数理解析研究所講究録
第 347 巻 1979 年 39-44

Null transversal をもたない余次元1葉層について.

京大 教養 今西英器

$\mathcal{F}$を多様体 M 上の t-orientable な C^r 級の余次元1葉層 ($r \geqq 2$) とする. $\mathcal{F}$に transverse な閉曲線 C がホモトープ 0 のとき. C を <u>null transversal</u> という. $\mathcal{F}$ は次の場合には null transversal をもたない.

(1) $\mathcal{F}$が transverse に C^ω 級のとき. (Haefliger)

(2) $\mathcal{F}$が Lie 群の局所自由な余次元1作用の軌道で定義されているとき. (Roussarie, Plante [5] 参照)

(3) $\mathcal{F}$がホロノミーをもたないとき.

一般には. $\mathcal{F}$が C^ω 級で M がコンパクトであっても $\mathcal{F}$が例外葉をもつことがある (Hector [1]). しかし $\pi_1(M)$ に制限を加えると. $\mathcal{F}$が null transversal をもたなければ. その構造は非常に簡単なものとなる。

<u>定義</u>. 連結な多様体 N 上の余次元1葉層 $\mathcal{F}$ にたいし. 多様体 N' と N' 上の零点をもたない閉1形式 ω および.

NからN'への同相写像hが存在して、hが$\mathcal{F}$の葉をωの積分多様体にうつすとき、$\mathcal{F}$は位相的に閉1形式で定義されるという。

このとき、$Per(\omega)$でωの周期のなす$\mathbb{Z}$-加群をあらわし、その階数を$\mathcal{F}$の階数という。また、Cを$\mathcal{F}$にtransverseな閉曲線とし、$\int_{h(C)}\omega=1$となるようにωを正規化したときの$Per(\omega)$を$Per(\mathcal{F})=Per(\mathcal{F})_C$であらわす。

さらに$\omega(X)\equiv 1$となるN'上のベクトル場Xで完備なものが存在すれば、ωは完備であるという。（このとき、N上には$\mathcal{F}$の葉を葉にうつすような位相的なflowがXとhとにより定義され、$\mathcal{F}$のすべての葉は同相となる。）

また、N'上の任意の曲線$l(t)$, $0\leq t\leq 1$, にたいし、$\int_l\omega\in Per(\omega)$なら$l(0)$と$l(1)$が$\omega$の同じ連結積分多様体上にあるとき、$\omega$は擬完備であるという。$\omega$が完備なら擬完備である。$\omega$が擬完備で階数が2以上なら、$\mathcal{F}$のすべての葉は$N$で稠密である。また$\omega$の階数が1以下なら$\mathcal{F}$のすべての葉は$N$の閉部分多様体である。

定理1（土屋[7]）Mはコンパクト，$\mathcal{F}$はC^ω級とする。$\pi_1(M)$が多項式のgrowthをもてば、$\mathcal{F}$のproperな葉L_1, $L_2,\cdots,L_k$が存在して、$M-\bigcup_{i=1}^{k}L_i$の各連結成分上で$\mathcal{F}$は完備な閉1形式で位相的に定義される。

ここでは上の定理で $\pi_1(M)$ の条件を強くすることにより、Mのコンパクト性をとりのぞき、$\mathcal{F}$ に関する条件も弱められることを示す。

定理2 $\pi_1(M)$は有限生成アーベル群、$\mathcal{F}$ は null transversal をもたないとする。$\mathcal{F}$ のすべての開葉の和を F とすると、$M-F$ の各連結成分上で、$\mathcal{F}$は擬完備な閉1形式により位相的に定義される。また各連結成分上で $\mathcal{F}$ の階数は M の1次元Betti数 b_1 以下である。さらに、Cを $\mathcal{F}$ に transverse な閉曲線とし、$C\cap F\neq\phi$ なら $S(C)=\{x\in M \mid L_x\cap C\neq\phi,\ L_x$ は x を通る葉$\}$ の境界を通る $\mathcal{F}$に transverse な閉曲線は存在しない。

Remarks (i) 開葉とはMの開部分集合であるような葉をいう。上でFは開集合となる。(ii) $M=F$ なら M から $\mathbb{R}$ または S^1 への位相的な submersion f が存在して $f^{-1}(*)$ の連結成分が $\mathcal{F}$の葉となっている。

系3 定理2の条件と記号のもとで、

(i) $F=\phi$ なら $\mathcal{F}$ はホロノミーをもたない。

(ii) Fの葉Lの片側ホロノミー群は、階数が b_1 以下のアーベル群である。特に、$F\supset L'\neq L$ で $\overline{L'}\supset L$ なら L の L' 側のホロノミー群は $\mathbb{Z}$ と同型である。

(iii) $\mathcal{F}$ が C^ω 級とすると、$S(C)-F$ の連結成分は有限個(

k個とする）であるが．各成分への$\mathcal{F}$の制限を$\mathcal{F}_i$とすると．$Per(\mathcal{F}_1) = \cdots = Per(\mathcal{F}_k)$ とできる．

(iv) $\mathcal{F}$がホロノミーをもたなければ．Fの葉は M を２つの連結成分に分ける。とくに $F \cap S(C) = \phi$ であるが、さらに $M = F \cup S(C)$ となる．

応用として．$\mathbb{R}^{n-1}$ の n次元多様体への局所自由な作用の線形化の問題を考える，$\psi : \mathbb{R}^{n-1} \times M \longrightarrow M$ を n次元多様体 M への C^r級の局所自由な（すなわち．すべての軌道が $(n-1)$次元である）作用とする，ψ が <u>C^s級の線形作用</u>であるとは．Mから $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^k$ $(0 \leq k \leq n)$ への C^s級の同相写像 f と．$(n, n-1)$行列 A が存在して．$^\forall x \in M$, $^\forall y \in \mathbb{R}^{n-1}$ に対して

$$f \circ \psi(y, x) = f(x) + A \cdot y \pmod{\mathbb{Z}^k}$$

となることをいう．

<u>仮定</u> (i) Mは向きづけ可能で $\pi_1(M)$は有限生成アーベル群 (ii) ψはMの閉集合であるような軌道をもたない。(iii) $3 \leq r \leq \omega$.

この仮定のもとで．ψの軌道の集合で定義されるM上の葉層を$\mathcal{F}_\psi$とすると．系３(i)より$\mathcal{F}_\psi$は位相的に閉１形式で定義され．$Per(\mathcal{F}_\psi)$が定義される。

<u>定理４</u>．$\mathbb{R}$の測度0の部分集合Dが存在して．上の仮定のもとで、$Per(\mathcal{F}_\psi) \not\subset$ 遇D ならば ψは C^{r-3}級の線形作用

である。

<u>Remark</u> 上の D は $\mathbb{Q}$ を含む。$D \ni \alpha$ となる α は"有理数で近似しにくい"無理数である（正確には Herman [2] と Tischler-Tischer [6] を参照のこと）。仮定をみたす φ の集合に適当に位相を入れると $\mathrm{Per}(\mathcal{F}_\varphi)$ は φ に関し連続となり、上の定理は"殆んどすべての φ は線形作用である"と標語的に言える。また $\mathrm{Per}(\mathcal{F}_\varphi) \subset D$ なら線形化できない φ は存在する。

定理2，系3，定理4，の証明は [3]，[4] にあるので、ここでは省略する。

なおこれらの結果は、$\pi_1(M)$ が非可換でも、交換子群 $[\pi_1(M), \pi_1(M)]$ が有限群ならそのままなりたつ。

文献

[1] G. Hector ; Quelques exemples de feuilletages ; espèces rares, Ann. Inst. Fourier 26.1 (1976) 239-264.

[2] M.R. Herman ; Conjugaison C^∞ des difféomorphisms du cercle pour presque tout nombres de rotation ; C.R. Acad. Sci. Paris t 283 (1976) 579-582.

[3] H. Imanishi ; Structure of codimension one foliations without holonomy on manifolds with abelian fundamental group. to appear in J. of Math. of Kyoto Univ.

[4] ——— ; 余次元1葉層の Denjoy-Siegel 理論, 「数学」に投稿中.

[5] J.F. Plante : Asymptotic properties of foliations Comm. Math. Helv. 47 (1972), 449-456.

[6] D. Tischler-R. Tischler ; Topological conjugacy of locally free $\mathbb{R}^{n-1}$ actions on n-manifolds. Ann. Inst. Fourier 24.4 (1974) 215-217

[7] N. Tsuchiya ; Growth and depth of leaves, preprint