数理解析研究所講究録
第 350 巻 1979 年 43-59

Subnormal operator に関する Scott Brown の定理について

神奈川大 工　　泉池 敬司

§0. 序. H を separable, 無限次元のヒルベルト空間とする。ここでは作用素はすべて有界とする。作用素の不変部分空間の問題は色々と研究されているが，今まだに解かれるに至っていない。normal 作用素に対しては自明でない不変部分空間が存在することは良く知られている。最近 subnormal 作用素も自明でない不変部分空間を持つことが，S. Brown によって示された。その後その idea が拡張されつつある。ここでは S. Brown とその後の動きを紹介したい。

§1. Subnormal 作用素の Conway and Olin の結果.

S を H 上の subnormal 作用素とする。すなわち，H を含むヒルベルト空間 K とその上の normal 作用素 N で $NH \subset H$, $N|_H = S$ なるものが存在する。今後 N は S の minimal normal extension (m.n.e.) とする。normal 作用素 N に対して次を

みたす正測度μが存在する。

1) μの台はNのスペクトル$\sigma(N)$と一致する。

2) $\exists \rho : L^\infty(\mu) \longrightarrow W^*(N)$ $*$-isomorphism，ここで$W^*(N)$はN生成の von Neumann algebra である。

3) $\rho(z) = N$, $\rho(1) = I$

4) $L^\infty(\mu)$と$W^*(N)$は弱$*$位相と弱作用素位相にて homeo である。

このμをNの scalar spectral measure という。$P^\infty(\mu)$で多項式の$L^\infty(\mu)$にての弱$*$位相での閉包とする。$P^\infty(\mu) \ni f$に対して$f(N) \equiv \rho(f)$とかく。$f(N)H \subset H$より$f(S) \equiv f(N)|_H$とする。$P^\infty(\mu)$の構造は Sarason [11] により与えられている。それを用いて subnormal 作用素の性質を導くのが Conway and Olin [5] の仕事である。S. Brown から見るとそれは，不変部分空間の問題を reduce するためのものである。

Sarason 定理．compact set $\tilde{K}$と$\tilde{\mu} \le \mu$で次をみたすものが存在する。$P^\infty(\mu) = L^\infty(\mu - \tilde{\mu}) \oplus H^\infty(\mathrm{int}\,\tilde{K}, \tilde{\mu})$かつ$R(\tilde{K})$は Dirichlet algebra。ここで$R(\tilde{K})$は$\tilde{K}$の外に pole を持つ rational fts の一様近似で，$H^\infty(\mathrm{int}\,\tilde{K}, \tilde{\mu})$は簡単に書くと$\mathrm{int}\,\tilde{K}$で有界正則関数を$\tilde{\mu}$に制限したもの全体である。

$f \in P^\infty(\mu)$ならば$f(S)S = Sf(S)$より$f(S)H$はSの不変部分空間である。よって：$L^\infty(\mu - \tilde{\mu})$-part あり又は$\mathrm{int}\,\tilde{K}$

の componentが2個以上あるならば，Sは自明でない不変部分空間を持つことになる。よって subnormal 作用素の不変部分空間は次の時を考えれば良い。

① $P^\infty(\mu) = H^\infty(\mathrm{int}\,\hat{K}, \mu)$ で $\mathrm{int}\,\hat{K}$ は simply connected.

次に明らかに自明でない不変部分空間を持つ場合を除くことにする。Bram 定理より $\sigma(S)$ は $\sigma(N)$ の hole のいくつかをうめたものである。$\sigma(N) \neq \sigma(S)$ ならば $\lambda \in \sigma(S) \setminus \sigma(N)$ に対して $(S-\lambda)H$ は自明でない S の不変部分空間になる。

② $\sigma(S) = \sigma(N)$ と仮定して良い（$=$ support (μ)）

$a \in H$ が cyclic とは $\{S^n a \mid n = 0, 1, 2, \cdots\}$ より生成される閉部分空間が H と一致する時にいう。

③ S は cyclic vector を持つと仮定して良い。

すると複素平面上の測度 λ が存在して S は $H^2(\lambda)$ 上の z を乗算する作用素 M_z と unitary equivalent になる。ここで $H^2(\lambda)$ は多項式の $L^2(\lambda)$ - closure である。よって $S = M_z$ on $H^2(\lambda)$ と仮定して良い。よって $N = M_z$ on $L^2(\lambda)$ であり，λ はその scalar spectral measure である。

以上より次の場合に不変部分空間の問題を考えれば良い。

④ $S = M_z$ on $H^2(\mu)$ かつ $P^\infty(\mu) = H^\infty(\mathrm{int}\,\hat{K}, \mu)$ （$\mathrm{int}\,\hat{K}$ は simply connected）

今少し問題を reduce する。$\mathrm{int}\,\hat{K}$ が simply connected より

$U=\{|z|<1\}$ とすると conformal map $\varphi : \mathrm{int}\,\hat{K} \longrightarrow U$ が存在する。φ により導かれる $\overline{U}$ 上の measure $\varphi(\mu)$ により $H^2(\mu) \ni f \longrightarrow f\circ\varphi \in H^2(\varphi(\mu))$ は isometry となり，かつ不変部分空間も保存される。よって subnormal 作用素の不変部分空間の問題は次に変形される。

問題：$P^\infty(\mu) = H^\infty(U,\mu)$ なる時 M_z on $H^2(\mu)$ は不変部分空間を持つか？

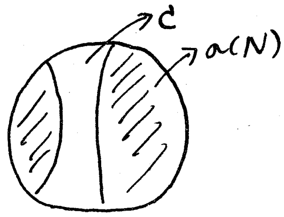
さて $P^\infty(\mu) = H^\infty(U,\mu)$ なる時次の２つの場合が考えられる。

[1] $\exists f \in H^\infty(U)$ s.t. $\|f\|_\infty^{U} > \|f\|_\infty^{U\cap\sigma(N)}$

[2] $\forall f \in H^\infty(U)$ $\|f\|_\infty^{U} = \|f\|_\infty^{U\cap\sigma(N)}$

定理. [1] の場合 S は reducing subspace をもつ.

(略証) 条件より $\sigma(N)=\sigma(S)$ の hole C で $\overline{C}\cap\partial U$ が２点以上になるものがある。$R(\overline{U}\setminus C)$ は D-algebra である. その



harmonic measure を m とする。$\mu|_{\partial(\overline{U}\setminus C)} \ll m$ 又は $\mu|_{\partial(\overline{U}\setminus C)} \not\ll m$ である。$\overline{R(\overline{U}\setminus C)}^{w^* L^\infty(\mu)} H^2(\mu) \subset H^2(\mu)$ に注意する。$\mu|_{\partial(\overline{U}\setminus C)} \not\ll m$ ならば $\overline{R(\overline{U}\setminus C)}$ は L^∞-summand を含み，$H^2(\mu)$ は L^2-summand を含む。故に reducing subspace をもつ。もし $\mu|_{\partial(\overline{U}\setminus C)} \ll m$ ならば m は $\partial(\mathrm{int}(\overline{U}\setminus C))$ に台をもつから $\overline{U}\setminus C$ は内点をもつ２つの部分にわかれる。f を一方で１他方で０とすると $f\in\overline{R(\overline{U}\setminus C)}$ となり $fH^2(\mu)$

は reducing subspace となる。

[2]の時，Sが不変部分空間を持つというのが S.Brown の定理である。

§2. S. Brown定理及び証明.([3])

$C_1 \subset B(H)$ を trace class とする。$C_1^* = B(H)$ である。

$B(H)$に入る $w*$位相を σ-w-top ということにする。それは $B(H) \ni A \longrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |\langle Ax_i, y_i\rangle|$ $(\Sigma\|x_i\|^2<\infty,\ \Sigma\|y_i\|^2<\infty)$ を連続にするもっとも弱い位相である。$T \in B(H)$に対して $\{P(T) \mid P$は多項式$\}$ の σ-w-閉包を $\mathfrak{A}_T$ とかく。$C_T \equiv C_1/\mathfrak{A}_T^{\perp}$ とする。その norm を $\|\cdot\|_Q$ とかく。$\mathfrak{A}_T$ は C_T の dual である。$x, y \in H$に対して $x\otimes y \in C_T$ を $[x\otimes y](B) = \langle Bx, y\rangle$ $({}^{\forall}B \in \mathfrak{A}_T)$ により定義する。$\|x\otimes y\|_Q \leq \|x\|\,\|y\|$ であり $H\times H \ni (x,y) \longrightarrow x\otimes y \in C_T$ は連続である。

$T \in B(H)$に対して次の性質をもつものを考える.

(a) $H^\infty(U) \longrightarrow \mathfrak{A}_T$ なる onto isometry isomorphism で $(w* \rightarrow \sigma\text{-}w\ \text{top})$ で homeo なるものが存在する.

(b) ${}^{\forall}\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $T-\lambda$, $(T-\lambda)^*$ は dense range をもつ.

(c) ${}^{\forall}\lambda \in \sigma(T)$, ${}^{\exists}x_i \in H$ s.t. $\|x_i\|=1$, $\|(T-\lambda)x_i\| + \|(T-\lambda)^*x_i\| \to 0$

(d) $\|h\|_\infty^{\sigma(T)\cap U} = \|h\|_\infty^U \quad {}^{\forall}h \in H^\infty(U)$

S. Brown定理：Tが(a)～(d)をみたす。

$\Longrightarrow \quad {}^{\forall}\Lambda \in C_T \quad {}^{\exists}x, y \in H$ s.t. $\Lambda = x \otimes y$

系. subnormal作用素は自明でない不変部分空間をもつ。

(証明) §1の reduction より subnormal作用素 S は(d)をみたすと仮定して良い。(b)と(c)も成立すると仮定して良い。さもないとすぐに自明でない不変部分空間を持つことがわかる。Conway and Olin より $H^\infty(U) \ni f \longrightarrow f(S) \in \mathcal{O}\!\mathcal{L}_S$ は①をみたす。所で $C_0 : \mathcal{O}\!\mathcal{L}_S \ni f(S) \longrightarrow f(0)$ は σ-w 連続である。よって定理より ${}^{\exists}x, y \in H$ s.t. $C_0 = [x \otimes y]$ ($x \neq 0$, $y \neq 0$ である).

M を $\{S^n x \mid n = 1, 2 \cdots\}$ より生成される部分空間とする。

$\langle S^n x, y\rangle = C_0(S^n) = z^n(0) = 0$ より $M \perp y$ である。よって $M \subsetneq H$ である。もし $M = \{0\}$ ならば $Sx = 0$, $x \neq 0$ より $\operatorname{Ker} S$ が自明でない不変部分空間である。いずれにしても自明でない不変部分空間をもつ。

次に定理の証明に移ろう。$\lambda \in U$ に対して

$C_\lambda : \mathcal{O}\!\mathcal{L}_T \ni f(T) \longrightarrow f(\lambda)$ とする。

Lemma 1. T は(a)をみたし、${}^{\exists}x_i \in H$ s.t. $\|x_i\| = 1$, $\|(T-\lambda)x_i\| \to 0$ $(i \to \infty)$ とする。$\lambda \in U$

$\Longrightarrow \quad \|x_i \otimes x_i - C_\lambda\|_Q \to 0$

(証明) $h(T) \in \mathcal{O}\!\mathcal{L}_T$, $\|h(T)\| = 1$ とする。$\|h\|_\infty = 1$ である。$h(z) - h(\lambda) = (z-\lambda)g(z)$ と書けて $d = \operatorname{dist}[\lambda, \partial U]$ とすると

$\| g(z) \|_\infty \le 2\| h \|_\infty d^{-1}$ よって $\| g(T) \| \le 2 \| h\|_\infty d^{-1}$.

$| [x_i \otimes x_i - C_\lambda](h(T)) | = | < h(T) x_i, x_i > - h(\lambda) |$

$= | < \{h(T) - h(\lambda)\} x_i, x_i > | = | < g(T)(T-\lambda) x_i, x_i > |$

$= \| (T-\lambda) x_i \| \, \| g(T)^* x_i \| \le \| (T-\lambda) x_i \| \, 2 \| h \|_\infty d^{-1} \longrightarrow 0.$

Lemma 2. Tは(b),(c)をみたすとする。(c)より異なる $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(T)$ に対して unit vectors x_i, y_i で

$\| (T-\lambda_1) x_i \|, \| (T-\lambda_1)^* x_i \|, \| (T-\lambda_2) y_i \|, \| (T-\lambda_2)^* y_i \| \longrightarrow 0$

なるものが存在する。その時

1) $\| x_i \otimes y_i \|_Q \longrightarrow 0$

2) $\| x_i \otimes s \|_Q \longrightarrow 0 \quad (\forall s \in H)$

3) $\| s \otimes x_i \|_Q \longrightarrow 0 \quad (\forall s \in H)$

(証明) 1) $\exists B_i \in \mathfrak{A}_T \ (\|B_i\| = 1)$ s.t. $\| x_i \otimes y_i \|_Q = < B_i x_i, y_i >$

よって $| < B_i (T-\lambda_2) x_i, y_i > - < B_i (\lambda_1 - \lambda_2) x_i, y_i > | \longrightarrow 0$

$| < B_i (T-\lambda_2) x_i, y_i > | = | < B_i x_i, (T-\lambda_2)^* y_i > | \longrightarrow 0$

$\therefore \ (\lambda_1 - \lambda_2) < B_i x_i, y_i > \longrightarrow 0 \qquad \therefore \ \| x_i \otimes y_i \|_Q \longrightarrow 0$

2) $\exists B_i \in \mathfrak{A}_T \ (\|B_i\| = 1)$ s.t. $\| x_i \otimes s \|_Q = < B_i x_i, s >$

(b) より $\forall \varepsilon > 0$ に対して $\exists t \in H$ s.t. $\| (T-\lambda_1)^* t - s \| < \varepsilon$

$\therefore \ | < B_i x_i, s > - < B_i x_i, (T-\lambda_1)^* t > | < \varepsilon$

$| < B_i x_i, s > - < B_i (T-\lambda_1) x_i, t > | < \varepsilon$

$\therefore \ \exists i_0$ s.t $\forall i > i_0, \ | < B_i x_i, s > | < \varepsilon$

$\therefore \ \| x_i \otimes s \|_Q \longrightarrow 0$

3) $\exists B_i \in \mathfrak{A}_T$ $(\|B_i\|=1)$ s.t $\|s\otimes x_i\|_{\mathfrak{a}} = [s\otimes x_i](B_i) = \langle B_i s, x_i\rangle$

条件より $\forall \varepsilon > 0$ $\exists t \in H$ s.t. $\|(T-\lambda_1)t - s\| < \varepsilon$

よって $|\langle B_i(T-\lambda_1)t, x_i\rangle - \langle B_i s, x_i\rangle| < \varepsilon$

一方 $\langle B_i(T-\lambda_1)t, x_i\rangle = \langle B_i t, (T-\lambda_1)^* x_i\rangle \longrightarrow 0$

よって $\exists i_0 > 0$ s.t $\forall i > i_0$ $|\langle B_i s, x_i\rangle| < \varepsilon$

$\therefore$ $\|s\otimes x_i\|_{\mathfrak{a}} \longrightarrow 0$

Lemma 3. Tは(d)をみたすとする.

$\Sigma(T) = \{C_\lambda \mid \lambda \in \sigma(T)\cap U\} \subset C_T$ とする。

$\Longrightarrow$ $\overline{\mathrm{co}} \bigcup_{|\lambda|=1} (\lambda\Sigma(T)) =$ closed unit ball of C_T

(証明) 左辺をβ', 右辺をβとおく。$\beta' \subset \beta$は明らか。

$K \in \beta - \beta'$ とする。

$\exists \psi \in H^\infty(U)$ s.t. $\begin{cases} [\psi(T)](K) = 1 \\ \exists r<1 \text{ s.t } |[\psi(T)](K')| < r < 1 \quad (\forall K' \in \beta') \end{cases}$

すると $\|\psi(T)\| = \|\psi\|_\infty \geq 1$, よって(d)より $\|\psi\|_\infty^{\sigma(T)\cap U} \geq 1$

$\therefore$ $|\psi(\lambda)| > r$ $\therefore$ $|[\psi(T)](C_\lambda)| = |\psi(\lambda)| < r$ 矛盾

Lemma 4. $\Lambda \in C_T$ で $s_n, s_n' \in H$ を $\|s_n\otimes s_n' - \Lambda\|_{\mathfrak{a}} < \frac{1}{2^{2n}}$ とする。Tは(a)〜(d)をみたす。

$\Longrightarrow$ $\exists s_{n+1}, s_{n+1}' \in H$ s.t. $\|s_n - s_{n+1}\| < \frac{1}{2^n}$, $\|s_n' - s_{n+1}'\| < \frac{1}{2^n}$

$$\|s_{n+1}\otimes s_{n+1}' - \Lambda\| < \frac{1}{2^{2(n+1)}}$$

(略証) $K = \Lambda - s_n\otimes s_n'$ とおく。Lemma 3 より

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in U\cap\sigma(T)$ と $c_1, c_2, \cdots, c_m \in \mathbb{C}$ で次を満たすも

のが存在する。 $\sum_{j=1}^{m}|c_j|<\frac{1}{2^{2n}}$, $\|K-\sum_{j=1}^{m}c_j C_{\lambda_j}\|_Q<\frac{1}{2^{2(n+1)}}$

各 j に対して unit vector $\{t_{j,i}\}_{i=1}^{\infty}$ を $\|(T-\lambda_j)t_{j,i}\|\to 0$

$\|(T-\lambda_j)^* t_{j,i}\|\to 0$ をみたすように取る。 $\beta_j\equiv\frac{c_j}{|c_j|}$ とおく。

$K_i\equiv(s_n+\sum_{j=1}^{m}\sqrt{c_j}\beta_j t_{j,i})\otimes(s_n'+\sum_{j=1}^{m}\sqrt{c_j}t_{j,i})\in C_T$ とおく。

Lemma 1, Lemma 2 より $K_i\longrightarrow s_n\otimes s_n'+\sum_{j=1}^{m}c_j C_{\lambda_j}$ ($\|\ \|_Q$-norm)

そこで十分大なる i に対して

$$\|\Lambda-s_n\otimes s_n'-(K_i-s_n\otimes s_n')\|_Q<\frac{1}{2^{2(n+1)}}$$

$$\therefore\ \|\Lambda-K_i\|<\frac{1}{2^{2(n+1)}}$$

そこで
$$\begin{cases} s_{n+1}\equiv s_n+\sum_{j=1}^{m}\sqrt{c_j}\beta_j t_{j,i_0} \\ s_{n+1}'\equiv s_n'+\sum_{j=1}^{m}\sqrt{c_j}t_{j,i_0} \end{cases}$$

とおくと十分大なる i_0 に対して Lemma をみたす。

(S. Brown の定理の証明) $\|\Lambda\|_Q<1$ と仮定して良い。

$s_0=0$, $s_0'=0$ より出発して Lemma 4 より $\{s_n\}$, $\{s_n'\}$ を作る.

$\{s_n\}$ 及び $\{s_n'\}$ は Cauchy 列より $s_n\to x$, $s_n'\to y$ とすると x, y は定理をみたす。

§3. S. Brown, B. Chevreau and C. Pearcy による拡張 ([4]).

S. Brown 定理に引き続いて, Agler が次を示した。証明の方針は Brown の idea と同じである。

J. Agler 定理: $T\in B(H)$ で $\sigma(T)=\overline{\mathbb{D}}$, $\|T\|=1$ とする。

$\Longrightarrow$ T は自明でない不変部分空間を持つ。

続いて次の形に拡張された。

S. Brown, B. Chevreau and C. Pearcy: $T \in B(H)$ で $\|T\|=1$ かつ

(※) $\sup_{\lambda \in \sigma(T) \cap U} |h(\lambda)| = \|h\|_\infty \quad (\forall h \in H^\infty(U))$ とする。

$\Longrightarrow$ T は自明でない不変部分空間をもつ。

証明の方針はだいたい Brown 定理と同じであるが比較しながら見ることにする。まず T は unitary と completely nonunitary contraction に分解出来るから, T は completely nonunitary contraction と仮定して良い。当然分解しても (※) をみたす。

① ([7], III章 定理2.1) §2 の (a) がみたされる。

(注意) Nagy & Foias の $\phi: H^\infty(U) \to \mathcal{O}\mathcal{L}_T$ の作り方において (※) より ϕ が isometry となり よって ϕ (w* → a.w) は homeo である。

よって $\lambda \in \bar{U}$ に対して $C_\lambda: \mathcal{O}\mathcal{L}_T \ni h(T) \longrightarrow h(\lambda)$, $C_\lambda \in C_T$ が得られる.

② $\sigma(T) =$ left essential spectrum $\sigma_{le}(T)$ と仮定してよい.

そうでなければ T 又は T^* は固有値をもつからである. ([10])

よって $\forall \lambda \in \sigma(T)$ に対して $\exists x_i \in H$ s.t $\|x_i\|=1$, $x_i \perp x_j \ (i \neq j)$

$\|(T-\lambda)x_i\| \longrightarrow 0$ (cf. (c)).

Lemma 1 はそのままこの場合に使えることを注意しておこう.

Lemma 2′の 2). $\lambda \in \sigma(T) \cap U$, x_i: orthonormal sequence s.t. $\|(T-\lambda)x_i\| \longrightarrow 0$

$\Longrightarrow \quad \|x_i \otimes s\|_Q \longrightarrow 0 \quad (\forall s \in H)$ (Lemma 2 の 2)).

(証明) $\exists h_i \in H^\infty(U)$, $\|h_i\| = 1$ s.t. $\|x_i \otimes s\| = \langle h_i(T)x_i, s\rangle$

$h_i(t) = h_i(\lambda) + (t-\lambda)k_i(t)$ ($k_i \in H^\infty(U)$) とおく。

$\|x_i \otimes s\|_Q = h_i(\lambda)\langle x_i, s\rangle + \langle k_i(T)(T-\lambda)x_i, s\rangle \longrightarrow 0$

③ $T^n \longrightarrow 0$ (s) と仮定して良い.(completely nonunitary contraction より $T^n \to 0$ 又は $T^{*n} \to 0$, $T^{*n} \to 0$ の時不変部分空間をもてば T ももつからである)

Lemma 2′ の 3) $\{x_i\}$ orthonormal sequence

$\Longrightarrow \quad \|s \otimes x_i\|_Q \to 0 \quad (\forall s \in H)$ (Lemma 2 の 3))

証明は略すがそれほど難かしい事ではない。③を使う.

Lemma 2′ の 1). $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \sigma(T) \cap U$ とする。

$\Longrightarrow \exists \{x_i^1\}, \cdots, \{x_i^n\}$ mutually orthonormal sequence

s.t. $\lim_{i\to\infty} \|(T-\lambda_j)x_i^j\| = 0 \ (1 \leq j \leq n)$ かつ $\|x_i^j \otimes x_i^k\|_Q \longrightarrow 0 \ (i \to \infty)$

証明は[2]より $\|(T-\lambda_j)x_i^j\| \to 0$ をみたすものがとれる。

後半は, $\exists h_i \in H^\infty(U)$ s.t $\|h_i\|_\infty = 1$, $\|x_i \otimes y_i\|_Q = \langle h_i(T)x_i, y_i\rangle$

$h_i(t) = h_i(\lambda) + (t-\lambda)g_i(t)$ ($g_i \in H^\infty(U)$) とすると

$\|x_i \otimes y_i\|_Q = (g_i(T)(T-\lambda)x_i, y_i)$ より従う。

Lemma 3 は §2 と同様に成立する.

Lemma 4 も同様に証明出来る。ただし途中で unit vector $\{t_{j,i}\}_{i=1}^\infty$ を取る時に Lemma 2′ の 1) を使って取り出せば後はスムースに進めていけばよい。

後の証明の残りは§2の定理とその系と同じく進めば良い。

(注) この§のTも(a)がみたされた。しかし(a)における isometry の条件は $\|h\|_\infty \leq \|h(T)\| \leq K\|h\|_\infty$ ($\forall h \in H^\infty(U)$) であっても証明は同じく進められる。この点に注目して次章に進いていく。

§4. J. G. Stampfli による拡張. ([12])

まず定義をしよう。コンパクト $M \subset \mathbb{C}$ が $T \in B(H)$ の K-スペクトラル集合とは $\|f(T)\| \leq K\|f\|_\infty^K$ ($\forall f \in R(K)$) の時にいう。ここで $R(K)$ は K の外に pole をもつ有理関数全体とする。$K=1$ の時単にスペクトラル集合という。subnormal 作用素 T に対して $\sigma(T)$ はスペクトラル集合である。J. Agler 定理の T に対して $\sigma(T)=\overline{U}$ はやはりスペクトラル集合である。

J. G. Stampfli 定理: $\sigma(T)$ が T の K-スペクトラル集合とする。

$\Longrightarrow$ T は自明でない不変部分空間をもつ。

この証明も本質的には Brown の方法と同じである。

J. G. Stampfli の証明においては次の Lemma が重要な役割をする。

Lemma 5. $\sigma(T)$ が T の K-スペクトラル集合とする。

T が complemented subspace なし

$\Longrightarrow$ 次をみたす simply connected 領域 G で次を満たすものが

存在する。 $\overline{G} \supset \sigma(T)$, $R(\overline{G})$ D-algebra

$\|h\|_\infty = \sup\{|h(\lambda)|;\ \lambda \in \sigma(T) \cap G\}$ $\quad {}^\forall h \in H^\infty(G)$.

よって今考えているTに対して上のGが存在する。次に

$H^\infty(G) \longrightarrow B(H)$ の map がうまく作られれば Brown の証明にうまく乗せられる。Lemma 5 の証明もそうであるが、ここでも Mlak [6] の導具を使う。まず $R(\overline{G}) \ni f \longrightarrow f(T) \in B(H)$ は representation である。$R(\overline{G})$ が D-algebra であるから唯一の spectral dilation $C(\partial\overline{G}) \ni g \longrightarrow U_g \in B(K)$ $(K \supset H)$ が存在する。任意の $x, y \in K$ に対して測度 $\mu(x,y) \in M(\partial\overline{G})$ で

$(U_g x, y) = \int g\, d\mu(x,y)$ $({}^\forall g \in C(\partial\overline{G}))$ なるものがある。

ここで $\mu(x,y)$ は G の harmonic measure m_G に対して絶対連続であることに注意する。$R(\overline{G})$ は $H^\infty(G) = H^\infty(m_G)$ で pointwise bdly dense (w*topology) であることに注意する。

すると ${}^\forall h \in H^\infty(G)$ に対して $\int h\, d\mu(x,y)$ が定義される。

$(h(T)x, y) = \int h\, d\mu(x,y)$ $(x, y \in H)$ とおくことによって $h(T) \in B(H)$ が得られる。これは次をみたす。

Lemma 6. $\|h\|_\infty \leq \|h(T)\| \leq K\|h\|_\infty$ $({}^\forall h \in H^\infty(G))$

初めの不等式は Lemma 5 より、後半は $\|\mu(x,y)\| \leq K$ より得られる。

Lemma 6 より $\mathcal{Q}_T \equiv \{h(T);\ h \in H^\infty(G)\}$ は B(H) の中で σ-w 位相で閉になっている。そこで $\psi : G \longrightarrow D$ を conformal map とし $\phi=\psi^{-1}: D \to G$ とし $S \equiv \psi(T)$ とおく。

$H^\infty(U) \ni f \longrightarrow f\circ\psi \longrightarrow f\circ\psi(T)=f(S) \in B(H)$ であり

$\|f\|_\infty^U = \sup\{|f(z)|\ ;\ z\in\sigma(S)\cap U\}$ である。

SとTは同じ不変部分空間を持つことを注意する。又Sは polynomial bounded より $S^n \longrightarrow 0\ (s)$ と仮定して良い。

後はSと $\{f(S);\ f\in H^\infty(U)\}$ に対して§3のTと $\mathfrak{O}\mathfrak{L}_T$ と同様に話しが進められる。ただし Lemma 3 は次の様になる。

Lemma 3'.

$\overline{co}\{\sum_1^n \alpha_j C_{\lambda_j}\ ;\ \sum|\alpha_j|=K,\ \lambda_j\in\sigma(S)\cap U\} \supset$ unit ball $\{f(S);\ f\in H^\infty\}_*$

Lemma 4 に当る所は Lemma 3' を使って進めていけば良い。

この定理の応用として次の系を得る。

系. 次の各条件をみたすTは自明でない不変部分空間をもつ。

a) 1) $\partial U \subset \sigma(T) \subset \overline{U}$

2) $\|(T-\lambda)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{dist[\lambda,\sigma(T)]}$ $\ \forall\lambda\notin\sigma(T)$

b) T: hyponormal かつ $\partial U\subset\sigma(T)\subset\overline{U}$

c) T: polynomial bounded かつ $\sigma(T)=\overline{D}$

d) $Re\ \sigma(f(T)) = \sigma(Re\ f(T))$ $\left(\forall f\in R_0(\sigma(T))\right)$ $\sigma(T)$ に hole なし.

e) normal ρ-dilation をもつ

§5. R.F. Olin and J.E. Thomson の結果. ([8], [9])

ここでは結果のみを述べる事にする。

Olin and Thomson定理1. Tが subnormal, $\Lambda \in C_T$ とする。
$\Rightarrow \quad \exists x, y \in H \quad s.t. \quad \Lambda = x \otimes y$

Nを normal作用素とする。Nを m.n.e に持つ pure subnormal 作用素全体を $\mathcal{S}_p(N)$ と書く。μ は N の scalar spectral measure とする。

Olin and Thomson定理2. $N = M_z$ on $L^2(\mu)$, $L^\infty(\mu) = H^\infty(U)$ とする。

(1) もし $f_0 \in H^\infty(U)$ で $\|f_0\|_\infty^U > \|f_0\|_\infty^{U \cap \sigma(N)}$ ならば、
$U \setminus \sigma(N)$ の hole Ω で「$\exists \lambda \in \Omega$ s.t $|f_0(\lambda)| > \|f_0\|_\infty^{U \cap \sigma(N)}$」
なるものに対して、$\sigma(S) \supset \Omega$, $\mathrm{ind}\,(S-\lambda) = -1$
$(\forall S \in \mathcal{S}_p(N))$ である。

(2) もし $\|f\|_\infty^U = \|f\|_\infty^{U \cap \sigma(N)}$ $(\forall f \in H^\infty(U))$ ならば、
任意の $U \setminus \sigma(N)$ の component Ω と任意の自然数 n に対して $\mathrm{ind}\,(S-\lambda) = -n$ $(\forall \lambda \in \Omega)$ なる $S \in \mathcal{S}_p(N)$ が存在する。

§6. 今後の問題点

1) Brown, Chevereau and Pearcy 定理の $\#$ の条件を弱めること。たとえば $(\#)$ の変わりに『$\sigma(T) \supset \partial U$』に出来ないか？もう少し一般化して、$\sigma(T)$ の polynomial convex hull が T のスペクトル集合の時はどうか？（これは Stampfli の拡張に

も関係している)。

2) $H = H^2(\mu)$ の時 $L^\infty(\mu)$-不変部分空間が存在するというのが Brown 定理である。では $H^\infty(\mu) \cap L^\infty(\mu)$-不変部分空間は存在するのか? これは cyclic vector を持つ subnormal 作用素の hyperinvariant subspace の問題と同じである。

3) いかなる T に対して Olin and Thomson 定理 1 が成立するか? Brown, Chevereau and Pearcy, Stampfli 定理の T ではどうか?

4) Olin and Thomson 定理 2 の (1) において, $U \setminus \sigma(N)$ の hole Ω で「$\|f\|_\infty^{U \cap \sigma(N)} = |f(\lambda)|\ \forall \lambda \in \Omega$」なるものに対して ind $(S-\lambda)$ ($S \in \mathcal{S}_p(N)$, $\lambda \in \Omega$) に対して何がいえるか? 任意の自然数 k に対して μ と上の性質をもつ hole Ω で ind $(S-\lambda) \geq -k$ ($\forall S \in \mathcal{S}_p(N), \forall \lambda \in \Omega$) なるものの存在はすぐわかる。この k は逆に μ と Ω で決まるわけであるがこの関係をはっきりさせたい。このことと関係して次の Olin and Thomson 問題がある:
$\mu = \mu_1 + \mu_2$ ($\mu_1 \perp \mu_2$) に対していつでも $\lambda \notin \tilde{K}_1 \cap \tilde{K}_2$ ならば (ただし $\tilde{K}_i$ は $L^\infty(\mu_i)$ に対応して Sarason 定理より得られるもの) ind $(S-\lambda) \geq -1$ ($\forall S \in \mathcal{S}_p(N)$) ?

References

1. J. Agler, An invariant subspace theorem, to appear.

2. A. Brown and C. Pearcy, Jordan loops and decompositions of operators, Cand. J. Math. 29 (1977), 1112 – 1119.

3. S. Brown, Some invariant subspaces for normal operators, J. of Integral eq. and Operator theory (to appear).

4. S. Brown, B. Chevreau and C. Pearcy, An invariant subspace theorem, to appear.

5. J.B. Conway and R.F. Olin, A functional calculus for subnormal operators II, Memo. A.M.S. 184 (1977).

6. W. Mlak, Decompositions and extensions of operator valued representations of function algebras, Acta Sci. Math. 22 (1969) 181-193

7. Sz-Nagy and C. Foiaş, Harmonic analysis of operators on Hilbert space, Akademiai Kiado 1970.

8. R. Olin and J. Thomson, Some index theorems for subnormal operators.

9. ———, Algebras of subnormal operators, to appear

10. C. Pearcy, Some recent developments in operator theory, CBMS, 36 (1978).

11. D. Sarason, Weak-star density of polynomials, J. Reine Angew. Math. 252 (1972), 1 – 15.

12. J.G. Stampfli, An extension of Scott Brown's invariant subspace theorem: K-spectral sets, to appear.

13. ———, Recent developments on the invariant subspace problem, to appear.