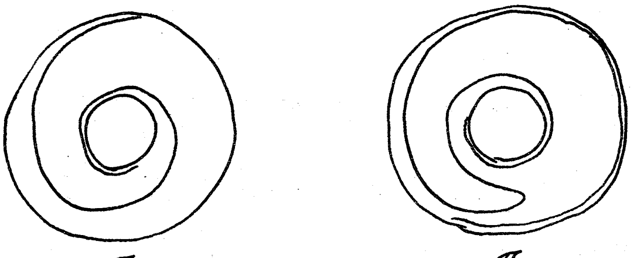
但 $\varepsilon=$ i または ii, α は無理数。

IV) (T^2 上の S^1 bundle, T^2 上の linear irrational line foliation の pull back)

V) (twisted I bundle over Klein bottle, $\exists 1$ standard cylinder foliation)

VI) $(T^2\times I, \mathcal{F}_{\varepsilon,0}) = (S^1\times I\times I, \mathcal{F}_\varepsilon\times I)/(\theta,s,0)\sim(\theta,s,1),\ \forall\theta, \forall s$

ここで $\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_{ii}$ とは、下図の foliation：



$\mathcal{F}_i$　　　　$\mathcal{F}_{ii}$

定理を証明するには、補題4.4.に出てくる6種類のfoliationを、$C^\omega 2)$に注意しつつ、はり合わせてゆけばよい。詳細は省略する。　　Q.E.D.

定理2の証明のなかから、$\mathcal{F}$のleafとして現われ得る2次元多様体は、補題4.2.の4つから高々可算個のdiskを抜いたものであることがわかる。特に、

<u>系4.5.</u> 閉3次元多様体M上のC^ω級foliation $\mathcal{F}$が、genus 2以上のleafを持っているならば、$\pi_1(M)$は、exponential growthである。

§5. 定理3の証明の概略

一般にfoliation $(M, \mathcal{F})$が与えられたとき、<u>homotopy secant</u>という概念をLamoureuxが定義した。

<u>定義5.1.</u> $\mathcal{F}$のx_0におけるhomotopy secant $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$とは、$\pi_1(M, x_0)$の元で、x_0を通る$\mathcal{F}$にtransverseなclosed curveで

あらわされ(orientationを込めた意味で)るもの全体のなす集合のことである。

$\Pi S(x_0, \mathcal{F})$は半群であることが容易に分かる。また、$\mathcal{F}$がC^ω級であればC^ω1)により、$\Pi S(x_0, \mathcal{F})$は単位元を持たない。

定義5.2. Sを単位元を持たない半群とする。Sの元sがinfinitely divisibleとは、任意の自然数Nに対してSのN個の元$s_1, s_2, \dots, s_N$が存在して$s = s_1 s_2 \cdots s_N$となるときにいう。

次の補題の証明は容易である。

補題5.3. τをx_0を通るoriented closed transversalとする。τがL_{x_0}と無限個の点で交わるならば、$[\tau] \in \Pi S(x_0, \mathcal{F})$は、infinitely divisible.(但しL_{x_0}は、x_0を通るleafを表わす)

補題5.4.
$$\left.\begin{array}{l} \alpha \in i_{\#}^{L_{x_0}} \pi_1(L_{x_0}, x_0) \\ \beta \in \Pi S(x_0, \mathcal{F}) \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha * \beta \in \Pi S(x_0, \mathcal{F})$$

さて定理の証明に入ろう。$\pi_1(M)$はabelianとし、群演算を加法的に表わすことにする。$\Pi S(x_0, \mathcal{F})$は単位元を持たない半群であったから、明らかにtorsion elementを持たない。そこで$q: \pi_1(M) \longrightarrow \pi_1(M)/_{\text{torsion}} \left(\underset{\text{同一視}}{=} \mathbb{Z}^n\right)$とし、$p: \mathbb{R}^n - \{0\} \longrightarrow S^{n-1}$を$p(x) \equiv \dfrac{x}{|x|}$とする。$q|\Pi S(x_0, \mathcal{F})$はinjectiveである。

補題5.5. Sを単位元を持たない$\mathbb{Z}^n$の部分半群とすると、$\mathbb{R}^n$のある元aが存在して$S \subset \{x \in \mathbb{Z}^n \mid (a, x) \geqq 0\}$. 但$(,)$は内積.

補題5.6. Sを上述のものとする。もし$a \in \mathbb{Z}^n$が存在して、

$S \subset \{x \in \mathbb{Z}^n \mid (a, x) > 0\}$ならば、$S$の全ての元は、infinitely divisibleでない。

証明は容易である。

補題5.7. $\Pi S(x_0, \mathcal{F}) \neq \phi \Rightarrow pq\, i_\# \pi_1(L, x_0) \subset \overline{pq\, \Pi S(x_0, \mathcal{F})}$.

証明. $\alpha \in i_\# \pi_1(L, x_0)$, $\beta \in \Pi S(x_0, \mathcal{F})$とする。補題5.4.により任意の$n \in \mathbb{Z}$に対して、$n\alpha + \beta \in \Pi S(x_0, \mathcal{F})$. ゆえに、

$$pq(\alpha) = \lim_{n \to \infty} pq(n\alpha + \beta) \in \overline{pq\, \Pi S(x_0, \mathcal{F})} \qquad \text{Q.E.D.}$$

定理3の i)を証明する。corank $i_* = 0$とせよ。すると、$pq\, i_\# \pi_1(L)$はS^{n-1}の中でdenseになる。よって、上の補題から

$$S^{n-1} = \overline{pq\, i_\# \pi_1(L)} = \overline{pq\, \Pi S(x_0, \mathcal{F})}$$

となるが、これは補題5.5.に反している。 Q.E.D.

補題5.8. $i_\# \pi_1(L, x_0) \cap \Pi S(x_0, \mathcal{F}) = \phi$

証明. $\gamma \in i_\# \pi_1(L, x_0) \cap \Pi S(x_0, \mathcal{F})$とする。$-\gamma \in i_\# \pi_1(L, x_0)$と、$\gamma \in \Pi S(x_0, \mathcal{F})$に対して補題5.4.を使えば、

$$0 = (-\gamma) + \gamma \in \Pi S(x_0, \mathcal{F})$$

となり、$C^\omega 1)$に矛盾する。 Q.E.D.

補題5.9. Lの閉包$\bar{L}$がL以外のnon-compact leaf L'を含むならば、$\Pi S(x_0, \mathcal{F})$はinfinitely divisibleな元をもつ。

証明. L'はnoncompactだから、L'を通るclosed transverse curve τが存在する。τは必然的にLと無限個の点で交わるから補題

5.3.により結論が従う。 Q.E.D.

さて、定理3の ii)を証明しよう。corank $i_*=1$ とせよ。すると、容易にわかるように、ある $a\in \mathbb{Z}^n$ が存在して、

$$\partial\, \overline{PG\, i_\# \pi_1(L,x_0)} = S^{n-1}\cap\{x\in\mathbb{R}^n \mid (a,x)=0\}.$$

これと補題5.6, 5.8を合わせると、$\Pi S(x_0,\mathcal{F})$の全ての元は、infinitely divisible でないことになる。しかしこれは、補題5.9に矛盾している。従って証明された。 Q.E.D.

参考文献

[1] S. Goodman ; On the structure of foliated 3-manifolds separated by a compact leaf, Inv. Math. 39 (1977), 213-221.

[2] G. Hector ; Feuilletages en cylinders, Spring Lecture Note 597 (1977).

[3] G. Hector ; Classification cohomologiques des germes de feuilletages, preprint

[4] C. Lamoureux ; Sur quelques phénomènes de captage, Ann. Inst. Fourier 23 (1973), 229-243.

[5] J. F. Plante ; Foliations with measure preserving holonomy, Ann. Math 102 (1975) 327-361.

[6] H. Rosenberg and R. Roussarie ; Topological equivalence of Reeb foliations, Topology 9 (1970), 231-242.

[7] J. F. Plante and W. Thurston ; Polynomial growth in holonomy groups of foliations, Comm. Math. Helv. 51 (1976), 327-361.