数理解析研究所講究録
第 350 巻 1979 年 60-73

関数環と作用素論のfactorizationについて

北大 応電研　中路 貴彦
高橋 勝利

本講演の目的は、関数環と作用素論において知られているfactorizationの定理が適用できない関数をfactorizationする定理を見つけることである。関数環におけるfactorizationの定理の拡張は、積分の代わりにconditional expectationを使うことにより得られる。作用素論におけるfactorizationの定理の拡張は、一変数の作用素に値をとる関数を二変数の関数と見て、関数環で上に得られた結果を使うことにより得られる。よって両方とも、積分の代わりにconditional expectationを使うことにそのアイデアがある。

I章 ＊弱Dirichlet環のfactorization

Aが＊弱Dirichlet環であるとは、(i) Aが確率測度空間$(X, \mathcal{A}, m)$の上の$L^\infty(m)$の部分環であり定数を含み、(ii) A +

$\bar{A}$は$L^\infty(m)$で＊弱稠密でありかつ(iii) $\int fg\,dm = \int f\,dm \int g\,dm$ (f、$g \in A$) となることである。

Sが$L^p = L^p(m)$ $(1 \leq p \leq \infty)$の部分集合とすると、$[S]_p$はSの閉linear span ($p = \infty$のときは＊弱閉) を示すとする。抽象的なHardy空間$H^p = H^p(m)$ $(1 \leq p \leq \infty)$とは、$H^p = [A]_p$として定義する。$f \in L^1(m)$に対して$E(f)$をその台集合とする。

Aが$L^\infty(m)$の＊弱Dirichlet環となるもっとも基本的な例は、(1) $T = \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}$上の$z$の多項式の全体を$A$かつ$dm = d\theta/2\pi$とするときである。ここで$\mathbb{C}$は複素平面かつ$d\theta/2\pi$は正規ルベーグ測度である。I章では頭に描く例として、II章では問題を解決する道具として重要なものは、(2) $T_1 \times T_2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} ; |z_1| = |z_2| = 1\}$上の$z_2^n$ $n \geq 0$、$z_2^n z_1^m$ $m > 0$ の多項式の全体をAかつ$dm = d\theta d\varphi / 4\pi^2$ とするときである。

次の定理は factorization の最も一般的なものである[6]。

$\boxed{\text{定理I－1}}$ $w \in L^1$、$w \geq 0$かつ$\mathcal{M}_w = [w^{1/2} A]_2$とする。このとき$\mathcal{M}_w$が$L^\infty$を reduce する零以外の部分空間を含まないことは、$w = |g|^2$ ($g \in H^2$) と書けることの必要十分条件である。

<u>証明</u>。必要性は明らかだから、十分性を示す。$\mathcal{M}_w^\perp = L^2 \ominus$

$\mathcal{M}_W$、即ち$\mathcal{M}_W^{\perp}$を$\mathcal{M}_W$の直交補空間とする。もし$k \in \mathcal{M}_W^{\perp}$かつ$|k| \gneq 0$　となるkが存在すると、$A\overline{\mathcal{M}_W^{\perp}} \subseteq \overline{\mathcal{M}_W^{\perp}}$、即ち$\overline{\mathcal{M}_W^{\perp}}$が不変部分空間ということと[9]により、$g \in \mathcal{M}_W^{\perp}$かつ$|g| = 1$となる$g$が存在する。このとき$\mathcal{M}_W \subset gH^2$、よって$W = |g|^2$ $(g \in H^2)$となる。よってkの存在がポイントであるが、k_1、$k_2 \in \mathcal{M}_W^{\perp}$と正数$\varepsilon$に対して、$0 < \lambda < \varepsilon$かつ$E(k_1 + \lambda k_2) = E(k_1) \cup E(k_2)$　となるλが存在することがkの存在のポイントである。これは　$K_\lambda = k_1 + \lambda k_2$　とすると、$m(E(K_\lambda)^c \cap E(K_\tau)^c \cap \{E(k_1) \cup E(k_2)\}) = 0$　$(\lambda \neq \tau)$。よって高々可付番個のλを除いて、$m(E(K_\lambda)^c \cap \{E(k_1) \cup E(k_2)\}) = 0$　より得られる。///

上の定理は factorization　の必要十分条件を与えているが、その十分条件はわかりにくくかつ factorization も完全とは云えない。良い十分条件を捜したい。

$g \in H^1$ が outer (function) とは、$\exp \int \log |g| \, dm = |\int g \, dm|$ かつ$\int g \, dm \neq 0$　となることで、$g \in H^\infty$が inner (function) とは、$|g| = 1$　となることである。次の factorization　は例の(1)で Beurling [1] が示したが、一般的には Srinivasan - Wang [9] による。

$\boxed{\text{定理I－2}}$　(1)　$W \in L^1$かつ$W \geq 0$とするとき、$\int \log W \, dm$

$>-\infty$ は H^2 のある outer g があって $w=|g|^2$ となるための必要十分条件である。

(2) $f \in H^1$ とするとき、$\int \log|f|\,dm > -\infty$ は inner $\mathfrak{z}$ と outer g があって $f=\mathfrak{z}g$ となるための必要十分条件である。

(3) $g \in H^1$ のとき g が outer であることは $[gA]_1 = H^1$ となることと同じである。

例の(1)では factorization は定理 I-2 で完全に与えられる. なぜならどんな零でない $f \in H^1$ も $\int \log|f|\,dm > -\infty$ だから。しかし例の(2)では $\int \log|f|\,dm = -\infty$ となる零でない $f \in H^1$ が存在するから、factorization は完全ではない。一般に、H^∞ が L^∞ で $*$弱閉部分環として極大でないなら $m(f=0)>0$ となる零でない $f \in H^1$ が存在するから factorization は完全ではない。

$\boxed{\text{問題 I}}$ $w \in L^1$、$w \geq 0$ かつ $\int \log w\,dm = -\infty$ となるときの factorization はどのように得られるだろうか? $f \in H^1$ かつ $\int \log|f|\,dm = -\infty$ となるときの inner-outer-factorization はどんなものが考えられるだろうか?

問題を解決するために、B として A を含む $*$弱閉部分環を考える。E^B を L^∞ から $B \cap \bar{B}$ への conditional expectation とすると、$E^B(E^B(w)v) = E^B(w)E^B(v)$ $(w, v \in L^\infty)$ を満

たしている。E^{H^∞} は m による積分に他ならない。

$\boxed{\text{仮定}}$ $E^B(fg)=E^B(f)E^B(g)$ $(f,\ g\in B)$.

多くの例では仮定を満たしていて、満たしていない例が知られていない。例の(2)で、$B=[\bigcup_{n>0} z_2^n A]_*$ とすると、E^B は仮定を満たしている。$I_B=\{f\in B\ ;\ E^B(f)=0\}$ とすると、$H^\infty=E^B(H^\infty)+I_B$ と書ける。例の(2)では $I_B=[\bigcap_{n>0} z_2^n A]_*$ である。

$g\in[B]_1$ が weak outer (function) とは、$\int \exp E^B(\log|g|)dm=\int|E^B(g)|dm$ かつ $|E^B(g)|\gneq 0$ となることで、$g\in B$ が weak inner (function) とは $|g|=1$ となることである。ここで $E^B(\log|g|)=\lim_{0<\varepsilon\to 0}E^B(\log(|g|+\varepsilon))$ として定義される。

$g\in H^1$ について $\exp\int\log|g|dm\geq|\int g\,dm|$ は Jensen の不等式といわれるが、g が outer というのはこの不等式が等式になることである。$g\in[B]_1$ について常に $\exp E^B(\log|g|)\geq|E^B(g)|$ よって $\int\exp E^B(\log|g|)dm\geq\int|E^B(g)|dm$ が成立するが [5]、$B=H^\infty$ のときこれは Jensen の不等式に他ならない。g が weak outer というのはこの不等式が等式になることである。もちろん $B=H^\infty$ のとき weak outer なら outer である。また $\exp\int\log|g|dm=\exp\int E^B(\log|g|)dm\leq\int\exp E^B(\log|g|)dm$。$\int\log w\,dm>-\infty$ なら $E^B(\log w)>-\infty$ は明らかであるが、逆は云えない。次の定理は問題Iに対す

る部分的な解答である[5]。例(2)については完全に解決される。

$\boxed{\text{定理 I - 3}}$ (1) $w \in L^1$、$w \geq 0$ かつ $\chi_{E(w)} \in B$ とするとき、$\chi_{E(w)} E^B(\log w) > -\infty$ は $[B]_2$ のある weak outer g があって $w = \chi_{E(w)} |g|^2$ となるための必要十分条件である。

(2) $f \in [B]_1$ かつ $\chi_{E(f)} \in B$ とするとき、$\chi_{E(f)} E^B(\log |f|) > -\infty$ は weak inner δ と weak outer g があって $f = \chi_{E(f)} \delta g$ となるための必要十分条件である。

(3) $f \in H^1$ かつ $f = \delta g$ と weak-inner-outer-factorization ができているとする。$\{k \in L^\infty ; k[E^B(g)H^\infty]_2 \subseteq [E^B(g)H^\infty]_2\} = H^\infty$ となることは $f = \delta' g'$ かつ $(g' \in H^1)$ と weak-inner-outer-factorization ができるための必要十分条件である。

(4) B は L^∞ を reduce する零以外の部分空間を含まないとする。$w \in L^1$、$w \geq 0$ かつ $\chi_{E(w)} \in B$ とするとき、$\chi_{E(w)} E^B(\log w) > -\infty$ ならば、$w = \chi_{E(w)} |h|^2$ $(h \in H^2)$ とできる。

証明. (1) $\chi_{E(w)} E^B(\log w) > -\infty$ とする。$f \in I_B$ ならば、B に対する Jensen の不等式と conditional expectation に対する geometric-arithmetic means の不等式により、任意の $\chi_E w \neq 0$ である $\chi_E \in B$ に対して、$\int_E |1-f|^2 w \, dm \geq \int_E \exp E^B(\log w) \, dm > 0$ となる。[4] または [5] より、

$\mathcal{M}_W = \chi_{E(W)} \mathfrak{z} [B]_2$ ($|\mathfrak{z}| = 1$) とできるから、factorization ができる。逆はやはりBに対する Jensen の不等式を使う。(2)は(1)より明らか。(3) $\{h \in L^\infty ; h[E^B(g)H^\infty]_2 \subseteq [E^B(g)H^\infty]_2\} = H^\infty$ により、定理 I-1 は $E^B(g) = \mathfrak{z}_0 g_0$ ($g_0 \in H^1$) を示している。$\bar{\mathfrak{z}}_0 \in B$ とできるから、$\mathfrak{z}' = \mathfrak{z}\mathfrak{z}_0$ かつ $g' = \bar{\mathfrak{z}}_0 g$ とすると $f = \mathfrak{z}' g'$ かつ $g' \in H^1$ となる。逆は明らか。(4) $\mathcal{M}_W$ は(1)と同じく $\mathcal{M}_W = \chi_{E(W)} \mathfrak{z} [B]_2$ ($|\mathfrak{z}| = 1$) とできるが、Bについての仮定より $\mathcal{M}_W$ は L^∞ を reduce する零以外の部分空間を含まないから、定理 I-1 よりでる。///

$g \in [B]_1$ とする。g が weak outer であることは、$[gB]_1 = [B]_1$ または $[gI_B]_1 = [I_B]_1$ かつ $|E^B(g)| > 0$ となることと同値である。$g \in H^1$ が outer ならば weak outer である。もっと一般に、$g \in H^1$ が $g = \mathfrak{z}h$ ($\bar{\mathfrak{z}} \in B$) と inner-outer-factorization されているならば、weak outer である。$g \in H^1$ が $E^B(g) = g$ かつ $|g| > 0$ ならば、weak outer である。

II章 作用素に値をとる解析関数の factorization

T_1 を単位円周、$d\theta/2\pi$ を T_1 上の正規ルベーグ測度、$\mathcal{H}$ を可分ヒルベルト空間かつ $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ を $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素の全体とする。T_1 上の $\mathcal{H}$ に値をとる可測関数Fとは $(F(e^{i\theta}), x)_{\mathcal{H}}$

$(x \in \mathcal{H})$ がルベーグ可測関数であることである。ここで $(\ ,\ )_{\mathcal{H}}$ は $\mathcal{H}$ の内積である。$L^2_{\mathcal{H}} = \{F$ 可測関数；$\int \|F(e^{i\theta})\|^2_{\mathcal{H}} d\theta < \infty\}$ とすると、$F \in L^2_{\mathcal{H}}$ ならば $F(e^{i\theta}) = \sum_{-\infty}^{\infty} f_n e^{in\theta}$ $(f_n \in \mathcal{H})$ と書ける。$H^2_{\mathcal{H}} = \{F \in L^2_{\mathcal{H}}\ ;\ F(e^{i\theta}) = \sum_{0}^{\infty} f_n e^{in\theta}\}$ とする。T_1 上の $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ に値をとる可測関数 W とは $W(e^{i\theta})x$ $(x \in \mathcal{H})$ が可測関数であることである。$\|W\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_\theta \|W(e^{i\theta})\|_{\mathcal{H}}$，$L^\infty_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = \{W$ 可測関数；$\|W\|_\infty < \infty\}$ かつ $H^\infty_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = \{G \in L^\infty_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}\ ;\ GH^2_{\mathcal{H}} \subseteq H^2_{\mathcal{H}}\}$ とする。

$W \in L^\infty_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$ が a.e.-invertible とは、$W(e^{i\theta})^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ a.e. θ。次の定理は Lowdenslager (cf. [3, p117]) によるが、関数環の定理 I-1 に相当する。

$\boxed{\text{定理II}-1}$ $W \in L^\infty_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$ かつ $W(e^{i\theta}) \geq 0$ a.e. θ とし、かつ $\mathcal{M}_W = W^{1/2} H^2_{\mathcal{H}}$ の $L^2_{\mathcal{H}}$ での閉包とする。$\mathcal{M}_W$ が $z = e^{i\theta}$ を reduce する零以外の部分空間を含まないことは、$W(e^{i\theta}) = G(e^{i\theta})^* G(e^{i\theta})$ a.e. θ $(G \in H^\infty_{\mathcal{B}(\mathcal{H})})$ と書けることの必要十分条件である。

上の定理は factorization の必要十分条件を与えているが、その十分条件はわかりにくいので良い十分条件を捜したいが、それについては Wiener-Devinatz (cf. [3, p119～p123]) による次の定理がある。$\dim \mathcal{H} < \infty$ のときは Wiener によ

り、一般には Devinatz による。これは関数環の定理Ⅰ-2に相当する。定理Ⅱ-2とⅡ-3を証明するのに必要な、関数環のときには明らかな Douglas [2] による補題を述べておく。この補題はもっと一般的な形で彼によって示されている。

$\boxed{\text{補題}}$ $W_1, W_2 \in L^\infty_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$ かつ $W_1(e^{i\theta}) \geq 0$、$W_2(e^{i\theta}) \geq 0$ a.e. θ とする。
(i) $W_2(e^{i\theta}) \geq W_1(e^{i\theta})$ a.e. θ、(ii) $\mathrm{null}[W_2(e^{i\theta})] = \mathrm{null}[W_1(e^{i\theta})]$ a.e. θ かつ (iii) $W_1(e^{i\theta})W_2(e^{i\theta}) = W_2(e^{i\theta})W_1(e^{i\theta})$ a.e. θ とするとき、もし $W_1(e^{i\theta}) = G_1(e^{i\theta})^* G_1(e^{i\theta})$ a.e. θ ($G_1 \in H^\infty_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$) ならば、$W_2(e^{i\theta}) = G_2(e^{i\theta})^* G_2(e^{i\theta})$ a.e. θ ($G_2 \in H^\infty_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$)。

$\boxed{\text{定理Ⅱ-2}}$ $W \in L^\infty_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$、$W(e^{i\theta}) \geq 0$ a.e. θ かつ W は a.e.-invertible とする。もし $\int_0^{2\pi} \mathrm{Log}\|W(e^{i\theta})^{-1}\|_{\mathcal{H}}^{-1}\, d\theta/2\pi > -\infty$ ならば、ある $G \in H^\infty_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$ があって $W(e^{i\theta}) = G(e^{i\theta})^* G(e^{i\theta})$ a.e. θ とできる。$\dim \mathcal{H} < \infty$ のとき、逆も正しくかつ条件は $\int_0^{2\pi} \mathrm{Log}|\det W(e^{i\theta})|\, d\theta/2\pi > -\infty$ で置きかえることができる。

$\dim \mathcal{H} = \infty$ のとき、W が a.e.-invertible はかなり強く、$W(e^{i\theta})$ が a.e. θ で $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の dense range 作用素でもそうはならない。$W(e^{i\theta})$ が a.e. θ で $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の closed range 作用素のとき、定理Ⅱ-2に相当する factorization を Helson-

Lowdenslager は示している。しかし closed range 作用素でないときはたとえ dense range でも知られていない。また $W = G^*G$ ($G \in H^\infty_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$) が a.e.-invertible でも、$\int_0^{2\pi} \log \| W(e^{i\theta})^{-1} \|_{\mathcal{H}}^{-1} d\theta/2\pi = -\infty$ となる例を見つけるのは易しい。

$\boxed{\text{問題 II}}$ $\dim \mathcal{H} = \infty$ のとき、W が a.e.-invertible ではないが a.e.-dense range のとき factorization はどのように得られるだろうか？ $\dim \mathcal{H} = \infty$ のとき、W が a.e.-invertible かつ $\int_0^{2\pi} \log \| W(e^{i\theta})^{-1} \|_{\mathcal{H}}^{-1} d\theta/2\pi = -\infty$ となるとき factorization はどのように得られるだろうか？

問題を解決するために、C を $\mathcal{H}$ の閉部分空間とするとき $\mathcal{H} = L^2_C$ と表現する。このとき、$\mathcal{B}(L^2_C) \supset L^\infty_{\mathcal{B}(C)}$ かつ $L^\infty_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = L^\infty_{\mathcal{B}(L^2_C)} \supset L^\infty_{L^\infty_{\mathcal{B}(C)}}$。$T_1 \times T_2 = \{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 ; |z_1| = |z_2| = 1 \}$ とし $d\theta d\varphi / 4\pi^2$ をその上の正規ルベーグ測度とする。$L^2(T_1 \times T_2)_C$ は $L^2_{\mathcal{H}}$ と同様に定義すると、$F \in L^2(T_1 \times T_2)_C$ ならば $F(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} f_{nm} e^{in\theta} e^{im\varphi}$ ($f_{nm} \in C$) と書ける。$H^2(T_1 \times T_2)_C = \{ F \in L^2(T_1 \times T_2)_C ; F(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) = \sum_{n \geq 0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_{nm} e^{in\theta} e^{im\varphi} \}$ とする。$L^\infty(T_1 \times T_2)_{\mathcal{B}(C)}$ も $L^\infty_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$ と同様に定義しかつ $H^\infty(T_1 \times T_2)_{\mathcal{B}(C)} = \{ G \in L^\infty(T_1 \times T_2)_{\mathcal{B}(C)} ; G H^2(T_1 \times T_2)_C \subseteq H^2(T_1 \times T_2)_C \}$ とする。次の簡単な補題は、$L^\infty_{L^\infty_{\mathcal{B}(C)}}$ の元を二変数の関数とみることを

可能にしている[7]。

$\boxed{\text{補題}}$ (1) $L^2_{L^2_C}$ は $L^2(T_1\times T_2)_C$ とヒルベルト空間として同型である。この同型対応は $H^2_{L^2_C}$ と $H^2(T_1\times T_2)_C$ を同型にする。(2) (1)の同型対応を通して、$L^\infty_{L^\infty_{\mathcal{B}(C)}}$ と $L^\infty(T_1\times T_2)_{\mathcal{B}(C)}$ はユニタリー同値となる。

$W\in L^\infty_{L^\infty_{\mathcal{B}(C)}}$ かつ $W(e^{i\theta})\geq 0$ a.e. θ とする。$\widetilde{W}\in L^\infty(T_1\times T_2)_{\mathcal{B}(C)}$ は W とユニタリー同値な作用素を表わす。$\widetilde{W}(e^{i\theta},e^{i\varphi})^{-1}\in\mathcal{B}(C)$ a.e. (θ,φ) とすると、W は $L^2_{L^2_C}$ 上の作用素として dense range であるが必ずしも a.e.-invertible ではない。なぜならば、$\tau(e^{i\theta},e^{i\varphi})=\|\widetilde{W}(e^{i\theta},e^{i\varphi})^{-1}\|_C^{-1}$ とすると、$\widetilde{W}(e^{i\theta},e^{i\varphi})\geq\tau(e^{i\theta},e^{i\varphi})I_C$ a.e. (θ,φ) (I_C は C 上の恒等作用素)。もし W が a.e.-invertible ならば、$\lambda(e^{i\theta})=\|W(e^{i\theta})^{-1}\|_{\mathcal{H}}^{-1}$ に対して、$W(e^{i\theta})\geq\lambda(e^{i\theta})I_{\mathcal{H}}$ a.e. θ。$(\lambda(e^{i\theta})I_{\mathcal{H}})^{\sim}=\widetilde{\lambda}(e^{i\theta},e^{i\varphi})I_C$ と書くと、同型対応のし方から $\widetilde{\lambda}(e^{i\theta},e^{i\varphi})$ は φ について定数であるから $\widetilde{\lambda}(e^{i\theta},e^{i\varphi})=\widetilde{\lambda}(e^{i\theta})$ と書ける。よって、$\widetilde{W}(e^{i\theta},e^{i\varphi})\geq\tau(e^{i\theta},e^{i\varphi})I_C\geq\widetilde{\lambda}(e^{i\theta})I_C$ a.e. (θ,φ) かつ $\inf_\varphi\tau(e^{i\theta},e^{i\varphi})\geq\widetilde{\lambda}(e^{i\theta})$。これは、$\widetilde{W}(e^{i\theta},e^{i\varphi})^{-1}\in\mathcal{B}(C)$ a.e. (θ,φ) でも $W(e^{i\theta})$ は a.e.-invertible ではないことを示している。上の注意より a.e.-invertible な $W(e^{i\theta})$ が $\int_0^{2\pi}\mathrm{Log}\|W(e^{i\theta})^{-1}\|_{\mathcal{H}}^{-1}d\theta/2\pi=-\infty$ でも、$\int_0^{2\pi}\mathrm{Log}\|\widetilde{W}(e^{i\theta},e^{i\varphi})^{-1}\|_C^{-1}d\theta/2\pi>-\infty$ a.e. φ と

なるWがある。$\int_0^{2\pi} \mathrm{Log}\,\|W(e^{i\theta})^{-1}\|_{\mathcal{K}}^{-1}\, d\theta/2\pi > -\infty$ なら明らかに $\int_0^{2\pi} \mathrm{Log}\,\|\tilde{W}(e^{i\theta}, e^{i\varphi})^{-1}\|_C^{-1}\, d\theta/2\pi > -\infty$ a.e. φ となる。次の定理は関数環の定理I-3に相当し、問題IIに対する部分的な解答である[7]。

$\boxed{\text{定理II}-3}$ $W \in L^\infty_{\mathcal{B}(C)}$ かつ $W(e^{i\theta}) \geq 0$ a.e. θ とする。$\tilde{W} \in L^\infty(T_1 \times T_2)_{\mathcal{B}(C)}$ をWとユニタリー同値な作用素とし かつ $\tilde{W}(e^{i\theta}, e^{i\varphi})^{-1} \in \mathcal{B}(C)$ a.e. (θ, φ) とする。 もし $\int_0^{2\pi} \mathrm{Log}\,\|\tilde{W}(e^{i\theta}, e^{i\varphi})^{-1}\|_C^{-1}\, d\theta/2\pi > -\infty$ a.e. φ ならば、ある $G \in H^\infty_{\mathcal{B}(\mathcal{K})}$ があって $W(e^{i\theta}) = G(e^{i\theta})^* G(e^{i\theta})$ a.e. θ とできる。$\dim C < \infty$ のとき、逆も正しくかつ条件は $\int_0^{2\pi} \mathrm{Log}\,|\det \tilde{W}(e^{i\theta}, e^{i\varphi})|\, d\theta/2\pi > -\infty$ a.e. φ で置きかえることができる。

<u>証明</u>. $\tau(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) = \|\tilde{W}(e^{i\theta}, e^{i\varphi})^{-1}\|_C^{-1}$ とすると、$\tilde{W}(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) \geq \tau(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) I_C$ a.e. (θ, φ) かつ $\int_0^{2\pi} \mathrm{Log}\, \tau(e^{i\theta}, e^{i\varphi})\, d\theta/2\pi > -\infty$ a.e. φ。$B = \{ f \in L^\infty(T_1 \times T_2)\,;\, f I_C H^2(T_1 \times T_2)_C \subseteq H^2(T_1 \times T_2)_C \}$ とすると、例の(2)のAについて $B = [\bigcup_{n>0} \bar{z}_2^n A]_*$ となる。E^B を $B \cap \bar{B}$ への conditional expectation とすると、上のことは $E^B(\mathrm{Log}\,\tau) > -\infty$ a.e. (θ, φ) を示している。定理I-3 より $\tau = |g|^2$ となる $g \in B$ があるから、$\tau I_C = (g I_C)^*(g I_C)$ かつ $g I_C \in H^\infty(T_1 \times T_2)_C$。$\tilde{W} \tau I_C = \tau I_C \tilde{W}$ からWが Douglas の補題の条件を満たす、よってこの定理の前半が導

びける。$\dim C<\infty$ のとき、$\tilde{W}$ の determinant が計算できかつ $g\in B$ ($|g|>0$) ならば $E^{B}(\mathrm{Log}|g|)>-\infty$ a.e. (θ,φ) より逆がいえる。///

参照　文献

1. Gamelin, T. : Uniform algebras, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1969.
2. Doglas, R. : On factoring positive operator functions, J.Math.Mech. 16(1966), 119-126.
3. Helson, H. : Analyticity on compact abelian groups, Algebras in analysis, Williamson, J., Academic press, 1975, 1-62.
4. Nakazi, T. : Weak-* Dirichlet algebra に現われる近似について、数理研講究録 289(1976), 48-57.
5. Nakazi, T. : Extended weak-* Dirichlet algebras, to appear in Pacific J. Math..
6. Nakazi, T. : Helson's existence theorem of function alge-bras, to appear in Arkiv der Math..
7. Nakazi, T. - Takahashi, K. : 準備中。
8. Srinivasan, T. - Wang, J. : Weak-* Dirichlet algebras, Function algebras, Birtele, F., Scott-Foresman,

Chicago, Ill., 1966, 216-249.

9. Tanaka, J. : A note on Helson's existence theorem, Proc. Amer. Math. 69(1978), 87-90.