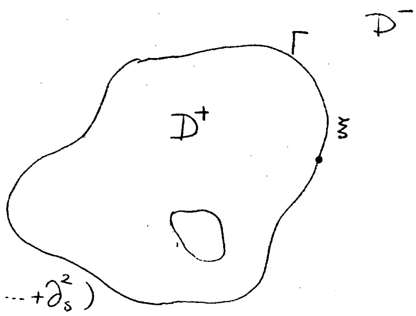
数理解析研究所講究録
第349巻 1979年 51-55

モノドロミー保存変分方程式

京大数理研　三輪　哲二
神保　道夫

高次元の holonomic quantum fields は local field theory でなく，広がりを持つ物体（BAG？）を対象として構成される。それに応じて Euclid 時空での対応する変形理論も，Hadamard型の変分公式の形で自然に拡張することができる。詳細は [1] [2] を見て下さい。ここでは基本的な考え方のみを述べる。

1. 次の設定のもとに，Euclidean Dirac 方程式に対する Riemann-Hilbert の問題を考えよう．



D^+ : $\mathbb{R}^s$ の有界領域，D^- : 外部領域

$\Gamma = \partial D^+$ (*)

$M(\xi)$: Γ 上のサイズ N の行列 (*)

$\not{\partial} = \gamma^1\partial_1 + \cdots + \gamma^s\partial_s$　　（ $\not{\partial}^2 = \Delta = \partial_1^2 + \cdots + \partial_s^2$ ）

但しガンマ行列は $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\delta^{\mu\nu}$ をみたすサイズ r の行列とする。

m : 正又は 0 の定数

(*) 実解析的。

問題（Γ, M）：次の性質をもつ $rN\times rN$ 行列 w を求む。

（1） (i) $(-\not\partial_x+m)\,w(x,x')=\delta^s(x-x')$ $\quad (x,x'\notin\Gamma)$

(ii) $|w(x,x')|=\begin{cases}O(e^{-m|x|}) & (m>0)\\ O\left(\frac{1}{|x|^{s-1}}\right) & (m=0)\end{cases}$ as $|x|\to\infty$

(iii) $w(\xi^+,x')=M(\xi)\,w(\xi^-,x')$ $\qquad \xi\in\Gamma$

（但し $w(\xi^\pm,x')=\lim_{D^\pm\ni x\to\xi}w(x,x')$ ）

"モノドロミー行列" $M(\xi)$ が十分1に近ければ，解である $w(x,x')$ は存在して一意的である。

特に2次元，massless（$m=0$）の場合，w は次の形をとる。

(2) $$w=-\frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{z-z'}Y(z,z')\\ \frac{1}{\bar z-\bar z'}Y^*(\bar z,\bar z') & 0\end{pmatrix}$$

$$Y^*(\bar z,\bar z')=Y^*(\bar z,\bar z';\Gamma,M)=\overline{Y(z,z';\Gamma,\bar M)}$$

ここに $Y(z,z')$ は $\mathbb{P}^1-\Gamma$ 上正則で

(3) $Y(z,z)=1$, $\quad Y(\xi^+,z')=M(\xi)Y(\xi^-,z')$ （$\xi\in\Gamma$）

を満たす。

通例 Riemann-Hilbert 問題の高次元化と言うと，多変数の正則函数で(iii)にあたる条件を課したものを考えるが，上のように(3)を実2次元における $\bar\partial Y=0$ の解の中で考える立場も，一つの自然な拡張と言えるだろう。

2. 以下，上の "Green 函数" $w(x,x')$ を境界 Γ の汎函数と考えたときの変分を問題とする。即ち，Γ をあるベクトル

場 $\sum_{\mu=1}^{s}\rho^{\mu}(\xi)\partial_{\mu}$ に沿って動かし $\Gamma^{\rho}=\{\,\xi+\rho(\xi)\mid\xi\in\Gamma\,\}$ とする。この時モノドロミーは Γ^{ρ} 上では $M^{\rho}(\xi^{\rho})=M(\xi)$ ($\xi^{\rho}=\xi+\rho(\xi)$, $\xi\in\Gamma$) と与える。対応する Green 函数 $w^{\rho}(x,x')$ を ρ の汎函数とみて $\rho=0$ での変分を $\delta w(x,x')$ と書けば,

公式

(4) $$\delta w(x,x')=\int_{\Gamma}d\sigma(\xi)\sum_{\mu=1}^{s}\delta\rho^{\mu}(\xi)\,w(x,\xi^{+})\cdot(n_{\mu}\not\partial-\not n\partial_{\mu})M(\xi)\cdot w(\xi^{-},x')$$

($(n_1(\xi),\cdots,n_s(\xi))$ は $\xi\in\Gamma$ での単位外法線

$\not n=\sum_{\mu=1}^{s}\gamma^{\mu}n_{\mu}$, $d\sigma$: 面要素)

上の公式で境界値をとることにより, $w(x,\xi^{+})$, $w(\xi^{-},\eta^{+})$ 等についても同様の公式が得られる。

また, 平行移動及び回転に対する $w(x,x')$ の共変性と (4) を用いると, 微分積分方程式を得る (類似の事情が P. Lévy [ ] によって指摘されている)。今 $w(x,\eta^{+})$ と $w(\xi^{-},\eta^{+})$ について結果をまとめると

(5) $$\delta' w(x,\eta^{+})=\int_{\Gamma}d\sigma(\zeta)\sum_{\mu=1}^{s}\delta\rho^{\mu}(\zeta)\cdot w(x,\zeta)\cdot(n_{\mu}\not\partial-\not n\partial_{\mu})M(\zeta)\cdot w(\zeta^{-},\eta^{+})+\sum_{\mu=1}^{s}\delta\rho^{\mu}(\eta)\,\partial^{\eta}_{\mu}w(x,\eta^{+})$$

(6) $$\partial^{x}_{\mu}w(x,\eta^{+})+\int_{\Gamma}d\sigma(\xi)\,w(x,\xi^{+})\cdot(n_{\mu}\not\partial-\not n\partial_{\mu})M(\xi)\cdot w(\xi^{-},\eta^{+})+\partial^{\eta}_{\mu}w(x,\eta^{+})=0$$

(7) $$\big((x^{\mu}-\eta^{\mu})\partial^{x}_{\nu}-(x^{\nu}-\eta^{\nu})\partial^{x}_{\mu}\big)w(x,\eta^{+})+\frac{1}{2}[\gamma^{\mu\nu},w(x,\eta^{+})]+\int_{\Gamma}d\sigma(\xi)\,w(x,\xi^{+})\cdot\Big(\big(n_{\nu}(\xi^{\mu}-\eta^{\mu})-n_{\mu}(\xi^{\nu}-\eta^{\nu})\big)\not\partial-\not n\big((\xi^{\mu}-\eta^{\mu})\partial_{\nu}-(\xi^{\nu}-\eta^{\nu})\partial_{\mu}\big)\Big)M(\xi)\cdot w(\xi^{-},\eta^{+})=0$$

$$(8)\quad {}'\delta' W(\xi^-,\eta^+) = \int_{\Gamma_s} d\sigma(\zeta) \sum_{\mu=1}^{s} \delta\rho^\mu(\zeta)\, W(\xi^-,\zeta^+)\cdot(\eta_\mu \not{\partial} - \not{n}\,\partial_\mu) M(\zeta)\cdot W(\zeta^-,\eta^+)$$
$$+ \sum_{\mu=1}^{s} \delta\rho^\mu(\xi)\, \partial_\mu^\xi W(\xi^-,\eta^+) + \sum_{\mu=1}^{s} \delta\rho^\mu(\eta)\, \partial_\mu^\eta W(\xi^-,\eta^+)$$

ここで $\delta' W(x,\eta^+)$ は，$W^\rho(x,\eta^{\rho+}) - W(x,\eta^+)$ $(\eta\in\Gamma)$ の一次の項を表わす（変数 η は境界上に固定して変分する）。${}'\delta' W(\xi^-,\eta^+)$ の意味も同様。また，Euclidean Dirac 方程式を用いれば、$\partial_\mu^\eta W(x,\eta^+)$ 等は η の tangential な微分のみを含む形に書き直すことができる。例：$\partial_\mu^\xi W(\xi^-,\eta^+) = (\partial_\mu^\xi - \eta_\mu(\xi)\not{n}(\xi)\not{\partial}^\xi + m\cdot\eta_\mu(\xi)\not{n}(\xi)) \times W(\xi^-,\eta^+)$.

さて，これらはいずれも W について非線型の方程式系であるが，今 $W(\xi^-,\eta^+)$ を未知の係数の如く考えれば，(5)+(6)+(7) は $W(x,\eta^+)$ に関し線型である。そして非線型の方程式系 (8) が，係数 $W(\xi^-,\eta^+)$ を支配している。実は (8) は (5) の完全積分可能性を保証する方程式なのである。（即ち $\frac{\delta}{\delta\rho^\mu(\xi)}\left(\frac{\delta}{\delta\rho^\nu(\eta)}W\right) = \frac{\delta}{\delta\rho^\nu(\eta)}\left(\frac{\delta}{\delta\rho^\mu(\xi)}W\right)$．第二変分は煩雑なのでここには書かない．[1] 参照）。この意味で (5)+(6)+(7) は２次元の（線型）extended holonomic system に，(8) はその“変形の方程式”に，それぞれ対応している [2]。

文献

[1] M. Jimbo and T. Miwa, RIMS preprint 273 (1978).

[2] ———, RIMS preprint 27 (1978).

[3] P. Lévy, Problèmes concrets d'analyse fonctionelle, Gauthier-Villars, Paris (1951).