数理解析研究所講究録
第 349 巻 1979 年 79-88

Gravitational Instanton

広島大 理論研　　冨松 彰

重力場におけるインスタントン解というのは，Einstein方程式を満足する，Euclidean signature を持った non-singularなメトリックのことである。この時空はトポロジカルな不変数によって特徴付けられる。コンパクトで向き付けられた微分可能な時空を考え，その次元をnとしよう。時空M上で定義されるP次微分形式の空間を$\Omega^P(M)$とすれば，

$$\Omega^P(M) \ni \omega = \frac{1}{P!} f_{\mu_1 \cdots \mu_p}(x)\, dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}$$

である。そして，この空間に対して，外微分 d，dual変換 $*$，および d の随伴作用素 δ が

$$d\omega = (1/(p+1)!) \sum_{i=1}^{p+1} (-)^{i+1} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_i}} f_{\mu_1 \cdots \mu_{i-1} \mu_{i+1} \cdots \mu_{p+1}}(x)\, dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_{p+1}},$$

$$\left(\Omega^P(M) \xrightarrow{d} \Omega^{P+1}(M) \right)$$

$$*\omega = ((n-p)!\, p! \sqrt{g})^{-1} \epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_p \nu_1 \cdots \nu_{n-p}} f_{\mu_1 \cdots \mu_p}(x)\, dx_{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx_{\nu_{n-p}},$$

$$\left(\Omega^P(M) \xrightarrow{*} \Omega^{n-P}(M) \right)$$

$$\delta\omega = (-)^{np+n+1} * d * \omega \quad \left(\Omega^P(M) \xrightarrow{\delta} \Omega^{P-1}(M) \right),$$

と定義できる。すると，Mの不変数であるEuler標数χは

$$\chi = \sum_{p=0}^{n}(-)^p \dim H^p(M)$$

$H^p(M)$：p次コホモロジー群 $\equiv Z^p(M)/B^p(M)$

$Z^p(M)$：$\{\omega \mid d\omega = 0,\ \omega \in \Omega^p(M)\}$

$B^p(M)$：$\{\omega \mid \omega = d\omega',\ \omega' \in \Omega^{p-1}(M),\ \omega \in \Omega^p(M)\}$

となる。また，$n = 4l$（l：整数）の時は，Mのsignatureと呼ばれる不変数τが存在する。$H^{2l}(M)$の基底を（$\omega_1, \cdots, \omega_r, \omega_{r+1}, \cdots, \omega_{r+s}$）ととった時，

$$*\omega_i = \begin{cases} \omega_i & : 1 \leq i \leq r \\ -\omega_i & : r+1 \leq i \leq r+s \end{cases}$$

とすれば，$\tau = r - s$である。もし$n = 4$であれば，Mを分類するための不変数としては，χとτの2種類で十分であり，それらはMの曲率テンソルによって

$$\chi = (128\pi^2)^{-1} \int_M d^4x \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\mu\nu\alpha\beta} R_{\rho\sigma\gamma\delta},$$

$$\tau = (96\pi^2)^{-1} \int_M d^4x\, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} R_{\rho\sigma\alpha\beta}$$

と書かれる。Pontrjagin 数と呼ばれる不変数Pは

$$P = 3\tau \quad (\text{Pは3の倍数})$$

という関係にある。

さらに，Hodge operator $D \equiv d + \delta$（$D^2 = d\delta + \delta d$ はLaplace operator Δ）を用いて，微分形式の全空間$\Omega(M) \equiv \bigoplus_{p=0}^{n} \Omega^p(M)$を部分空間$\Omega^e(M)$及び$\Omega^o(M)$（又は$\Omega^+(M)$，$\Omega^-(M)$）に

分割しよう。ただし，$\Omega^e(M)$, $\Omega^o(M)$はoperator Γ_5^E : $\Gamma_5^E\omega = (-)^p\omega$ の固有空間であり，その固有値はそれぞれ +1, −1 となっている。$\Omega^+(M)$, $\Omega^-(M)$は operator Γ_5^H ; $\Gamma_5^H\omega = (-)^{p(p+1)/2} *\omega$ の，固有値 +1, −1 に対応する固有空間である。Γ_5^E (Γ_5^H) と D とは反交換するので，

$$D_E\ (D_H) : \Omega^e(M)\ (\Omega^+(M)) \longrightarrow \Omega^o(M)\ (\Omega^-(M)),$$
$$D_E^+\ (D_H^+) : \Omega^o(M)\ (\Omega^-(M)) \longrightarrow \Omega^e(M)\ (\Omega^+(M))$$

という operator が定義できる。D_E 又は D_H の index を

$$\mathrm{ind}\, D_E\ (D_H) \equiv \dim \mathrm{Ker}\, D_E\ (\mathrm{Ker}\, D_H) - \dim \mathrm{Ker}\, D_E^+\ (\mathrm{Ker}\, D_H^+)$$

と定義すれば，いわゆる Index Theorem[1)]

$$\chi = \mathrm{ind}\, D_E \quad , \quad \tau = \mathrm{ind}\, D_H$$

が得られる。特に $n = 4$ の場合には

$$\mathrm{ind}\, D_E = \int_M \sqrt{g}\, d^4x\, \Big(\bar{f}_{0i} f_{0i} - \bar{f}_{0i\mu} f_{0i}{}^{\mu} + \frac{1}{2} \bar{f}_{0i\mu\nu} f_{0i}{}^{\mu\nu} - {}^*\bar{f}_{0i\mu}\, {}^*f_{0i}{}^{\mu} + {}^*\bar{f}_{0i}\, {}^*f_{0i} \Big),$$

$$\mathrm{ind}\, D_H = \int_M \sqrt{g}\, d^4x\, \Big(-{}^*\bar{f}_{0i} f_{0i} + {}^*\bar{f}_{0i\mu} f_{0i}{}^{\mu} + \frac{1}{2} {}^*\bar{f}_{0i\mu\nu} f_{0i}{}^{\mu\nu} + \bar{f}_{0i\mu}\, {}^*f_{0i}{}^{\mu} - \bar{f}_{0i}\, {}^*f_{0i} \Big)$$

と書ける。i についての和は Hodge operator のすべての正規直交化された zero mode についてとられるべきである。つまり，トポロジカルな不変数 χ，τ は時空M上に存在しうる質量のない(擬)スカラー場，(擬)ベクトル場等の mode 数と関係していることがわかる。もし，M上にスピノールを定義できる場

合には，Hirzebruchの$\hat{A}$-genusと呼ばれる不変数$\hat{A}$が存在し，$\hat{A}=-\tau/8$，つまりτは8の倍数になる。この場合には，Dirac operator D_A に対するIndex Theorem $\hat{A}=\mathrm{ind}\, D_A$ が成立する。

$$\mathrm{ind}\, D_A = \int_M \sqrt{g}\, d^4x\, \psi_{0i}^{+} \gamma_5 \psi_{0i} = n_R - n_L ,$$

ここで，$n_R(n_L)$はright-hand (left-hand) helicityのharmonicスピノールのmode数である。

$\tau \neq 0$で，かつ8の倍数になっているような時空のメトリックはまだ具体的には発見されていない。しかし，コンパクトで，first Chern classが零で，complex analytic nonsingularなK3と呼ばれているメトリックの存在は証明されており，その曲率テンソルはself-dual（つまりEinstein方程式の真空解）であり，58コのパラメーターを持ち，$\tau=16$である。[2)]

方程式$D\omega=0$を与えるLagrangianは変換$\omega \to e^{\alpha\Gamma_5^E}$（又は$e^{\alpha\Gamma_5^H}$）$\omega$ $(\alpha\in\mathbb{R})$に対して不変になり，形式的にはconserved Noether current $j^{\mu,E}$（又は$j^{\mu,H}$）が得られる。しかし，場$f_{\mu_1\cdots\mu_p}$を量子化すると，$\nabla_\mu j^\mu$の計算過程において発散が生じ，それを除去するための正則化が必要になる。その際に不変性が破れるために，いわゆるcurrent anomalyが発生する．計算の結果[1)]，

$$\nabla_\mu j^{\mu,E} = (64\pi^2)^{-1} g^{-1} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\mu\nu\alpha\beta} R_{\rho\sigma\gamma\delta}$$

$$-2(\bar{f}_{0i}f_{0i}-\bar{f}_{0i\mu}f_{0i}{}^{\mu}+\frac{1}{2}\bar{f}_{0i\mu\nu}f_{0i}{}^{\mu\nu}-{}^{*}\bar{f}_{0i\mu}{}^{*}f_{0i}{}^{\mu}+{}^{*}\bar{f}_{0i}{}^{*}f_{0i}),$$

$$\nabla_\mu j^{\mu,H}=(48\pi^2)^{-1}(\sqrt{g})^{-1}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}R_{\rho\sigma\alpha\beta}$$
$$-2(-{}^{*}\bar{f}_{0i}f_{0i}+{}^{*}\bar{f}_{0i\mu}f_{0i}{}^{\mu}+\frac{1}{2}{}^{*}\bar{f}_{0i\mu\nu}f_{0i}{}^{\mu\nu}+\bar{f}_{0i\mu}{}^{*}f_{0i}{}^{\mu}-\bar{f}_{0i}{}^{*}f_{0i})$$

が得られる。これらの式を積分すると，$\int_M \nabla_\mu j^\mu \sqrt{g}\, d^4x = 0$ とすれば，右辺から Index Theorem を導くことができる。この意味で，current anomaly の式は Index Theorem の local version と考えられる。スピノールが定義される場合には，それを用いて axial current を作れば，同様な結論を導くことができる。なお，M の境界からの寄与が存在する場合には，Index Theorem を表わす式には修正が必要になる。

current anomaly は Yang-Mills 場においても存在したが，重力場では別種の anomaly も発生する。質量のないスカラー場 $\phi(x)$ を考えよう。

$$(\nabla_\mu\nabla^\mu-\frac{\alpha}{6}R)\phi(x)=0\ ,$$

ここで，R は時空の Ricci スカラーで，α は任意のパラメーターである。$\alpha=1$ の時は，上式は $g_{\mu\nu}$ と ϕ の conformal 変換に対して不変になる。$F(t;x,x')$ を x' から x へスカラー場が parameter time t で伝播する amplitude とすると，

$$\frac{\partial}{\partial t}F=(\nabla_\mu\nabla^\mu-\frac{\alpha}{6}R)F\ ,$$
$$F(t=0;x,x')=\delta^{(4)}(x,x')$$

が成り立つ。固有値方程式

$$(\nabla_\mu \nabla^\mu - \frac{\alpha}{6} R)\phi_i(x) = \lambda_i \phi_i(x) ,$$
$$0 \geq \lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \cdots\cdots$$

を満足する，正規直交化された固有関数$\phi_i(x)$を用いると，熱方程式の解は

$$F(t; x, x') = \sum_i \exp(\lambda_i t)\phi_i(x)\phi_i(x')$$

と書ける。よって，分配関数Zは

$$Z \equiv \int_M F(t; x, x)\sqrt{g}\, d^4x = \sum_i \exp(\lambda_i t)$$

となる。$t \simeq 0$付近で

$$(4\pi t)^2 Z(t) = \sum_{i=0} B_i t^i$$

と展開すれば[3]，

$$B_0 = \int_M \sqrt{g}\, d^4x = (\text{Mの体積}),$$
$$B_1 = \frac{1}{6}(1-\alpha)\int_M R\sqrt{g}\, d^4x ,$$
$$B_2 = (180)^{-1}\int_M \Big(R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} - R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \frac{5}{2}(1-\alpha)^2 R^2 + (6-5\alpha)\nabla_\mu\nabla^\mu R\Big)\sqrt{g}\, d^4x$$

となる。特に，$\alpha = 1$の場合，

$$B_2 = (4\pi)^2 \int_M T^\mu{}_\mu(x)\sqrt{g}\, d^4x ,$$

ここで，$T^\mu{}_\mu(x)$はこのスカラー場の作るエネルギー・運動量テンソルのtraceである。$\alpha = 1$の場合，ϕのLagrangianはconformal変換に対して不変であるので，本来，$T^\mu{}_\mu = 0$であるが，ϕを量子化すると，$T_{\mu\nu}$の計算には正則化が必要になり，不変性が破れてしまう。そのために，$T^\mu{}_\mu \neq 0$となり，

いわゆる conformal anomaly $T^{\mu}{}_{\mu}$ が発生する[4)]。スカラー場の場合には，$\nabla_\mu \nabla^\mu R$ の係数を除けば（この係数は Lagrangian に R^2 の項を付加することで自由に変えられる），種々の正則化の方法は同一の $T^{\mu}{}_{\mu}$ を与えている。そして，$\phi(x)$ の分配関数 $Z(t)$ は，この conformal anomaly $T^{\mu}{}_{\mu}$ と

$$Z(t) \simeq V(M)\, t^{-2} + \int_M T^{\mu}{}_{\mu} \sqrt{g}\, d^4x + O(t)$$

という関係で結ばれている。$\alpha = 0$ の場合には，スカラー場だけでなく，一般の P 次微分形式（ただし $D\omega = 0$）を考え，$Z^{(P)} \equiv \sum_i \exp(\lambda_i^{(P)} t)$ を計算すると，それは時空の Euler 標数 χ と

$$\chi = \sum_{p=0}^{4} (-)^P Z^{(P)}$$

という関係で結びつけられることが証明できる[3)]。もし，境界からの寄与があれば，Index Theorem の場合と同様に，$Z(t)$ の式も修正を受けることになる。

重力場のインスタントン解の action $I[g]$ は

$$I[g] = -(16\pi)^{-1} \int_M R \sqrt{g}\, d^4x - (8\pi)^{-1} \int_{\partial M} [K] \sqrt{h}\, d^3x$$

と書ける。第2項は境界 ∂M からの寄与で，K は ∂M 上の第2基本形式の trace であり，$[K]$ は flat space との差を示している。Einstein 方程式の真空解（$R = 0$）で漸近的に flat（Euclid 的に）になるインスタントン解を考えると，その action I は正又は 0 であるという推測がある。それを“

Positive Action Conjecture" と呼ぶ。[5] さらに，flat space の時にのみ I＝0になるという仮定が付加されると，flatなメトリック以外には，考えているようなインスタントン解は存在しないという結論に達する。なぜならば，I はスケール変換に対して不変でないので，I＞0を与えるメトリックはIの極値をとることはできないからである。故に，もしこれらの推測が正しいとすれば，漸近的にflatな解を得るためには，例えば，Yang-Mills場と相互作用している重力場を考えなければならない。そのような例は，すでに，具体的に与えられている。[6]

重力場のインスタントン解の物理的効果についてはあまり議論は進んでいない。現在最も興味深いのは，重力場（そのsignatureはMinkowski型）中でのスカラー粒子等の粒子対生成に関連しての議論であろう。例えば，black hole を表わしているSchwarzshildメトリックは，そのsignatureをEuclid化した時，Euler標数 $\chi=2$ のインスタントン解になる。元のsignatureを持ったblack hole 時空での粒子の熱的生成現象とこの性質とは密接なつながりを持っている。[7] また，flatなMinkowski時空において一様な加速度運動している観測者は，時空中で粒子対生成が起っているのを観測することが知られている。この現象の原因は，加速度運動して

いる観測者の時空は，慣性系にいる観測者の通常の時空と異なった境界を持っているために，Euclid化された時にも通常の時空と異なったEuler標数を得るようになるということであるとも考えられる。[8] その外，漸近的にflatで，Euclid型のsignatureの，Yang-Mills場を源とする重力場[6]も−2のEuler標数を持っているが，そのsignatureをMinkowski型に変換した時，この重力場によっても粒子対生成が起るということが示されている。[9] しかし，path-integral法による取扱いを初めとして，理論的に未解決な点も多く，重力場のインスタントンの効果を明らかにするには一層の理論的進歩が望まれる。

References

1) N. K. Nielsen, H. Römer and B. Schroer, Nucl. Phys. B136 (1978), 475.

2) D. N. Page, Phys. Letters 80B (1978), 55.

3) S. W. Hawking, Phys. Rev. D18 (1978), 1747.

H. P. McKean and I. M. Singer, J. Diff. Geom. 1 (1967), 43.

4) 例えば

M. J. Duff, Nucl. Phys. B125 (1977), 334.

5) D. N. Page, Phys. Rev. D18 (1978), 2733.

真空解の例としては，

T. Eguchi and A. Hanson, Phys. Letters 74B (1978), 249.

G. W. Gibbons and C. N. Pope, Commun. Math. Phys. 61 (1978), 239.

G. W. Gibbons and S. W. Hawking, Phys. Letters 78B (1978), 430.

6) A. Tomimatsu, Prog. Theor. Phys. 59 (1978), 2096.

7) S. W. Hawking, Phys. Letters 60A (1977), 81.

8) S. M. Christensen and M. J. Duff, Nucl. Phys. B146 (1978), 11.

9) A. Tomimatsu, Prog. Theor. Phys. 60 (1978), 414.