数理解析研究所講究録
第 350 巻 1979 年 1-17

函数環における予報理論型の問題について

東北大・養　　大野芳希
京都工繊大・工短　　薮田公三

1°. 一次元定常確率過程の予報問題に関連して，次の3つがよく知られている。

1. (Szegő)　$0<p<\infty$, $\mu \in M^+(\mathbb{T})$：単位円周上の非負測度全体，とする．

$$\inf \int_0^{2\pi} |1-f|^p d\mu = \exp \int_0^{2\pi} (\log w) \frac{d\theta}{2\pi}$$

ここで $w\frac{d\theta}{2\pi}$ は $d\mu$ の Lebesgue 測度 $d\theta$ に関する絶対連続部分、inf は $a_1 e^{i\theta} + a_2 e^{i2\theta} + \cdots + a_n e^{in\theta}$ の形の三角多項式全体を動かすときのもの．

2. (Kolmogorov)　$0 \le w \in L^1(\mathbb{T})$ とすると，

$$\inf \int_0^{2\pi} |1+f+\bar{g}|^2 w \frac{d\theta}{2\pi} = \left[\int \frac{1}{w} \frac{d\theta}{2\pi} \right]^{-1}$$

ただし，f, g は 1 の形の三角多項式を動くものとする。

3. (Helson-Szegő-Sarason)　$\mu \in M^+(\mathbb{T})$ に対して

$$\rho_n(\mu) = \sup\left\{ \left| \int f\bar{g}\,d\mu \right| \;:\; \begin{array}{l} f \in \mathrm{span}\{1, e^{i\theta}, \cdots\},\ \int |f|^2 d\mu \leq 1 \\ g \in \mathrm{span}\{e^{-in\theta}, e^{-i(n+1)\theta}, \cdots\},\ \int |g|^2 d\mu \leq 1 \end{array} \right\}$$

とおく。すると、

(イ) $\rho_n(\mu) < 1 \iff d\mu = |a_0 + a_1 e^{i\theta} + \cdots + a_{n-1} e^{i(n-1)\theta}|^2 \exp(r + \tilde{s}) \frac{d\theta}{2\pi}$
となる，$a_j \in \mathbb{C}$ と $r, s \in L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$（実数値有界函数）で
$\|s\|_\infty < \frac{\pi}{2}$ となるものが存在する。

(ロ) $\lim_{n\to\infty} \rho_n(\mu) = 0 \iff d\mu = |P(e^{i\theta})|^2 \exp(u + \tilde{v}) \frac{d\theta}{2\pi}$
となる $P(e^{i\theta}) = a_0 + a_1 e^{i\theta} + \cdots + a_k e^{ik\theta}$ と，$u, v \in C_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$
が存在する。

（上で $\tilde{s}$ は s の共役函数）。

さて 1, 2 及び 3(イ) $n=0$ の場合は，一意表現測度を持った函数環で全く同じような定理が成り立つことは，よく知られている。(例えば Gamelin[4] の本）又は[15]。ここでは，3(イ),(ロ) が Helson-Szegö, Helson-Sarason の idea に沿い，彼等の議論を適当に修正すると，成り立つことを述べ，証明の概略を述べる。

A を compact Hausdorff 空間 X 上の函数環，dm を A のある複素準同型写像 m の一意的な表現測度とし，m の核を A_0 とする。A_0 の n ケの元の積から生成されたイデアルを A_0^n と

書く。Aの$L^\infty(dm)$におけるw*閉包をH^∞とし，$H_0^\infty=\{f\in H^\infty:\int f\,dm=0\}$とおく。$(H_0^\infty)^n$も$A_0^n$と同様にして定義する。さて$m$のGleason part $G(m)$が$\{m\}$のみでないなら，$H_0^\infty=ZH^\infty$となる内部函数Z（Wermerのembedding functionとよばれる）が存在する。そして，任意の$\mathbb{T}$上の可測集合Eに対して，

(1) $m\{x\in X: Z(x)\in E\}=L(E)$（: Eの正規化ルベーグ測度） ([17, Cor. 1])

が成り立つ。よって$\mathbb{T}$上の可測函数$u(e^{i\theta})$に対して，$Z(x)$との合成函数$u(Z)$を$u(Z)(x)=u(Z(x))$として定義できる。

さて$\nu\in M^+(X)$に対して

$$\rho_n(\nu)=\sup\left\{\left|\int fg\,d\nu\right| : f\in A,\ g\in A_0^n,\ \int|f|^2d\nu\le 1,\ \int|g|^2d\nu\le 1\right\}$$

を導入する。

明らかに $1\geq\rho_1(\nu)\geq\rho_2(\nu)\geq\cdots\geq 0$, で，Helson-Szegö-Sarasonの定理の一般化として次を得る。

定理 1. $G(m)=\{m\}$とする。

(i) $\rho_n(\nu)\to 0 \iff {}^{\exists}c>0: d\nu=c\,dm \iff \rho_n(\nu)=0\ (n=1,2,\cdots)$.

(ii) $\rho_n(\nu)<1 \iff {}^{\exists}r,s\in L^\infty_{\mathbb{R}}(dm): d\nu=\exp(r+\tilde{s})\,dm$, $\|s\|_\infty<\frac{\pi}{2}$

ここで$\tilde{s}$はsの一般化された意味での共役函数.

定理2. $G(m) \neq \{m\}$ とし, Z は Wermer の embedding function とする。

(i) $\rho_n(\nu) \longrightarrow 0 \iff \exists u, v \in C_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$, $\exists P(z)$: z の多項式;

$$d\nu = |P(Z)|^2 \exp(u(Z) + \tilde{v}(Z))\, dm$$

($\tilde{v}$ は通常の共役函数)

(ii) $\rho_n(\nu) = 0 \iff \exists P(z)$: $\deg P < n$ なる多項式:

$$d\nu = |P(Z)|^2 dm$$

(iii) $\rho_n(\nu) < 1 \iff \exists r, s \in L^\infty_{\mathbb{R}}(dm)$, $\|s\|_\infty < \frac{\pi}{2}$, $\exists P(z)$: $\deg P < n$ なる多項式

$$d\nu = |P(Z)|^2 \exp(r + \tilde{s})\, dm,$$

($\tilde{s}$ は s の一般化された意味の共役函数).

2°. ここでは定理1と定理2(i)の証明の概略を述べる.

まず

Lemma 1. $\rho_n(\nu) < 1 \Rightarrow d\mu \ll dm$.

$\because$) $d\nu = w\,dm + d\nu_s$, $d\nu_s \perp dm$ とする。$d\nu_s \neq 0$ と仮定する。

すると $\exists E$: Baire set $\nu_s(X-E) = 0$, $m(E) = 0$. さらに E は F_σ-set としてとれる。よって Forelli's lemma (Gamelin [4], Lemma 7.3) により,

$\exists f_n \in A$: $\|f_n\|_\infty \leq 1$, $f_n(x) \longrightarrow 0$ $(x \in E)$, $f_n(x) \rightarrow 1$ m-a.e.。

よって $\int|f_n-\chi_{X-E}|^2d\nu=\int_{X-E}|f_n-1|^2wdm+\int_E|f_n|^2d\nu_s\to 0.$

従って $\|f_n-1+\chi_E\|_{L^2(d\nu)}\to 0,\ n\to\infty.$ $\varepsilon_n=\int(f_n-1)dm$ とおき,

$g_n=f_n-1-\varepsilon_n$ とおく。すると $g_n\in A_0$ で $\varepsilon_n\to 0$. よって

$$\|g_n+\chi_E\|_{L^2(d\nu)}=\|f_n-1+\chi_E+\varepsilon_n\|_{L^2(d\nu)}\leqq\|f_n-1+\chi_E\|_{L^2(d\nu)}+\|\varepsilon_n\|_{L^2(d\nu)}\to 0.$$

$\therefore\ \chi_E\in[A_0]_{L^2(d\nu)}$: A_0 の $L^2(d\nu)$-closure。これより, 帰納的に

$\chi_E\in[A_0^n]_{L^2(d\nu)}$ $(n=1,2,\cdots)$ がいえる。実際 $\chi_E\in[A_0^k]_{L^2(d\nu)}$ と仮定

すると, 任意の $\varepsilon>0$ に対して $\exists$ non-zero $f_1\in A_0^k$: $\|\chi_E-f_1\|_{L^2(d\nu)}<\varepsilon$. 又

$$\int|\chi_E-\chi_E f_1|^2d\nu+\int|f_1|^2wdm=\int|\chi_E-f_1|^2d\nu \quad より$$

$\|\chi_E-\chi_E f_1\|_{L^2(d\nu)}<\varepsilon$. 又 $\chi_E\in[A_0]_{L^2(d\nu)}$ より $\exists$ non-zero $f_2\in A_0$:

$\|\chi_E-f_2\|_{L^2(d\nu)}<\varepsilon/\|f_1\|_\infty$. よって

$$\|\chi_E-f_1f_2\|_{L^2(d\nu)}\leqq\|\chi_E-\chi_E f_1\|_{L^2(d\nu)}+\|\chi_E f_1-f_1f_2\|_{L^2(d\nu)}$$
$$<\varepsilon+\|f_1\|_\infty\|\chi_E-f_2\|_{L^2(d\nu)}<2\varepsilon.$$

$\therefore\ \chi_E\in[A_0^{k+1}]_{L^2(d\nu)}$. よって $n=1,2,\cdots$ に対して

$\rho_n(\nu)\geqq\frac{1}{\|\chi_E\|^2_{L^2(d\nu)}}\int\chi_E\chi_E\,d\nu=1$, これは $\rho_n<1$ に矛盾. ☆

Lemma 2. $0\leqq w\in L^1(dm)$, $\rho_n(wdm)<1\Longrightarrow\log w\in L^1(dm)$.

$\because$) Szegö の Th から, $\log w\notin L^1(dm)$ なら

$\inf\{\int|1-f|^pwdm : f\in A_0\}=0$, $0<p<\infty$.

$p=4n$ として、 $\exists f_k \in A_0 : \|f_k - 1\|_{L^p(w\,dm)} \to 0$.

$$\int |f_k^n - 1|^2 w\,dm \leqq \left\{\int |f_k - 1|^4 w\,dm\right\}^{1/2} \left\{\int |f_k^{n-1} + f_k^{n-2} + \cdots + 1|^4 w\,dm\right\}^{1/2}$$

$$\leqq \|f_k - 1\|^2_{L^4(w\,dm)} \left\{\|f_k^{n-1}\|_{L^4(w\,dm)} + \cdots + \|1\|_{L^4(w\,dm)}\right\}^2$$

$$\leqq \|f_k - 1\|^2_{L^4(w\,dm)} \left\{ KM^n + K^2M^{n-2} + \cdots + K^n \right\}^2$$

ただし, $K = \left(\int w\,dm\right)^{1/4n}$, $M = \sup_k \|f_k\|_{L^{4n}(w\,dm)}$.

$\therefore\ 1 \in [A_0^n]_{L^2(w\,dm)}$, $\therefore\ \rho_n = 1$, 矛盾.

<u>定理1の証明</u>. まず $G(m) = \{m\} \Longleftrightarrow [A_0 H_0^\infty]_* = H_0^\infty$: $[\ \ ]_*$ は weak*-($\sigma(L^\infty(dm), L^1(dm))$)-closure. よって $\rho_n(\nu) < 1$ とすると, Lemma 1, 2 より $d\nu = w\,dm$: $0 < w \in L^1(dm)$, $\log w \in L^1(dm)$ と書ける. よって $w > 0$ m-a.e. これより

(2) $\sigma(L^\infty(dm), L^1(dm)) = \sigma(L^\infty(d\nu), L^1(d\nu))$.

$[A_0 H_0^\infty]_* = H_0^\infty$ より

$$[A_0]_{L^2(dm)} = [H_0^\infty]_{L^2(dm)} = [A_0 H_0^\infty]_{L^2(dm)} = [A_0^2]_{L^2(dm)} .$$

また中野[10]の Lemma 1 により

$$[A_0^k]_* = [[A_0^k]_*]_{L^2(dm)} \cap L^\infty(dm) = [A_0^k]_{L^2(dm)} \cap L^\infty(dm) ,\quad k=1,2,\cdots$$

$\therefore\ H_0^\infty = [A_0]_* = [A_0^2]_*$. これより帰納的に

(3) $H_0^\infty = [A_0]_* = [A_0^2]_* = \cdots = [A_0^n]_* = \cdots$.

よって (2) により $H_0^\infty \subset [A_0^n]_{L^2(d\nu)}$ $(n=1,2,\cdots)$

さて $dv = w\,dm$ の w が定数でないとしよう。すると m の表現測度が一意なことより $[A+\bar{A}_0]_* = L^\infty(dm)$ であるから、$\exists f \in A_0$; $\int f w\,dm \neq 0$. しかし、$H_0^\infty \subset [A_0^n]_{L^2(w\,dm)}$ だから $f \in [A_0^n]_{L^2(dv)}$

$\therefore\ \rho_n(v) \geqq \left|\int 1 \times f w\,dm\right| / \left(\int 1^2 w\,dm \int |f|^2 w\,dm\right)^{1/2} > 0$。よって $\lim_{n\to\infty} \rho_n(v) = 0$ ならば $\exists c > 0$ $dv = c\,dm$. このとき $\rho_n(v) = 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ は明らか。

よって (i) は示された。次に $\rho_n(v) < 1$ とする。すると $dv = w\,dm$; $0 < w \in L^1(dm)$, $\log w \in L^1(dm)$ で (3) より $\rho_1(v) = \rho_k(v)$ $(k = 1, 2, \cdots)$ となる。よって大野 [12] の Theorem 1 により $dv = \exp(r + \tilde{s})\,dm$; $r, s \in L^\infty_{\mathbb{R}}(dm)$, $\|s\|_\infty \leqq \frac{\pi}{2}$ と書ける。又この時の定義 $\rho_1(v) < 1$ だから上のことより $\rho_n(v) < 1$ となる。☆

さて、定理2の証明にも最初から (Lemmas 1, 2 により) $dv = w\,dm$, $0 < w \in L^1(dm)$, $\log w \in L^1(dm)$ としてよい。そこで

$\phi = (\log w)^\sim$ とおく。このとき $w = |h|^2$, $h^2 = \exp(\log w + i(\log w)^\sim)$ $h \in H^2(m)$, 外部関数となるから $w = h^2 e^{-i\phi}$ となる。これらのことから、ρ_n の定義の A_0, A_0^n を H_0^∞, $(H_0^\infty)^n$ で置き換えてもよいことが容易に分る。このとき $(H_0^\infty)^n = Z^n H^\infty$ であることに注意すれば

$$\rho_n(v) = \sup\left\{\left|\int f h\, g h\, Z^n e^{-i\phi}\,dm\right| ; f, g \in H^\infty, \|f\|_{L^2(w\,dm)}, \|g\|_{L^2(w\,dm)} \leqq 1\right\}$$

又 h: 外部関数であるから $\{fh \cdot gh ; f, g \in H^\infty, \|fh\|_{L^2(m)} \leqq 1, \|gh\|_{L^2(m)} \leqq 1\}$ は $H^1(dm)$ で dense になる。よって

(4) $\rho_n(\nu) = \sup\{ | \int f Z^n e^{-i\phi} dm | ; f \in H^1(dm), \|f\|_{L^1(dm)} \leqq 1 \}$.

これは $T : f \longrightarrow \int f Z^n e^{-i\phi} dm$ の $H^1(dm)$ 上の operator norm が ρ_n であることを示す。よって Hahn-Banach で T を $L^1(dm)$ に拡張 (norm-preserving) すると $(L^1(dm))' = L^\infty(dm)$ より、$\exists f_0 \in L^\infty(dm) : Tf = \int f_0 f dm$ $f \in H^1(dm)$. 従って $g_0 = Z^n e^{-i\phi} - f_0$ とおくと、$g_0 \in L^\infty(dm) \cap A^\perp = H_0^\infty$

又 $g \in H_0^\infty$ なら $\int (Z^n e^{-i\phi} - g) f dm = \int Z^n e^{-i\phi} f dm = Tf$。よって

$\rho_n(\nu) = \| Z^n e^{-i\phi} - g_0 \|_\infty \leqq \| Z^n e^{-i\phi} - g \|_\infty \quad \forall g \in H_0^\infty$ を得る。

よって、$G(m) \neq \{m\}$ で $\rho_n(\nu) < 1$ のとき (以下この節ではこれを仮定する).

Lemma 3.

$$\rho_n(\nu) = \min_{g \in H_0^\infty} \| Z^n e^{-i\phi} - g \|_\infty = \min_{F \in H^\infty} \| 1 - Z^{1-n} e^{i\phi} F \|_\infty$$
$$= \min_{F \in H^\infty} \| e^{-i\phi} - Z^{1-n} F \|_\infty .$$

次に $W = \{ 0 < w \in L^1(dm) ; \lim_{n \to \infty} \rho_n(w dm) = 0 \}$ とおくと, Lemma 3により

Lemma 4.

$$w \in W \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists F \in H^\infty \text{ s.t. } \begin{array}{l} | \mathrm{Arg}(F h^2 Z^{1-n}) | < \varepsilon \\ | \log |F| | < \varepsilon \end{array} .$$

(Arg は偏角の主値)

又 $W_0 = \{ 0 < w \in L^1(dm) ; \forall \varepsilon > 0, \exists r, s \in L^\infty_{\mathbb{R}}(dm), t \in C_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ s.t. $\log w = r + \tilde{s} + t(Z)$, $\|r\|_\infty < \varepsilon, \|s\|_\infty < \varepsilon \}$

を導入すると Helson-Sarason と同様にして ことを得る (Lemma 4 を使って)

Lemma 5. $W_0 \subset W$.

同じく Helson-Sarason と同様にして

Lemma 6. P：三角多項式. $w_0 \in W_0$

$\Rightarrow |P(Z)|^2 w_0 \in W$.

この逆を示すために

Lemma 7. $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ とする. $S \geqq 0$ $Z^k S \in H^{\frac{1}{2}}(dm)$ なら

$\exists P(z)$：zの多項式. $\deg P \leqq k$. s.t. $S = |P(Z)|^2$.

これの $k=0$ の場合は Neuwirth-Newman の Th として知られている [16].

∵) 我々の元の証明より以下の Gamelin によるものの方が見易いので 後者を紹介する。まず $S \geqq \varepsilon > 0$ としよう。 $\log S \in L^1(dm)$ だから

$S = |g|^2$, $g \in H^1$ outer, $g = e^{u + i\tilde{u}}$ と書ける.

$v = \begin{cases} u & , u \geqq 1 \\ 1 & , u < 1 \end{cases}$ とおく. すると $f \in H^\infty$ なら

$$\int Z^{k+1} \bar{g} g e^{-2(v+i\tilde{v})} f \, dm = \int Z Z^k S f e^{-2(v+i\tilde{v})} dm$$ で

$Z^k S f e^{-2(v+i\tilde{v})} \in (H^{\frac{1}{2}} \times H^\infty \times H^\infty) \cap L^\infty \subset H^\infty$ だから, 上の左辺 $= 0$.

又 $g \in H^1$, outer, $e^{-2(v+i\tilde{v})} \in H^\infty$ outer だから $fge^{-2(v+i\tilde{v})}$ の形の函数

は $f \in H^\infty$ を動かすとき H^1 で dense になる. よって

$$\int Z^{k+1}\bar{g}\,h\,dm = 0, \quad {}^{\forall}h \in H^\infty.$$

従って $g \in sp\{1, Z, \cdots, Z^k\}$ で Lemma は正しい。

さて，一般のときは，$S_\varepsilon = S+\varepsilon$ とおく。上と同じにして
$(1 \geq \varepsilon > 0)$

$S_\varepsilon = |a_0^\varepsilon + \cdots + a_k^\varepsilon Z^k|^2 = S+\varepsilon$ となる a_j^ε がある。

又，この S_ε は有界になるから，$0<\varepsilon\leqq 1$ のとき一様有界。又

$a_j^\varepsilon = \int (a_0^\varepsilon + \cdots + a_k^\varepsilon Z^k)\bar{Z}^j dm$ であるから a_j^ε も一様有界

よって，$\varepsilon \to 0$ として Lemma を得る。☆

さて Lemma 6 の逆として

Lemma 8. $w \in W \Rightarrow {}^{\exists}P(z)$: その多項式，${}^{\exists}w_0 \in W_0$ s.t.
$w = |P(Z)|^2 w_0$.

∵) $1>\varepsilon>0$ とする。Lemma 4 により ${}^{\exists}F \in H^\infty$, ${}^{\exists}n \in \mathbb{N}$, s.t.

$|\mathrm{Arg}(Fh^2 Z^{1-n})| < \varepsilon$, $\left|\log|F|\right| < \varepsilon$.

$s = -\mathrm{Arg}(Fh^2Z^{1-n})$, $S = Fh^2 Z^{1-n} e^{-\tilde{s}+is}$ とおく。

$h^2 \in H^1$, $e^{-\tilde{s}+is} \in H^1$ がわかる。($\|s\|_\infty$ より)。さらに

$\|s\|_\infty < \varepsilon$, $S \geqq 0$, $SZ^{n-1} \in H^{\frac{1}{2}}$。よって，Lemma 7 により

$S = |a_0 + a_1 Z + \cdots + a_{n-1}Z^{n-1}|^2$。

$P_0(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_{n-1}z^{n-1}$ とおくと、$P_0(z)=P(z)Q(z)$; $P(z)$ はその多項式で $|z|=1$ 上に根を持つ、$Q(z)$ はその多項式で $|z|=1$ 上に根を持たない、と分解する。そこで $r=-\log|F|$, $t=2\log|Q|$ とおくと

$$|P_0(Z)|^2=|P(Z)|^2|Q(Z)|^2=S=|S|=|Fh^2|e^{-\delta}$$

$$\therefore w=|h|^2=|P(Z)|^2|Q(Z)|^{2}|F|^{-1}e^{\delta}=|P(Z)|^2\exp(r+\delta+t(Z))$$ で

$$\|r\|_\infty<\varepsilon,\ \|\delta\|_\infty<\varepsilon,\ t\in C_{\mathbb{R}}(T).$$

後はこの $P(z)$ が ε のとり方に無関係なことが示されればよい。

そこで ε_1 に $P_1(z)$, ε_2 に $P_2(z)$ が対応したとしよう。すると、

$\dfrac{|P_1(Z)|^2}{w}\in L^1(dm)$, $\dfrac{w}{|P_2(Z)|^2}\in L^1(dm)$ を得る。よって $1°$ の (1) を使うと

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{P_1(e^{i\theta})}{P_2(e^{i\theta})}\right|\frac{d\theta}{2\pi}=\int\left|\frac{P_1(Z)}{P_2(Z)}\right|dm=\int\frac{|P_1(Z)|}{w^{\frac12}}\frac{w^{\frac12}}{|P_2(Z)|}dm$$
$$\leqq\left(\int\frac{|P_1(Z)|^2}{w}dm\right)^{\frac12}\left(\int\frac{w}{|P_2(Z)|^2}dm\right)^{\frac12}<\infty.$$

故に P_1, P_2 は多項式であるから、P_1 は P_2 で割り切れる。同様に P_2 は P_1 で割り切れる。故に $P_1=cP_2$、この定数 c は w の表現の $\exp$ の中の t に繰り込めるから、上で述べた P は ε に無関係にとれる。☆

次に W_0 の元を特徴付けるための準備の Lemma として

Lemma 9. $H^\infty+C(Z)$ は $L^\infty(dm)$ で closed である。

ただし $C(Z)$ は $\{f(Z) : f \in C_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})\}$.

証明は Rudin [13] の Theorem 1.2 の証と同じにできるので省略する

これを使って

Lemma 10. $w \in W_0 \iff \exists u, v \in C_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}) : w = \exp(u(Z) + i\tilde{v}(Z))$.

∵) $(\Leftarrow)$ は v を v の Fourier 級数の Cesàro 和で一様近似すればよい。

$(\Rightarrow)$ $f = \log w$ とおくと, $w \in W_0$ だから

$f = r_0 + \tilde{s}_0$, $r_0, s_0 \in L^\infty_{\mathbb{R}}(dm)$ と書ける。このような一組を固定する。 $f_0 = r_0 + is_0 \in L^\infty(dm)$ とおくと,

$f_0 - f = i(s_0 + i\tilde{s}_0) \in H^1$. $w \in W_0$ だから

任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\exists r, s \in L^\infty_{\mathbb{R}}(dm)$, $t \in C_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ s.t.

$$f = r + \tilde{s} + t(Z).$$

よって

$$f_0 - t(Z) = f_0 - f - i(s + i\tilde{s}) + (r + is)$$

よって $f_0 - t(Z) - (r+is) = f_0 - f - i(s+i\tilde{s}) \in H^1$. 一方 左辺 $\in L^\infty(dm)$ だから 右辺 $\in H^1 \cap L^\infty(dm) = H^\infty$. ∴ $\operatorname{dist}(f_0, H^\infty + C(Z)) \leqq \|r + is\|_\infty < 2\varepsilon$.

Lemma 9 により $H^\infty + C(Z)$ は closed だから $f_0 \in H^\infty + C(Z)$.

∴ $f = f - f_0 + f_0 \in H^1 + C(Z)$.

∴ $f = g + h$; $g \in C(Z)$, $h \in H^1$ $\int h\,dm = 0$ と書ける.

f は実数値だから $\operatorname{Im} g = -\operatorname{Im} h$, 又 $h \in H^1, \int h\,dm = 0$ だから $\operatorname{Re} h = (\operatorname{Im} h)^\sim$

∴ $f = \operatorname{Re} g + \operatorname{Re} h = \operatorname{Re} g - (\operatorname{Im} h)^\sim = \operatorname{Re} g + (\operatorname{Im} g)^\sim$.

$g\in C(Z)$ だから $\mathrm{Re}\, g = u(Z)$, $\mathrm{Im}\, g = v(Z)$ となる $u, v \in C_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ が存在する。☆

<u>定理 2(i)の証明</u>. Lemmas 6, 8, 10 を合せればよい。☆

3°. 関連した話.

E, F を $L^2(dm)$ の subspace としたとき, $\nu\in M^+(X)$ に対して

$$\rho(E,F\ \nu) = \sup\left\{\left|\int f\bar{g}\,d\nu\right| ; f\in E,\ g\in F,\ \|f\|_{L^2(d\nu)}\le 1,\ \|g\|_{L^2(d\nu)}\le 1\right\}$$

と定義する。$\rho(E,F;\nu)<1$ のとき E と F は ν について positive angle をもつといわれる。これに関連して次の結果が成り立つ.

命題 3. $0< w\in L^1(dm)$, $w^{-1}\in L^1(dm)$ とする. $d\nu = w\,dm + d\nu_s$ $(0\le d\nu_s\perp dm)$ のとき,

$$\rho(A,\bar{A}_0;d\nu)<1 \iff \rho(A_0,\bar{A}_0;d\nu)<1.$$

∵) $(\Rightarrow)$ は明らか。$(\Leftarrow)$ このときも Lemma 1 と同様にして $d\nu_s=0$ が示せる. 即ち $d\nu = w\,dm$. よって Kolmogorov's th ([14, Th 4.3.1]) により

$$\inf_{f,g\in A_0}\int|1+f+\bar{g}|^2 w\,dm = \left(\int w^{-1}dm\right)^{-1}$$

これより, 容易に

(5) $\|a\|_{L^2(d\nu)} \le C\|a+f+\bar{g}\|_{L^2(d\nu)}$, $\forall a\in\mathbb{C},\ f,g\in A_0$,

ここで $C = \left(\int w^{-1}dm\right)^{1/2}\int w\,dm$. さて Π を $L^2(dm)$ から H^2 への projection とすると, [11, Prop. 6] およびその証明と同様にして

Lemma 11.

$\rho(A_0, \overline{A}_0; d\nu) < 1 \iff {}^\exists K : \|\Pi u\|_{L^2(d\nu)} \leq K \|u\|_{L^2(d\nu)}, \ {}^\forall u \in A_0 + \overline{A}_0$

$\rho(A, \overline{A}_0; d\nu) < 1 \iff {}^\exists K' : \|\Pi u\|_{L^2(d\nu)} \leq K' \|u\|_{L^2(d\nu)}, \ {}^\forall u \in A + \overline{A}_0$.

を得る。この Lemma により ${}^\exists K > 0$ s.t.

$$(6) \qquad \|f\|_{L^2(d\nu)} \leq K \|f + \overline{g}\|_{L^2(d\nu)} \qquad (f, g \in A_0).$$

(5), (6) により $a \in \mathbb{C}$, $f, g \in A_0$ なら

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^2(d\nu)} &\leq K\|f + \overline{g}\|_{L^2(d\nu)} \leq K\{\|a + f + \overline{g}\|_{L^2(d\nu)} + \|a\|_{L^2(d\nu)}\} \\ &\leq K\{\|a + f + \overline{g}\|_{L^2(d\nu)} + C\|a + f + \overline{g}\|_{L^2(d\nu)}\} \\ &= K(1 + C)\|a + f + \overline{g}\|_{L^2(d\nu)}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \|f + a\|_{L^2(d\nu)} &\leq \|a\|_{L^2(d\nu)} + \|f\|_{L^2(d\nu)} \leq C\|a + f + \overline{g}\|_{L^2(d\nu)} + K(1 + C)\|a + f + \overline{g}\|_{L^2(d\nu)} \\ &= \{C + K(1 + C)\}\|a + f + \overline{g}\|_{L^2(d\nu)}.\end{aligned}$$

よって

$$\|\Pi u\|_{L^2(d\nu)} \leq \{C + K(1 + C)\}\|u\|_{L^2(d\nu)}, \ {}^\forall u \in A + \overline{A}_0.$$

ゆえに Lemma 11 により

$$\rho(A, \overline{A}_0; d\nu) < 1. \bigstar$$

命題 4. w, ν は命題 7 と同じとする。

$$\rho_n(\nu) < 1 \iff \rho_1(\nu) < 1 \iff \exists u, v \in L^\infty_{\mathbb{R}}(dm), \ \|v\|_\infty < \frac{\pi}{2} \text{ s.t. } d\nu = \exp(u + \tilde{v})\, dm.$$

∵) 定理1より $G(m)\neq\{m\}$ のときを示せばよい。又 $\rho_n(\nu)<1 \Rightarrow \rho_1(\nu)<1$ を示せば十分。このとき定理2(iii)より

$$d\nu = |P(z)|^2 \exp(r+\tilde{s})\,dm, \quad r, s\in L^\infty_{\mathbb{R}}(dm),\ \|s\|_\infty<\frac{\pi}{2}.$$

$$P: \text{多項式}\ \deg P < n-1.$$

仮定より $\dfrac{1}{|P(z)|^2}\exp -(r+\tilde{s}) \in L^1(dm)$. 又 $r, s\in L^\infty$ より $\exp(r+\tilde{s})\in L^1(dm)$。故に $\dfrac{1}{|P(z)|^2}\in L^{\frac{1}{2}}(dm)$. よって $\dfrac{1}{P(z)}\in L^1(dm)$。1°の(1)より $\dfrac{1}{P(e^{i\theta})}\in L^1(\mathbb{T})$ よって $P(z)$ は $|z|=1$ 上にzeroを持たない。故に $\log|P(z)|^2\in L^\infty_{\mathbb{R}}$, つまりこれは上の r に繰り込める。よって定理(iii) $n=1$ の場合により $\rho(\nu)<1$. ☆

4°. 今までの話の適用できる具体的な例として2次元定常確率過程を考えてみよう。よく知られている例ではあるが。

(Ω, Σ, P) を確率空間として、X_{nk} $(n, k\in\mathbb{Z})$ を2次元定常確率過程とすると、$\exists\,\mu\in M^+(\mathbb{T}\times\mathbb{T})$ s.t.

$$(X_{nk}, X_{00}) = \iint e^{-in\theta}e^{-ik\phi}\,d\mu.$$

これにより対応: $X_{nk}\longleftrightarrow e^{-in\theta}e^{-ik\phi}$ が $[X_{nk}: n, k\in\mathbb{Z}]_{L^2(dP)}$ と $L^2(d\mu)$ のisometryを与える。

(i) α: 無理数として $A_\alpha(G)$ を $\{e^{-in\theta}e^{-ik\theta};\ n+\alpha k\geq 0\}$ で張られるuniform algebraとすれば $G=\mathbb{T}\times\mathbb{T}$ のHaar measure $\frac{d\theta}{2\pi}\times\frac{d\phi}{2\pi}$ が

nonzero complex homomorphism を定める。この場合 Gleason part は自明であるので定理1が適用できる。

(ii) $A(G)$ を $\{e^{in\theta}e^{im\phi} : (n,m) \in \{n>0\} \cup \{(0,k) : k \geq 0\}\}$ で張られる uniform algebra とする。このとき上の measure は non-zero complex homomorphism を定め、かつこれの Gleason part は non-trivial である。このとき Wermer の embedding function は $e^{i\phi}$ で $A_0^n = e^{in\phi}A(G)$ となる。定理2 etc が適用できる。

参考文献

[1] A. Devinatz, Toeplitz operators on H^2, T.A.M.S. 112 (1964), 304–317.

[2]. ——, Conjugate function theorems for Dirichlet algebras, Rev. Univ. Mat. Argentina, 23 (1966/67), 3–30.

[3] T. W. Gamelin, H^p spaces and extremal functions in H^1, TAMS, 124 (1966), 158–167.

[4] ——, Uniform algebras, Prentice Hall, 1969.

[5] H. Helson, Méthodes complexes et méthodes de Hilbert en analyse de Fourier, Orsay, 1967.

[6] H. Helson and D. Sarason, Past and Future, Math. Scandi. 21 (1967), 5–16.

[7] H. Helson and G. Szegö, A problem in prediction theory, Ann. Mat. Pura Appl. 51 (1960), 107–138.

[8] I. I. Hirschman, Jr and R. Rochberg, Conjugate function theory in weak* Dirichlet algebras, J. Functional Anal. 16 (1974), 359-371.

[9]. S. Merrill, III, Gleason parts and a problem in prediction theory, Math. Z. 129 (1972), 221-229.

[10]. T. Nakazi, Invariant subspaces of weak*-Dirichlet algebras, Pacific J. Math 69 (1977), 151-167.

[11] Y. Ohno, Remarks on Helson-Szegö problems, Tôhoku Math. J. 18 (1966), 54-59.

[12] ——, Helson-Szegö-Sarason theorem for Dirichlet algebras, to appear in T. M. J. 31 (1979).

[13] W. Rudin, Spaces of type $H^\infty + C$, Ann. Inst. Fourier, 25 (1975), 99-125.

[14] D. Sarason, An addendum to "Past and Future", Math. Scand. 30 (1972), 62-64.

[15] T. P. Srinivasan and J. K. Wang, Weak* Dirichlet algebras, Function algebras (Tulane, 1965), Scott Foresman, 1966, 216-249.

[16] K. Yabuta, A note on extremum problems in abstract Hardy spaces, Arch. Math. 23 (1972), 54-57.

[17], ——, On bounded functions in the abstract Hardy space theory II, Tôhoku Math. J. 26 (1974), 513-523.