数理解析研究所講究録
第 349 巻 1979 年 56-63

Federbush模型

京大数理研　佐藤　幹夫
三輪　哲二
神保　道夫

これまで"回転の理論"から直接構成してきた2次元の模型が，実はLagrange形式の模型と直接結びついた形で以前から知られていたことが判明した[4][5]ので，その概略をここに紹介する。文献を教えて下さった中西先生に感謝いたします。

1. 2次元時空での自由(複素)スピノル場の演算子を，$\psi(x)=\begin{pmatrix}\psi_+(x)\\ \psi_-(x)\end{pmatrix}$, $\psi^*(x)=\begin{pmatrix}\psi_+^*(x)\\ \psi_-^*(x)\end{pmatrix}$ とする。(*) 同時刻反交換関係は

$$[\psi_\epsilon(x),\psi^*_{\epsilon'}(x')]_{+\,x^0=x'^0}=2\delta_{\epsilon\epsilon'}\delta(x^1-x'^1)$$

他はすべて反可換

と設定する。以下次のように規約する：

$$\gamma^0=\begin{pmatrix} & i\\ -i & \end{pmatrix},\ \gamma^1=\begin{pmatrix} & -i\\ -i & \end{pmatrix},\ \gamma^5=\gamma^0\gamma^1=\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix},\ \gamma^\pm=\frac{\gamma^0\pm\gamma^1}{2}$$

$$\bar\psi(x)={}^t\psi^*(x)\gamma^0=(-i\psi_-^*(x),\ i\psi_+^*(x))$$

カレント $j^\pm$，軸性カレント $\tilde j^\pm$ を

$$j^\pm(x)=:\bar\psi(x)\gamma^\pm\psi(x):=j_\mp(x),\quad \tilde j^\pm(x)=:\bar\psi(x)\gamma^5\gamma^\pm\psi(x):=\tilde j_\mp(x)$$

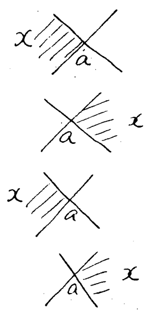
(*) 質量 $=m>0$.

と定義する。成分で書けば $j^{\pm}(x) = \mp\tilde{j}^{\pm}(x) = :\psi^{*}_{\pm}(x)\psi_{\pm}(x):$。

さて，これら自由場 $\psi(x)$, $\psi^{*}(x)$ と次のような交換関係をもつ演算子 $\varphi_F(a) = \varphi_F(a;l',l'')$ を導入しよう：

$$\varphi_F(a)\psi(x) = \begin{cases} e^{2\pi i l'}\psi(x)\varphi_F(a) \\ e^{2\pi i l''}\psi(x)\varphi_F(a) \end{cases}$$

$$\varphi_F(a)\psi^{*}(x) = \begin{cases} e^{-2\pi i l'}\psi^{*}(x)\varphi_F(a) \\ e^{-2\pi i l''}\psi^{*}(x)\varphi_F(a) \end{cases}$$



（図は x が a に対し空間的に左又は右にある意）

[1] では $l''=0$ の場合が述べられているが，一般の場合にはそれに c^N (*)（N：個数演算子）を掛けることで得られる。答は

$$\varphi_F(a;l',l'') = :e^{\rho_F(a;l',l'')/2}:$$

$$\rho_F(a;l',l'')/2 = \iint \underline{du}\,\underline{du'}\,R_F(u,u';l',l'')\,e^{-im(a^-(u+u')+a^+(u^{-1}+u'^{-1}))}\psi^{*}(u)\psi(u')$$

$$R_F(u,u';l',l'') = 2i\cos\pi l\cdot e^{\pi i l''(\epsilon(u)-\epsilon(u'))}(u-i0)^{l}(u'-i0)^{1-l}\,\mathrm{P}\frac{1}{u+u'}$$
$$-i\left(e^{\pi i l'\epsilon(u)}\sin\pi l' + e^{\pi i l''\epsilon(u)}\sin\pi l''\right)2\pi|u|\delta(u+u')$$

$$\left(l = l' - l'' + \tfrac{1}{2} \right)$$

但し $\psi(u)$, $\psi^{*}(u)$ は，エネルギー・運動量 $(p^0, p^1) = m\left(\frac{u+u^{-1}}{2}, \frac{u-u^{-1}}{2}\right)$ を担う生成消滅演算子で，$a^{\pm} = (a^0 \pm a^1)/2$。

後の必要上カレントとの積 $j^{\pm}(x)\varphi_F(a)$ の挙動を調べておく。

$$j^{\pm}(x)\varphi_F(a;l',l'') = \langle j^{\pm}(x)\varphi_F(a;l',l'')\rangle\varphi_F(a;l',l'')$$
$$+ :\psi^{*}_{\pm}(x,a;l',l'')\cdot\psi_{\pm}(x,a;l',l'')\,e^{\rho_F(a;l',l'')/2}:$$

$$\langle j^{\pm}(x)\varphi_F(a;l',l'')\rangle = \frac{2im^2\cos\pi l}{\pi^2}(x-a)^{\pm}\left(K_{1-l\mp\frac{1}{2}}(mr)K_{l\mp\frac{1}{2}}(mr) - K_{-l\mp\frac{1}{2}}(mr)K_{l-1\mp\frac{1}{2}}(mr)\right)$$

(*) c：適当な定数.

$$= \frac{i}{\cos\pi l}\,\frac{1}{(x-a)^{\mp}} + o(1) \qquad (x \to a)$$

（但し $0<|l'-l''|<\frac{1}{2}$; $r=\sqrt{-(x-a)^2}$ ）

また，

$$\lim_{x\to a} :\psi^*_{\pm}(x,a;l',l'')\psi_{\pm}(x,a;l',l'')\,e^{\rho_F(a;l',l'')/2}:$$
$$= \frac{\pm}{2\pi(l''-l')}\cdot i\partial_{\mp}\varphi_F(a;l',l'')$$

が成立つ。

2. 今 $A(\geqq 2)$ 種のスピノル場 $\Psi^a(x)$, $\bar{\Psi}^a(x)$ に対する次のラグランジアンを考える．

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}$$
$$\mathcal{L}_0 = \sum_{a=1}^{A} \bar{\Psi}^a(x)(i\partial\!\!\!/ - m_a)\Psi^a(x) \qquad , \partial\!\!\!/ = \gamma^0\partial_0 + \gamma^1\partial_1$$
$$\mathcal{L}_{int} = \frac{1}{2}\sum_{a,b=1}^{A} \lambda_{ab}\left(J^{a-}(x)\tilde{J}^{b+}(x) + J^{a+}(x)\tilde{J}^{b-}(x)\right)$$

但し結合常数は $\lambda_{ab}=-\lambda_{ba}$ とし，Ψ^a, $\bar{\Psi}^a$ に対するカレントや軸性カレントは 1. と同様に定義する（i.e. $J^{a\pm}(x)=\bar{\Psi}^a(x)\gamma^{\pm}\Psi^a(x)$ 等々）。言いかえれば，次の運動方程式によって定められる模型を考える。

$$(i\partial\!\!\!/ - m_a)\Psi^a(x) + \sum_{\substack{b=1\\ b\neq a}}^{A} \lambda_{ab}\left(\tilde{J}^{b+}(x)\gamma^- + \tilde{J}^{b-}(x)\gamma^+\right)\cdot\Psi^a(x) = 0 .$$

$A=2$ の場合このモデルは Federbush [2] によって導入された。既に指摘されているように（[3] [4], とくに [5] ）、このモデルは explicit な operator solution を持つ。実際，独立な A 種の自由スピノル場 $\psi^a(x)$, $\psi^{*a}(x)$（質量 m_a ）と，それから作られる $\varphi^a_F(x;l',l'')$ を用いて

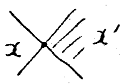
$$\Psi^a(x) = \psi^a(x)\prod_{b(\neq a)}\varphi_F^{\,b}(x; l'_{ab}, l''_{ab})$$
$$\bar\Psi^a(x) = \bar\psi^a(x)\prod_{b(\neq a)}\varphi_F^{\,b}(x; \bar l'_{ab}, \bar l''_{ab})$$

とおけばよい（l'_{ab} etc は to be determined）。但しカレントの定義や同時空点での積はそのままでは発散するので適当な解釈を要する。これらの点を明らかにしつつ以下で運動方程式の成立を check してみよう。

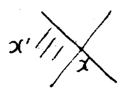
3.

(1) microcausality.

φ_Fと自由場の交換関係により，次が容易に確かめられる。

$$\Psi^a(x)\Psi^b(x') = -e^{\pi i(l''_{ab}-l'_{ba})}\Psi^b(x')\Psi^a(x)$$  $a\neq b$

$$\bar\Psi^a(x)\bar\Psi^b(x') = -e^{-\pi i(\bar l''_{ab}-\bar l'_{ba})}\bar\Psi^b(x')\bar\Psi^a(x)$$ 〃 $a\neq b$

$$\Psi^a(x)\bar\Psi^b(x') = \begin{cases} -e^{\pi i(l''_{ab}+\bar l'_{ba})}\bar\Psi^b(x')\Psi^a(x) & \text{〃} \\ -e^{-\pi i(l'_{ab}+\bar l''_{ba})}\bar\Psi^b(x')\Psi^a(x) & \end{cases}$$  $a\neq b$

ゆえに　$l'_{ab} = l''_{ba} = -\bar l'_{ab} = -\bar l''_{ba}$ ととればすべてが（同時空点を除き）反可換になる。（以下 $l_{ab}\equiv l'_{ab}$ と書く）

(2) カレント

形式的には

$$J^{a\pm}(x) = \Psi^{*a}_\pm(x)\Psi^a_\pm(x) = \psi^{*a}_\pm(x)\psi^a_\pm(x)\times\prod_{b(\neq a)}\Big(\varphi_F^{\,b}(x; -l_{ab}, -l_{ba})$$
$$\times\,\varphi_F^{\,b}(x; l_{ab}, l_{ba})\Big)$$

であるが，

$$\psi^{*a}_\pm(x)\psi^a_\pm(x) \fallingdotseq \lim_{x'\to x}\Big(\psi^{*a}_\pm(x')\psi^a_\pm(x) - \langle\psi^{*a}_\pm(x')\psi^a_\pm(x)\rangle\Big) \equiv j^{a\pm}(x)$$

$$\varphi_F^b(x;-l_{ab},-l_{ba})\,\varphi_F^b(x;l_{ab},l_{ba}) = \lim_{x'\to x}\frac{\varphi_F^b(x';-l_{ab},-l_{ba})\,\varphi_F^b(x;l_{ab},l_{ba})}{\langle \varphi_F^b(x';-l_{ab},-l_{ba})\,\varphi_F^b(x;l_{ab},l_{ba})\rangle} \equiv 1$$

と解釈する。第２のステップは，積のひきおこすべき回転が $\equiv 1$ となることから了解されるであろう。結局，相互作用を持つ場 $\Psi^a(x)$ のカレントは，自由場 $\psi^a(x)$ のカレントと同一視される： $J^{a\pm}(x) = j^{a\pm}(x) \equiv :\psi_\pm^{*a}(x)\psi_\pm^a(x):$。

（３）カレントとの積

(2) の解釈の下に

$$\tilde{J}^{b\pm}(x')\Psi^a(x) = \mp j^{b\pm}(x')\cdot\Psi^a(x)$$
$$= \psi^a(x)\left(\mp j^{b\pm}(x')\varphi_F^b(x;l_{ab},l_{ba})\right)\cdot\prod_{c(\neq a,b)}\varphi_F^c(x;l_{ac},l_{ca})$$

であるが，ここで 1. の結果を使うと

$$\lim_{x'\to x}\left(j^{b\pm}(x') - \frac{1}{i\sin\pi(l_{ab}-l_{ba})}\frac{1}{(x'-x)^{\mp}}\right)\cdot\varphi_F^b(x;l_{ab},l_{ba})$$
$$= \frac{\pm}{2\pi(l_{ba}-l_{ab})}\,i\partial_\mp\varphi_F^b(x;l_{ab},l_{ba}).$$

そこで，右辺を以て同時空点の積の定義とする。即ち

$$\lambda_{ab}\, j^{b\pm}(x)\cdot\varphi_F^b(x;l_{ab},l_{ba}) = \mp i\partial_\mp\varphi_F^b(x;l_{ab},l_{ba})$$
$$\lambda_{ab} = 2\pi(l_{ab}-l_{ba}) = -\lambda_{ba}.$$

故に

$$\lambda_{ab}\,\tilde{J}^{b\pm}(x)\Psi^a(x) = -i\partial_\mp\varphi_F^b(x;l_{ab},l_{ba})\cdot\psi^a(x)\cdot\prod_{c(\neq a,b)}\varphi_F^c(x;l_{ac},l_{ca}).$$

以上 (1)～(3) をまとめれば

$$(i\partial\!\!\!/ - m_a)\Psi^a(x) = (i\partial\!\!\!/ - m_a)\psi^a(x)\cdot\prod_{c(\neq a)}\varphi_F^c(x;l_{ac},l_{ca}) +$$

$$+\psi^a(x)\sum_{b(\neq a)} i\partial\!\!\!/ \varphi_F^b(x;l_{ab},l_{ba})\cdot\prod_{c(\neq a,b)}\varphi_F^c(x;l_{ac},l_{ca})$$
$$=-\sum_{b(\neq a)}\lambda_{ab}(\gamma^- j^{b+}(x)+\gamma^+ j^{b-}(x))\cdot\Psi^a(x)$$

を得て、運動方程式が確かめられた。結合常数 λ_{ab} が丁度モノドロミーの指数 $l_{ab}-l_{ba}$ にあたることに注意されたい。

演算子 $\varphi_F(x;l',l'')$ の積の真空期待値（の対数微分）は，変形理論と結びつけて非線型全微分方程式系の解を用いてあらわすことができる [1]。 従って Federbush 模型の n 点グリーン函数に対し厳密な閉じた形の表示が得られたことになる。

4. Federbush模型は，補助の自由場をフェルミオンとして解けたわけであるが，補助場をボゾンとして symplectic analogue をたどることもできる。

$\phi(x)$, $\phi^*(x)$ を複素スカラー場とし，$\hat{\Phi}(x)={}^t(\partial_+\phi(x), \partial_-\phi(x), m\phi(x))$ の満たす Kemmer 型方程式（Klein-Gordon の一階化）

$$(i\gamma^+\partial_+ + i\gamma^-\partial_- - m)\hat{\Phi}(x)=0$$

$$\gamma^+=\begin{bmatrix} & & -i \\ & & \\ & +\frac{1}{2}i & \end{bmatrix},\quad \gamma^-=\begin{bmatrix} & -i & \\ & & \\ +\frac{1}{2}i & & \end{bmatrix}\quad;\quad \partial_\pm=\partial_0\pm\partial_1$$

を考える。更に

$$\tilde{\Phi}(x)={}^t\hat{\Phi}^*(x)\cdot C,\qquad C=\begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

とおき，カレントを

$$m j^\pm(x) = -i{:}\tilde{\Phi}(x)\cdot\gamma^\pm\cdot\hat{\Phi}(x){:} = m j_\mp(x)$$

で定義する。成分で表わせば，$j^\pm(x)={:}\phi^*(x)\cdot i\partial_\mp\phi(x)-i\partial_\mp\phi^*(x)\cdot\phi(x){:}$

である。演算子 $\varphi_B(a;\ell',\ell'')$ を

$$\varphi_B(a;\ell',\ell'') = :e^{\rho_B(a;\ell',\ell'')/2}:$$

$$\rho_B(a;\ell',\ell'')/2 = \iint \underline{du}\,\underline{du'}\, R_B(u,u';\ell',\ell'')e^{-im(a^-(u+u')+a^+(u^{-1}+u'^{-1}))}\Phi^*(u)\Phi(u')$$

$$R_B(u,u';\ell',\ell'') = -2\sin\pi\ell\cdot e^{\pi i\ell''(\epsilon(u)-\epsilon(u'))}(u-i0)^{\ell}\cdot(u'-i0)^{1-\ell}P\frac{1}{u+u'}$$
$$+i(e^{\pi i\ell'\epsilon(u)}\sin\pi\ell' + e^{\pi i\ell''\epsilon(u)}\sin\pi\ell'')2\pi u\,\delta(u+u')$$

$$(\ \ell = \ell'-\ell''\ )$$

で定義すれば（cf. [1]），2. と全く同じ交換関係が φ_F を φ_B に，ψ,ψ^*をΦ,Φ^* にとりかえて成立する。

$$\Phi^a(x) = \tilde{\phi}^a(x)\prod_{b(\neq a)}\varphi_B^b(x;\ell_{ab},\ell_{ba})$$
$$\bar{\Phi}^a(x) = \bar{\tilde{\phi}}^a(x)\prod_{b(\neq a)}\varphi_B^b(x;-\ell_{ab},-\ell_{ba})$$

とおけば，同様の計算により

$$J^{a,\pm}(x) = -\frac{i}{m_a}\bar{\Phi}^a(x)\gamma^{\pm}\Phi^a(x) = j^{a,\pm}(x)$$

$$\mp j^{b\pm}(x)\cdot\varphi_B^b(x;\ell_{ab},\ell_{ba}) = \frac{1}{\lambda_{ab}}\partial_{\mp}\varphi_B^b(x;\ell_{ab},\ell_{ba})$$

$$\lambda_{ab} = 2\pi(\ell_{ab}-\ell_{ba})(1-\ell_{ab}+\ell_{ba})/(2(\ell_{ab}-\ell_{ba})-1)$$

等が導かれ，従って次のラグランジアンに対する模型の解を与える。

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}$$
$$\mathcal{L}_0 = \sum_{a=1}^{A}\bar{\Phi}^a(x)(i\partial\!\!\!/ - m_a)\Phi^a(x)\quad,\quad \partial\!\!\!/ = \gamma^+\partial_+ + \gamma^-\partial_-$$
$$\mathcal{L}_{int} = \frac{1}{2}\sum_{a,b=1}^{A}\lambda_{ab}(J^{a+}(x)J^{b-}(x) - J^{a-}(x)J^{b+}(x))$$

文献

[1] M. Sato, T. Miwa and M. Jimbo, RIMS preprint 263 (1978).

[2] P. Federbush, Phys. Rev. 121 (1960), 1247.

[3] A. S. Wightman, Cargese Lectures in Theoretical Physics. 1964, Gordon and Breach, New York, 1966.

[4] B. Schroer, T. T. Truong and P. Weisz, Ann. Phys. 102 (1976), 156.

[5] H. Lehmann and K. Stehr, Hamburg preprint DESY 76/29.