数理解析研究所講究録
第 347 巻 1979 年 45-54

余次元1葉層構造のSRH-分割とGodbillon-Vey類

東北大 理　西森敏之

§1 序.　Mを向きづけ可能な閉多様体とし，$\mathcal{F}$をM上の向きづけ可能な余次元1葉層構造とする。すべてをC^∞級の枠内で議論することにする。M上の非特異1-形式ωを

$$\mathcal{F} = \{ v \in TM \mid \omega(v) = 0 \}$$

をみたすようにとると，Frobeniusの定理により$d\omega = \eta \wedge \omega$をみたす1-形式$\eta$が存在する。このとき3-形式$\eta \wedge d\eta$は閉形式となり，コホモロジー類$[\eta \wedge d\eta] \in H^3(M;\mathbb{R})$は$\omega, \eta$のとり方によらず$\mathcal{F}$のみで定まる。そこで$gv(\mathcal{F}) = [\eta \wedge d\eta]$とおきGodbillon-Vey類と呼ぶ。3次元多様体の場合にはGodbillon-Vey数$gvn(\mathcal{F}) = gv(\mathcal{F})[M] \in \mathbb{R}$は葉層コボルディズム不変量となり，Thurston[4]により葉層コボルディズム群$\mathcal{F}\Omega^\infty_{3,1}$から$\mathbb{R}$への全射写像を引起こすことが知られている:

$$\mathcal{F}\Omega^\infty_{3,1} \xrightarrow{gvn} \mathbb{R} \longrightarrow 0 \quad .$$

Ker gvnを決定せよという問題は未解決であり重要である。ここではこの問題に対する準備とみなせる

問題"どういうタイプの葉層構造が Ker gv に属するか?"を考える。

著者は葉層構造の定性的研究によりある種の葉層構造がよい分割を許すことにきづいていたが，この分割を用いて計算することができ次に述べる結果を得た。

定義　$\mathcal{F}$の葉 F_1, F_2 に対し $F_1 < F_2$ とは $F_1 \subset Cl(F_2)$ かつ $F_1 \neq F_2$ とする。そこで

$$d(\mathcal{F}) = \sup\{ k \mid \exists F_1 < \cdots < F_k,\ F_i : \mathcal{F}\text{の葉} \}$$

とおき，$\mathcal{F}$の depth と呼ぶ。

主定理　$d(\mathcal{F}) < \infty$ とし，$\mathcal{F}$のすべてのホロノミー群が可換とする。このとき

(1) $\dim M = 3$ ならば，$gv(\mathcal{F}) = 0$。

(2) $\dim M > 3$ ならばさらに自明でないホロノミー群をもつ葉Fに対して $H^2_{comp}(F;R) = 0$ と仮定すると，$gv(\mathcal{F}) = 0$。
ただし comp は compact support を意味するものとする。

注意　Ker gv に属する葉層構造で自明でない例としては

(1) $S^1 \times S^1$ 上の葉層S^1-バンドル（Herman [1]），

(2) ホロノミーをもたない葉層構造（森田-坪井 [3]）

などが知られている。

主定理を次のように分解する。定義は§2にまわす。

定理1　$d(\mathcal{F})<\infty$ かつ $\mathcal{F}$ のすべてのホロノミー群が可換とすると，$\mathcal{F}$ は換気された可換なSRH-分割をもつ。

定理2　$\dim M=3$ とする。$\mathcal{F}$ が可換なSRH-分割ですべての室輪と広間が換気されているかまたは開かれているようなものをもつとすると，$gv(\mathcal{F})=0$ 。

定理3　$\dim M>3$ とする。$\mathcal{F}$ が換気されたSRH-分割をもち，自明でないホロノミー群をもつ葉Fに対して $H^2_{comp}(F;\mathbb{R})=0$ とすると，$gv(\mathcal{F})=0$。

定理4　$\dim M>3$ とする。$\mathcal{F}$ がSRH-分割をもち，自明でないホロノミー群をもつ葉Fに対して $H^i_{comp}(F;\mathbb{R})=0$ $(i=2,3)$ とすると，$gv(\mathcal{F})=0$ 。

§2　SRH-分割の定義.

Fをコンパクト多様体，Nを $\mathrm{Int}\,F$ の余次元1閉部分多様体とするとき $C(F,N)$ でFをNで切り開いて得られるコンパクト多様体を表わす：

$$C(F,N)=(F-N)\cup N_1\cup N_2\,,\quad N_1=N_2=N\,.$$

さらに微分同型 $f:[0,\delta_1]\to[0,\delta_2]$ $(\delta_1>\delta_2)$ が与えられたとき，$C(F,N)\times[0,\delta_1]$ 上に同値関係 $\sim$ を

$$(n_1,t)\sim(n_2,f(t))\quad \text{ただし}\quad n_i\in N_i,\ n_1=n_2 \text{ in } N,\ t\in[0,\delta_1]$$

により定義し $X(F,N,f)=C(F,N)\times[0,\delta_1]/\sim$ とおく。このとき $C(F,N)\times[0,\delta_1]$ の積葉層構造から得られる $X(F,N,f)$

上の葉層構造を $\mathcal{F}(F,N,f)$ で表わす。

$\mathcal{F}$ に横断的な流れ $\varphi: M\times\mathbb{R}\to M$ を1つ固定しておく。

定義1　Mの部分集合Sが階段とは，ある葉の同次元コンパクト部分多様体Fと，Int F の余次元1開部分多様体NでF−Nが連結なもの，微分同型 $f:[0,\delta_1]\to[0,\delta_2]$ $(\delta_1>\delta_2)$，うめこみ $h: X(F,N,f)\to M$ が存在して

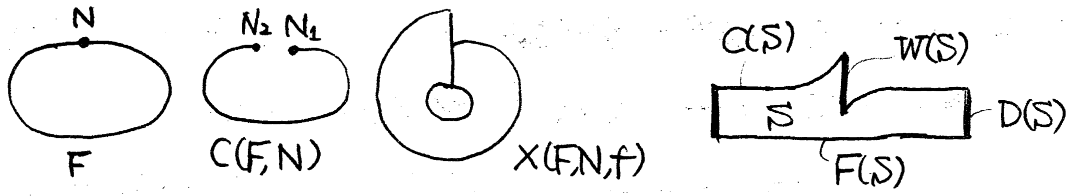
(S1)　$h(X(F,N,f)) = S$,

(S2)　$h(\{x\}\times[0,\delta_1])\subset\varphi(\{x\}\times\mathbb{R})$ for $\forall x\in F$,

(S3)　$h(x,0)=x$ for $\forall x\in F$,

(S4)　$h(C(F,N)\times\{\delta_1,\ \delta_2=f(\delta_1),\ f^2(\delta_1),\cdots\})\subset\exists$葉．

このとき $F(S)=F$, $C(S)=h(C(F,N)\times\{\delta_1\})$, $W(S)=h(N_2\times[\delta_2,\delta_1])$, $D(S)=h(\partial F\times[0,\delta_1])$ をそれぞれ床，天井，壁，戸と呼ぶ。 $h^*\mathcal{F}=\mathcal{F}(F,N,f)$ のとき S を正則という。



定義2　Mの部分集合Rが室とは，ある葉のコンパクト同次元部分多様体Fとうめこみ $h: F\times[0,1]\longrightarrow M$ が存在して

(R1)　$h(F\times[0,1]) = R$,

(R2)　$h(\{x\}\times[0,1])\subset\varphi(\{x\}\times\mathbb{R})$,　$h|\{x\}\times[0,1]$ と φ は同じ向き,

(R3)　$h(x,0)=x$ for $\forall x\in F$,

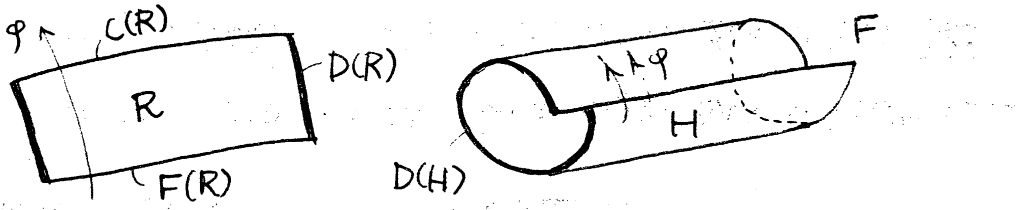
(R4) $\mathcal{R}(F\times\{1\}) \subset \exists$葉 。

このとき $F(R)=F$, $C(R)=\mathcal{R}(F\times\{1\})$, $D(R)=\mathcal{R}(\partial F\times[0,1])$ をそれぞれ<u>床</u>, <u>天井</u>, <u>戸</u>と呼ぶ。自然にホロノミー準同型 $\Phi: \pi_1(F, x_0) \longrightarrow \mathrm{Diff}\,[0,1]$ が定まるが Image Φ が可換のときRを<u>可換</u>という。

<u>定義3</u> Mの部分集合Hが<u>広間</u>とは, ある葉のコンパクト同次元部分多様体Fと微分同型 $f: D(f) \to R(f)$ ($D(f)\cup R(f)=F$) が存在し, さらに各 $x\in D(f)$ に対し $t_x>0$ が存在して

$$\varphi(x, t_x)=f(x),\quad \varphi(\{x\}\times(0,t_x))\cap F=\phi$$

となり $H=\{\varphi(x,t)\mid x\in D(f),\ 0\leqq t\leqq t_x\}$ とかけること。
このとき $D(H)=\{\varphi(x,t)\mid x\in\partial D(f),\ 0\leqq t\leqq t_x\}$ を<u>戸</u>という。自然にホロノミー準同型 $\Phi: \pi_1(D(f),x_0)\to \mathrm{Diff}\,[0,t_{x_0}]$ が定まるが Image Φ が可換のとき H を<u>可換</u>という。



<u>定義4</u> Mの部分集合 ρ が<u>室輪</u>とは, 室 $R_1,\cdots,R_\ell$ が存在し

$C(R_i)\cap F(R_{i+1})\neq\phi$, $i=1,\cdots,\ell-1$. $C(R_\ell)\cap F(R_1)\neq\phi$.

$\rho=R_1\cup\cdots\cup R_\ell$.

<u>定義5</u> 室輪 ρ (または広間H) が<u>換気されている</u>とは $\mathcal{F}|\rho$ (or $\mathcal{F}|H$) がホロノミー群が自明な葉をもつこと。

ρ (or H) が開いているとは，各 $x \in \rho$ (or H) に対して $s<0$ $t>0$ が存在して $\varphi(x,s) \notin \rho$ (or H)，$\varphi(x,t) \notin \rho$ (or H)。

定義6　Mの部分集合の有限族Δが擬SRH-分割とは，

(1) $M = \bigcup_{A\in\Delta} A$．$\{\mathrm{Int}\,A\}_{A\in\Delta}$ は disjoint．

(2) Δの各元は正則階段，室，広間のいずれか：

$\Delta = \mathcal{S}(\Delta) \cup \mathcal{R}(\Delta) \cup \mathcal{H}(\Delta)$．$\{W(S)\}_{S\in\mathcal{S}(\Delta)}$: disjoint

(3) 各 $A \in \Delta$ に対して $D(A) \subset \bigcup_{S\in\mathcal{S}(\Delta)} W(S)$。

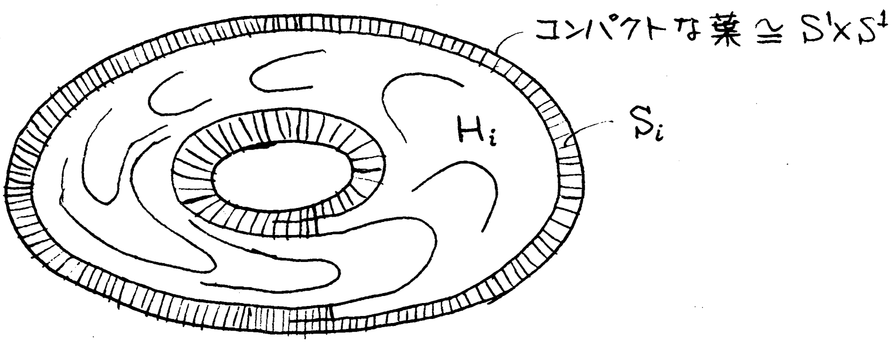
特に各 $A \in \mathcal{R}(\Delta) \cup \mathcal{H}(\Delta)$ が可換のときΔを可換という。

定義7　擬SRH-分割Δが与えられたとき，Δ上の関係$\leqq$を

$$A \leqq B \Leftrightarrow A=B \text{ または } \exists A_0 = A, A_1, \cdots, A_k = B \in \Delta \quad \text{s.t. } W(A_i) \cap D(A_{i+1}) \neq \phi$$

により定義する。$(\Delta, \leqq)$ が順序集合のときΔをSRH-分割と呼ぶ。

例　Reeb葉層構造 $(S^3, \mathcal{F}_R)$ に対して，階段2つと広間2つからなるSRH-分割が存在する：$\Delta = \{S_1, S_2, H_1, H_2\}$



§3 定理1の証明の概略. 各 $x \in M$ に対して次のいずれかをみたす近傍 $U(x)$ が存在する。

(1) $U(x)$ はコンパクトな葉と交わらない。

(2) $U(x)$ は1枚のコンパクトな葉とだけ交わる。

(3) コンパクトな葉を床とする可換な室 $R(x)$ が存在して $U(x)$ と交わるすべてのコンパクトな葉は $R(x)$ に含まれる。

M がコンパクトであることから, x_i, y_i, $z_i \in M$ が存在して

$$M = \underbrace{U(x_1)\cup\cdots\cup U(x_\ell)}_{(1)}\cup\underbrace{U(y_1)\cup\cdots\cup U(y_m)}_{(2)}\cup\underbrace{U(z_1)\cup\cdots\cup U(z_n)}_{(3)}$$

とかける。そこで

$$\mathcal{R}^1 = \left\{ Cl(K) \,\middle|\, K \text{は} \bigcup_{i=1}^{n} R(z_i) - \bigcup_{i=1}^{n}\{F(R(z_i))\cup C(R(z_i))\} \text{の連結成分} \right\}$$

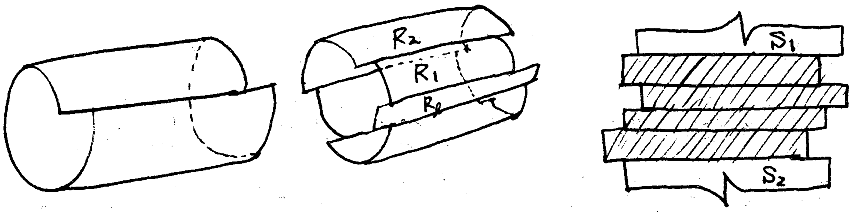
とおくと $\mathcal{R}^1$ の各元は可換な室になる。$Int(\bigcup_{R\in\mathcal{R}^1} R)$ と交わらないコンパクトな葉は有限枚あるが, ホロノミー群が可換, $\mathcal{F}$ が C^∞ 級, $d(\mathcal{F}) < \infty$ であることから, 西森[2]の定理1によりそれらを床とする正則階段が片側または両側にとれる。得られた階段の集合を $\mathcal{S}^1$ とおく。

$$M^1 = M - Int\left\{ \left(\bigcup_{R\in\mathcal{R}^1} R\right) \cup \left(\bigcup_{S\in\mathcal{S}^1} S\right) \right\}$$

とおくと $d(\mathcal{F}|M^1) \leqq d(\mathcal{F}) - 1$ となる。以上の議論をくりかえせば最後に自明な広間が残りSRH-分割を得る。

§4　定理2の証明の概略　$\mathcal{K}$ を $M-\mathrm{Int}(\bigcup_{S\in\mathcal{S}(\Delta)} S)$ の連結成分の集合とすると $K\in\mathcal{K}$ は次のいずれかである。

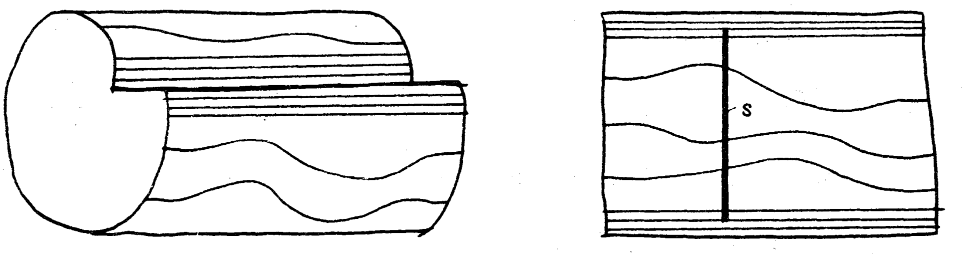
(I)広間　(II)室輪　(III)2つの階段 S_1, S_2 にはさまれた室の和.



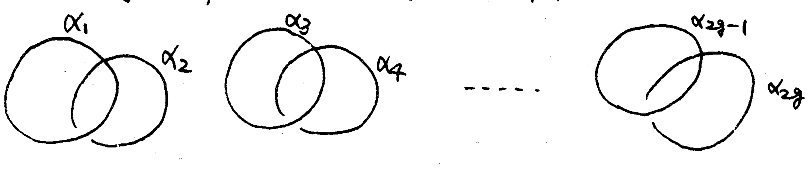
$K_+ = K\cup S_1\cup S_2$ とおく.

このとき $M-\mathrm{Int}\{(\bigcup_{\mathrm{I,II}} K)\cup(\bigcup_{\mathrm{III}} K^+)\}$ は床が交わる階段の対 (S_1, S_2) たちの和にわかれる。$\mathcal{U}=\{K_{\mathrm{I,II}}, K_{+\,\mathrm{III}}, S_1\cup S_2\}$ とおく。

$\mathcal{U}$ の各元Kに対してKの部分集合 s で $\mathcal{F}|K-s$ が無ホロノミーの葉層構造となるものを次のように選ぶ。Kが換気されている広間のとき，簡単のため定義3の表現でのFのホロノミーが自明として議論する。KをFで切り開くと，



Fの種数をgとするとき 2g 個の輪を次のようにとる。



このとき適当な区間Jに対して $s=(\bigcup\alpha_i)\times J$ とおくと，Kが可換であることから $\mathcal{F}|K-s$ は無ホロノミーとなる。Kが

$\mathcal{U}$の他のタイプのものでも同様にして s が得られる。

以上のことと $(\Delta, \leqq)$ が順序集合であることを使って帰納法によりM上のベクトル場Xで，$X \mid M - \bigcup_s N(s)$ で生成される局所1-径数群が $\mathcal{F}$ を保つものが構成できる。ただし $N(s)$ は s の管状近傍である。そこでM上の非特異1-形式 ω を

$$\omega(X) \equiv 1, \quad \mathcal{F} = \{ v \in TM \mid \omega(v) = 0 \}$$

により定義すると，$M - \bigcup_s N(s)$ 上で $d\omega = 0$ となる。

このときM上の1-形式 η で

$$d\omega = \eta \wedge \omega, \quad \eta \mid M - \bigcup_s N(s) = 0$$

をみたすものが構成でき，$\mathcal{F}$ の Godbillon-Vey 数は

$$gv(\mathcal{F}) = \int_M \eta \wedge d\eta = \sum_s \int_{N(s)} \eta \wedge d\eta$$

とあらわせる。

$N(s)$ の各連結成分Cは $(S^1 \times S^1 - D^2) \times [0,1]$ に微分同型であり，$\mathcal{F} \mid \partial C$ は自明な葉層構造であるので $S^1 \times S^1 \times [0,1]$ 上の葉層構造 $\mathcal{F}_C$ に拡張でき，対応する ω，η も $D^2 \times [0,1]$ 上で $d\omega = 0$，$\eta = 0$ となるように拡張できる。さらに $S^1 \times S^1 \times \{0\}$ と $S^1 \times S^1 \times \{1\}$ を同一視してもすべてうまく行くことがわかり，$\mathcal{F}_C$ は $S^1 \times S^1 \times S^1$ 上の葉層構造とみなせる。したがって

$$\int_C \eta \wedge d\eta = \int_{S^1 \times S^1 \times S^1} \eta \wedge d\eta = gv(\mathcal{F}_C)$$

となるが Herman [1] の定理により $gv(\mathcal{F}_C) = 0$ となる。ゆえに $\int_{N(s)} \eta \wedge d\eta = 0$ となり $gv(\mathcal{F}) = 0$ を得る。

REFERENCES

[1] M. Herman, The Godbillon-Vey invariant of foliations by planes of T^3, Geometry and Topology, Rio de Janeiro 1976, Springer Lecture Notes vol. 597, Berlin, 1977.

[2] T. Nishimori, Compact leaves with abelian holonomy, Tôhoku Math. J. 27(1975), 259-272.

[3] S. Morita and T. Tsuboi, The Godbillon-Vey class of codimension-one foliations without holonomy, to appear.

[4] W. Thurston, Non-cobordant foliations of S^3, Bull. Amer. Math. Soc. 78(1972), 511-514.