数理解析研究所講究録
第 349 巻 1979 年 64-78

A SEMI-CLASSICAL APPROACH TO THE BOSON-FERMION SYSTEM

高エ研・阪大教養　吉川圭二

概略　Boson と Fermion を同時に含む非線型系を量子論で取り扱う場合、準古典近似の概念が明確でない。ここでは、Dashen-Hasslacher-Neveu によって提案はされたけれども完全に実行されなかった Full-Semi-Classical 近似のやり方をのべて、1〜2の例に応用することを論ずる。尚、この仕事は、阪大教養部・佐藤雅昭君との共同の成果であり、くわしくは近々英文で出版される予定である。

§1. INTRODUCTION

素粒子論で、Fermion と Boson が強く結合している系を、非摂動的に解かなければならないのが重要な問題である。Boson だけの系は Semi-classical な方法が確立しているので、普通は、これに Fermion を量子効果として近似的な取りあつかいをしている。これはおそらく実情にあわないと考えられるの

で，このような問題を考えることになる。特にFermionとの結合をスイッチ・オフすると満足な古典解がないような例ではここにのべる方法が有効である。

実際には，n次元時空で

$$L = \bar{\Psi}[i\Gamma^{\mu}(\varphi)\partial_{\mu} - V(\varphi)]\Psi + L_B(\varphi) \qquad (1.1)$$

を考えて，一般的な議論を行う。ここに φ は Boson 場で，L_B はその Lagrangean（一般に非線型）。Γ^{μ}，$V(\varphi)$ を通じて Fermion 場 Ψ と結合している。

あとで具体的に応用する例は，Gross-Neveu model[1]

$$L_{GN} = \bar{\Psi}i\gamma\partial\Psi + \frac{g^2}{2}(\bar{\Psi}\Psi)^2 \quad , \quad \bar{\Psi}\Psi \equiv \sum_{k=1}^{N}\bar{\Psi}^{(k)}\Psi^{(k)}$$

$$= \bar{\Psi}[i\gamma\partial - g\sigma]\Psi - \frac{1}{2}\sigma^2 \qquad (1.2)$$

である。ここで σ は補助場であるが，Boson 場として (1.1) の φ に相当すると考えてよい。

§2. EFFECTIVE ACTION

この近似法の基本的な Idea は Dashen-Hasslacher-Neveu[2] の論文にのべられているが，ここではそこでやりあつせてない Quantum Flucturation を取り扱うようにするのが目的である。

有限時間の Partition Function を

$$Z = \int \exp\left[i\int_0^T dt \int d^{n-1}x \left\{ \bar\psi (i\Gamma^\mu \partial_\mu - V(\varphi))\psi + L_B(\varphi) \right\} \right] d\psi\, d\psi^\dagger d\varphi$$

$$= \int \det\left|\Gamma^0 (i\Gamma^\mu \partial_\mu - V)\right| \exp i\int_0^T d^n x\, L_B(\varphi) \quad d\varphi \qquad (2.1)$$

とする。最初の項 det. を求めるのには次の Eigen value を求めればよい：

$$[\, i\Gamma\partial - V(\varphi)\,]\, \xi_{A,n}(\vec{x}, t) = E_{A,n}\, \Gamma^0\, \xi_{A,n}(\vec{x}, t) \qquad (2.2)$$

但し

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\vec{x}, t) &= \varphi(\vec{x}, t+T) \\ \xi_{A,n}(\vec{x}, t) &= -\xi_{A,n}(\vec{x}, t+T) \end{aligned}\right\} \qquad (2.3)$$

なる Boundary Condition を置くとする。(2.3)の周期性は今、我々が周期解に興味をもっているからである。ξに関するマイナスの符号はそれがψ場の Fermion 性を保証するためである[(3)]。

このとき、(2.2) の $E_{A,n}$ は

$$[\, i\Gamma\partial - V(\varphi)\,]\, \psi_A(\vec{x}, t) = 0 \qquad (2.4)$$

$$\psi_A(\vec{x}, T) = e^{-i\zeta_A[\varphi]}\, \psi_A(\vec{x}, 0) \qquad (2.5)$$

を満すψ_Aが求まったときには、

$$E_{A,n} = -\frac{1}{T}\left[(2n+1)\pi + \zeta_A[\varphi]\right] \qquad (2.6)$$

$$\xi_{A,n}(\vec{x},t) = e^{-iE_{A,n}t}\,\psi_A(\vec{x},0) \qquad (2.7)$$

で与えられる。ここで、規格化は

$$\int_0^T d^4x\,\bar{\xi}_{A,n}\,\Gamma^0\,\xi_{A',n'} = T\,\delta_{A,A'}\,\delta_{n,n'} \qquad (2.8)$$

$$(\Gamma^0)^2 = 1$$

を使った。

(2.6)を(2.1)に代入して、適当なNormalizationを行うと

$$Z \propto \sum_{\{n_A\}} \exp\left[i\left\{\int_0^T L_B(\varphi)\,d^4x - \sum_A n_A|\zeta_A| - \sum_{A<0}\zeta_A\right\}\right] \qquad (2.9)$$

となる。但し $n_A = 0$ or 1 が A-stateにあるFermion数。

$\sum_{\{n_A\}}$ はあらゆる可能なFermion分布についての和。

一つの分布$\{n_A\}$が与えられたときのEffective Actionを

$$I_{eff}\{n_A\} = \int_0^T L_B(\varphi)\,d^4x - \sum_A n_A|\zeta_A(\varphi)| - \sum_{A<0}\zeta_A[\varphi] \qquad (2.10)$$

と定義する。

§3 SEMICLASSICAL EXPANSION

我々の近似法は、

(a) Z の計算に (2.9) の各項別に Exponent、即ち $I_{eff}\{m_A\}$ の stationary 近似を行う。（ φ を独立変数として ）

(b) I_{eff} の stationary 解を φ_{cl} と呼べば、I_{eff} を

$$\varphi = \varphi_{cl} + \eta \qquad (3.1)$$

と置いたとき、η について 2次項まで取って計算する。

このとき $E_{A,m}$ 即ち ξ_A の計算は (2.2) について、$\varphi = \varphi_{cl}$ に η なる摂動が入ったとして、計算できる。すなわち

$$D(\partial,\varphi) \equiv i\Gamma^\mu \partial_\mu - V = D^{(0)}(\varphi_{cl}) + D^{(1)}(\varphi_{cl},\eta) + D^{(2)}(\varphi_{cl},\eta) + \cdots$$

$$\Gamma^\mu(\varphi) = \Gamma^{(0)\mu} + \Gamma^{(1)\mu} + \Gamma^{(2)\mu} + \cdots$$

$$E_{A,m} = E^{(0)}_{A,m} + E^{(1)}_{A,m} + E^{(2)}_{A,m} + \cdots$$

$$\xi_{A,m} = \xi^{(0)}_{A,m} + \xi^{(1)}_{A,m} + \xi^{(2)}_{A,m} + \cdots \qquad (3.2)$$

と置いて、順序よく各次で計算する。

第0次の結論は良く知られたように

$$D^{(0)} \xi^{(0)}_{A,m} = E^{(0)}_{A,m} \Gamma^{(0)}_0 \xi^{(0)}_{A,m} \qquad (3.3)$$

$$\xi^{(0)}_{A,m}(\vec{x},T) = -\xi^{(0)}_{A,m}(\vec{x},0)$$

あるいは

$$\psi_A^{(0)}(\vec{x},t) \equiv e^{iE_{A,m}^{(0)}t}\,\xi_{Am}^{(0)}(\vec{x},t) \qquad (3.4)$$

を使えば

$$\left.\begin{aligned} &D^{(0)}\psi_A^{(0)} = 0 \\ &\psi_A^{(0)}(\vec{x},T) = e^{-i\zeta_A^{(0)}}\psi_A^{(0)}(\vec{x},0) \end{aligned}\right\} \qquad (3.5)$$

但し、

$$\int \overline{\Psi}_A^{(0)}(x)\,\Gamma_0^{(0)}\,\psi_{A'}^{(0)}(x)\,d^{n-1}x = \delta_{A,A'} \qquad (3.6)$$

第1次近似からは、

$$\psi_A^{(1)} \equiv e^{iE_{A,m}^{(0)}}\,\xi_{Am}^{(1)} \qquad (3.7)$$

としたとき、

$$E_{Am}^{(1)} = -\zeta_A^{(1)} = \int_0^T dt \int d^{n-1}x\ \overline{\Psi}_A^{(0)}\,D^{(1)}[\eta]\,\psi_A^{(0)} \qquad (3.8)$$

$$\psi_A^{(1)} = -\frac{1-P_A}{D^{(0)}[\varphi_{cl}]}D^{(1)}\psi_A^{(0)} \qquad (3.9)$$

ここに P_A は $\psi_A^{(0)}$ 状態への Projection operator.

この結果から、I_{eff} の stationary condition $\delta I_{eff}=0$ が求まる。即ち $\delta\varphi=\eta$ とすれば、(2.10)，(3.8)から

$$-\partial_\mu \frac{\partial L_B}{\partial(\partial_\mu \varphi)} + \frac{\partial L_B}{\partial \varphi} + \sum_A n_A \bar{\Psi}_A^{(0)} \frac{\partial D^{(1)}}{\partial \eta} \Psi_A^{(0)} + \sum_{A<0} \bar{\Psi}_A^{(0)} \frac{\partial D^{(1)}}{\partial \eta} \Psi_A^{(0)} = 0 \tag{3.10}$$

但し、この式の中の $\Psi_A^{(0)}$ は、(3.5)から求まるから

$$D^{(0)} \Psi_A^{(0)} = 0 \tag{3.11}$$

この連立方程式の解を classical solution

$$(\varphi_{cl}, \ \Psi_A^{(0)} \quad A = 1, 2, \cdots) \tag{3.12}$$

と呼ぶ。

第2次の結果は

$$-\zeta_A^{(2)} = -\int_0^T d^4x \ \bar{\Psi}_A^{(0)} D^{(1)}(\eta) \frac{1-P_A}{D^{(0)}} D^{(1)}(\eta) \Psi_A^{(0)} + \int_0^T d^4x \ \bar{\Psi}_A^{(0)} D_A^{(2)}(\eta) \Psi_A^{(0)} \tag{3.13}$$

よってこの近似の内では

$$I_{eff}\{n_A\} = S_{cl}\{n_A\} + \int L_B^{(Q)}(\eta) d^4x - \sum_{A \in \{n_A\}} \left| \zeta_A^{(2)}[\varphi_{cl}, \eta] \right| - \sum_{A<0} \zeta_A^{(2)}[\varphi_{cl}, \eta], \tag{3.14}$$

$$\{ n_A = 0, 1 \}$$

但し、

$$S_{cl} \equiv \int_0^T d^4x\, L_B[\varphi_{cl}] - \sum_{A\in\{n_A\}} |\zeta_A^{(0)}[\varphi_A]| - \sum_{A<0} \zeta_A^{(0)}[\varphi_{cl}] \tag{3.15}$$

$$L_B^{(Q)} \equiv \left.\frac{\delta^2 L_B}{\delta\varphi^2}\right|_{\varphi=\varphi_{cl}} \eta^2 \tag{3.16}$$

§4. NEW-AUXILIARY FIELDS AND LOCAL EFFECTIVE ACTION

(3.14) は Non-Local なので、補助場 χ_A を用いて、Local な Action を作ることができる。即ち

$$I_{eff}\{n_A\} = S_{cl} + I^Q \tag{4.1}$$

$$I^Q = \int d^4x \Big[L_B^{(Q)} + \sum_{\substack{A\in\{n_A\}\\ A<0}} L_{A.F}^{(Q)} \Big] \tag{4.2}$$

$$L_{A.F}^{(Q)} = \bar{\chi}_A D^{(0)} \chi_A + \bar{\Psi}_A^{(0)} D^{(1)}(\eta)\chi_A + \bar{\chi}_A D^{(1)}(\eta)\Psi_A^{(0)} + \bar{\Psi}_A^{(0)} D^{(2)}(\eta)\Psi_A^{(0)} \tag{4.3}$$

但し、Boundary conditions が

$$\int_0^T d^4x\, \bar{\Psi}_A^{(0)} \Gamma_0^{(0)} \chi_A = 0 \tag{4.4}$$

$$\chi_A(\vec{x},T) = e^{-i\zeta_A^{(0)}}\chi_A(\vec{x},0) \qquad (4.5)$$

$$\eta(\vec{x},T) = \eta(\vec{x},0) \qquad (4.6)$$

このとき$\{\chi_A\}$はすべてBose場として量子化してよい。(4.1)から逆に(3.14)はPath Integralの公式を用いて簡単に証明出来る。尚、あるFactorの割り算が必要なことを注意しておく。

このLocalなAction (4.2)はχ_Aの成分は無限個あるけれども、ずっと取り扱いやすい。一般論としては、このあと

(1) Renormalization

(2) Sum over all possible path

(3) Sum over all partitions $\{m_A\}$

を実行して、Energy spectrumを求めることになる。

§5. An Example — Gross-Neveu Model —

(1.2)のL_{GN}を考える。このときEffective Actionは

$$I_{eff}\{m_A\} = \int_0^T d^2x\left[-\frac{\sigma^2}{2}\right] - \sum_A n_A\zeta_A[\sigma] - \sum_{A<0}\zeta_A[\sigma]$$

$$= \left[\int_0^T d^2x\left\{-\frac{Z}{2}(\sigma^2-\sigma_0^2)\right\} - \sum m_A\zeta_A[\sigma] - \sum_{A<0}\left(\zeta_A[\sigma]-\zeta_A[\sigma_0]\right)\right]$$

（次ページへ続く）

$$+\left[LTZ\left(-\frac{1}{2}\sigma_0^2\right) - \sum_{A<0} \zeta_A[\sigma_0]\right] \qquad (5.1)$$

但し、(5.1) 右辺は Renormalized field σ を使って(同じ記号を使っているが)、Renormalization const. を Z と置いた。
σ_0 は σ の Asymptotic な値。

stationary condition は

$$-Z\sigma = \sum_A g m_A \bar{\psi}_A^{(0)}\psi_A^{(0)} - N\sum_{A<0}\psi_A^{(0)}\psi_A^{(0)} \qquad (5.2)$$

$$[i\gamma\partial - g\sigma(x)]\psi_A^{(0)} = 0 \qquad (5.3)$$

$$\int \psi_A^{\dagger(0)}\psi_A^{(0)}\,dx = 1 \qquad (5.4)$$

$m_A=0$ sector から Z をきめることができる。即ち

$$\left.\begin{aligned} -Z\sigma_0 &= -\sum_{A<0} N\,\tilde{\bar{\psi}}_A^{(0)}\tilde{\psi}_A^{(0)} \\ [i\gamma\partial - g\sigma_0]\tilde{\psi}_A^{(0)} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5.5)$$

$m_A \neq 0$ のときは Inverse Scattering Method を使って、($\sigma(x)$ が t-independent のとき)、ψ_A, σ_{cl} を求めることができる。また同時に σ_{cl} に trapp される Energy level も求めることができる。具体的には (ref. 2) を見よ。この結果

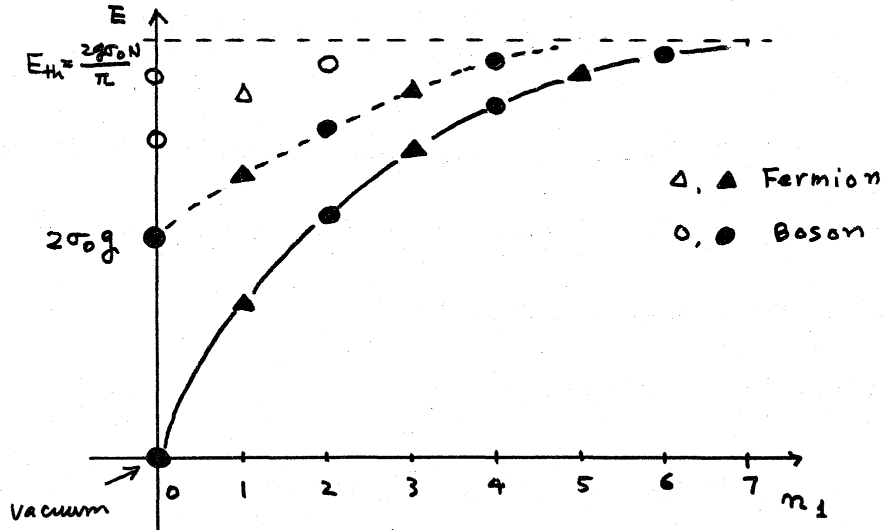


Fig. 1

$$E_{n_1} = \frac{2}{\pi} g\sigma_0 N \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{n_1}{N}\right) \tag{5.6}$$

ここで、Nは ψ の Isospin 成分数、n_1は φ_{cl} の中に trap された Fermion 数。これ以外の n_A はすべて Zero と取った。上図は N=7 の場合。まず classical solution から出る Energy Levels は上図の実線上のものだけである。

量子効果を求めるための Local Action は (4.2) に対応して

$$L^Q = -\frac{Z}{2}\eta^2 + \sum_{\substack{A\in\{n_A\} \\ A<0}} \left\{ \bar{\chi}_A (i\gamma\partial - g\sigma_{cl})\chi_A - g(\bar{\Psi}^{(0)}\chi_A + \bar{\chi}_A \Psi^{(0)}_A) \right\} \tag{5.7}$$

この場合、いきなり(5.7)を解くことができる。即ち χ_A, η の Euler Eq. は

$$\left.\begin{aligned}&(i\gamma\partial - g\sigma_{cl})\chi_A - g\eta\psi_A^{(0)} = 0\\ &-\eta(x,t)Z + \Sigma' g(\bar{\psi}_A^{(0)}\chi_A + \bar{\chi}_A\psi_A^{(0)}) = 0\end{aligned}\right\}(5.8)$$

または

$$\eta(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\eta_\nu(x)\,e^{-i\nu t}d\nu$$

とすると、(5.8)から

$$Z\eta_\nu(x) = -Ng^2\int dx'\,K_\nu(x,x')\,\eta_\nu(x') \tag{5.9}$$

ここに

$$K_\nu(x,x') = \sum_A{}'\,[\,\bar{\psi}_A^{(0)}(x)\,G_{E+\nu}(x,x')(1-P_A)\gamma^0\psi_A^{(0)}(x')$$

$$+\,\bar{\psi}_A^{(0)}(x')\,G^\dagger_{E-\nu}(x,x')(1-P_A)\gamma^0\psi_A^{(0)}(x)\,], \tag{5,10}$$

$$G_E(x,x') \sim \frac{-1}{i\gamma\partial - g\sigma_{cl}(x)}$$

あるいは、(5.9)は次の便利な(物理屋に取っては)、形に書き直せる。 $S_F^E(x,x')$ をpotential $\sigma_{cl}(x)$上のFeynmanのψ-field propagatorのEnergy Eに関するFourier成分とする。このとき(5.9)は

$$z\,\eta_\nu(x) = -\frac{ig^2N}{2\pi}\int_{C'} dE \int dx'\,\mathrm{tr}\left[S_F^{E}(x,x')\,S_F^{E-\nu}(x',x)\right]\eta_\nu(x') \tag{5.11}$$

と書ける。但し、E積分路は integrand の解析面上で、次の図に指定したもの C' を取る。これは Feynman の取り方と少し異る。

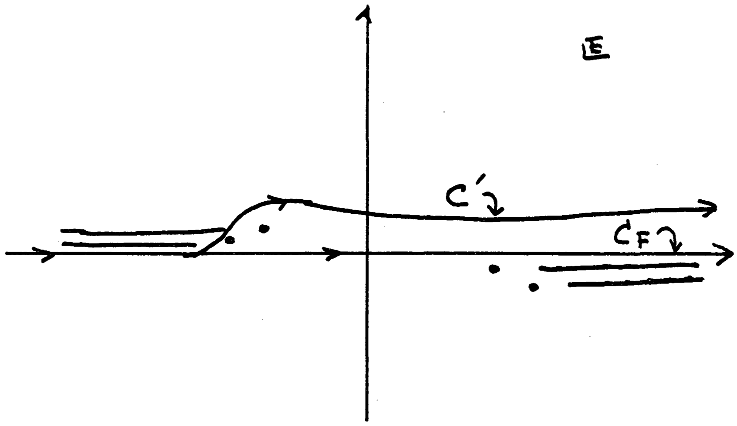
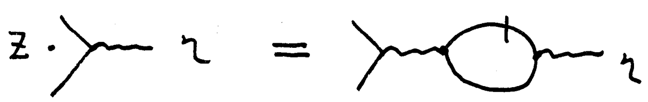


Fig. 2

Feynman Rule による積分路は実軸にそって行う C_F であるが、我々のは左半面にある Bound state の pole をまわった路 C' である。この物理的意味は明白で、次のように説明できる。(5.11) は Feynman グラフで書くと



と書けるが、1本の内線  は、Bound state の level にすでに Fermion が n_1 個 capture されているので、そこへ virtual な Fermion は入りこめないことを示している。

この結果は(5.11)のように積分路の変更で取り入れることができる。

次に注意することは、積分核(5.11)は実際には発散を含んでいる。しかしこの発散は、くりこみ定数 Z に含まれる発散と打ち消し合って、(5.11)は well defined な積分方程式となる。

実際、$m_1=0$ の場合は(5.11)は Forier 成分で diagonalize できて、

$$\frac{\sqrt{4m^2-\nu^2}}{2\sqrt{-\nu^2}}\ln\left[\frac{\sqrt{4m^2-\nu^2}+\sqrt{-\nu^2}}{\sqrt{4m^2-\nu^2}-\sqrt{-\nu^2}}\right]=0 \qquad (5.12)$$

となる。これは $\nu=\pm 2m\equiv\pm 2g\sigma_0$ に zero をもつ。即ち、$\sigma=\sigma_0$ のときの量子効果による Excitation は質量 $2g\sigma_0$ をもった scalar 場であることがわかった。これは Fig. 1 の ---- 線上の、一番下の黒丸で示してある。$m_1\neq 0$ の場合の積分方程式(5.11)は求まっているが、まだ解いていない。予想としては、Fig. 1 の ----- 線上のスペクトルは全部出ると思われる。其の他のものは、Time-dependent な解として、DHN(2) が求めたものが書きこんである。

おそらく、Time-dependent な解を求めるより、我々の方法に従って、time-independent な解 σ_{cl} を求めて、量子補正を求める方が、systematic である点で技術的にやさしい。

また、Gross-Neveu Modelについて云えば、Time-dependentな解が求まっているので、このまわりのQuantum Correctionを我々の方法で求めるのは可能であり、かつ面白い問題である。

この方法は、String Modelや、Bag Modelに応用するのには最適な方法であることを指適して、この論文をしめくくる。 (Jan. 23, 1979)

References

(1) D. J. Gross and A. Neveu , Phys. Rev. D10 , 3235 (1974)

(2) R. F. Dashen ; B. Hasslacher and A. Neveu , Phys. Rev. D12 2443 (1975).

(3) Y. Ohnuki , KEK Lecture note (1978)