数理解析研究所講究録
第 350 巻 1979 年 89-110

Brown-Douglas-Fillmore 理論をめぐって

大阪教育大　藤井　正俊
竹鼻　裕昭

Brown-Douglas-Fillmore は、1970年 Atiyah-Singer の K-theory を背景にして、C^*-algebra に extension という考えを導入し、extension を用いて K-theory を組み立てる (realize する) 方向に進んできたように思われます。ここでは extension の C^*-algebra への応用という方向で議論を進めたいと思います。

ところで、C^*-algebra の extension は operator の unitary 同値性の問題から出発した考えです。このような問題は 1909年の Weyl に始まると思われます。Weyl は、a, b を self-adjoint とし $b = a + k$ (但し k は compact) ならば finite multiplicity の eigenvalue を除いて a と b のスペクトルが一致することを示しました。1935年になって von Neumann は、この逆が成り立つこと、すなわち、finite multiplicity の eigenvalue を除いて a と b のスペクトルが一致しているならば、b は $a+k$ (但し k は compact) に unitary 同値となることを示しました。
これが、Weyl-von Neumann の定理と呼ばれているものです。

さらに1970年のHalmosのten problems in Hilbert spaceの中の4番目の問題を契機として、a, bをnormalとした時にWeyl-von Neumannの定理が成立するかという問題に発展してきました。
そして、翌年の、1971年Berg-Sikoniaによって、肯定的に解決されました。

一方、1941年Calkinはseparable Hilbert space $\mathcal{H}$上のbounded operatorsの全体を$\mathcal{B}(\mathcal{H})$とし、$\mathcal{H}$上のcompact operatorsの全体を$\mathcal{C}(\mathcal{H})$とした時、$\mathcal{B}(\mathcal{H})$の2-sided idealである$\mathcal{C}(\mathcal{H})$を研究し、quotient algebra $\mathcal{A}(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{C}(\mathcal{H})$を考察しています。
さて、$\mathcal{B}(\mathcal{H})$からCalkin algebra $\mathcal{A}(\mathcal{H})$への自然なmap.をπとします。
今a, bをnormalとした時finite multiplicityのeigenvalueを除いたaのスペクトルは、$\pi(a)$のスペクトル$Sp\,\pi(a)$と一致していますので、Weyl-von Neumann-Berg-Sikoniaの定理は

$$a \sim b \pmod{\mathcal{C}(\mathcal{H})} \Longleftrightarrow Sp\,\pi(a) = Sp\,\pi(b)$$

と述べることが出来ます。

ところで、aをunilateral shift，bをbilateral shiftとした時$Sp\,\pi(a) = Sp\,\pi(b) = \mathbb{T}$（但し$\mathbb{T}$は複素平面のトーラス）となりますが$a \sim b \pmod{\mathcal{C}(\mathcal{H})}$とはなりません。
一般に、$\pi(c)$がnormalの時cをess. normalといいますが、上の例は、ess. normal operatorに対して、$\mathcal{C}(\mathcal{H})$を法としてunitary同値を与えるには、スペクトル条件だけでは十分ではないことを

示しています。では、ess. normal operatorに対して、このスペクトル条件の他に、何を加えればよいかが問題となります（B. D. F. 理論の一つの結果としてこれの解答を後で述べますが、）このような、作用素論からの要請によって、C^*-algebraのextension theoryは、始まりました。

さて、ここでは以後、C^*-algebraは常に単位元を持っているものとし、又C^*-algebras $\mathcal{A}, \mathcal{B}$に対して$\mathcal{A}$から$\mathcal{B}$への$*$-homomorphismは、単位元を単位元に移すものとします。特に、1対1の$*$-homo. を慣例に従って$*$-monomorphismと呼ぶことにします。

<u>Def.</u> $\mathcal{A}$: separable C^*-algebra とし

τ が extension for $\mathcal{A}$ by $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ とは、$\mathcal{A}$から$\mathcal{A}(\mathcal{H})$への$*$-mono. のことをいいます。

そこで$\mathcal{A}$のextensionの全体をext $\mathcal{A}$とかくことにします。

<u>Def.</u> $\tau_1, \tau_2 \in$ ext $\mathcal{A}$ に対して、

$\tau_1 \sim \tau_2$ とは、次のdiagramを可換にするHilbert spaces $\mathcal{H}_1$から$\mathcal{H}_2$へのunitary Uが存在する時をいいます。

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{A}(\mathcal{H}_1) \arrow[d, "U\text{でinduceされた}*\text{-iso.}"] \\
\mathcal{A} \arrow[ur, "\tau_1"] \arrow[r, "\tau_2"'] & \mathcal{A}(\mathcal{H}_2)
\end{tikzcd}
$$

そして、$\mathrm{Ext}\,\mathcal{A} = \mathrm{ext}\,\mathcal{A}/\sim$ と書くことにします。

<u>Def.</u>　$\tau \in \mathrm{ext}\,\mathcal{A}$ に対して、

τ が trivial extension とは、次の diagram を可換にする $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ への $*$-mono. σ が存在する時をいいます。

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B}(\mathcal{H}) \arrow[d, "\pi"] \\ \mathcal{A} \arrow[ur, "\exists\sigma : *\text{-mono.}"] \arrow[r, "\tau"'] & \mathcal{A}(\mathcal{H}) \arrow[ul, phantom, "\circlearrowright"] \end{tikzcd}$$

Voiculescu は次のことを示しました。

<u>Theorem</u> [15]　すべての trivial extension は equivalent である。

複素平面の compact set X 上の連続関数の全体 $C(X)$ を、C^*-algebra $\mathcal{A}$ とした時、この定理は、Weyl-von Neumann-Berg-Sikonia の定理になっています。だから non-commutative Weyl-von Neumann の定理という見方ができます。

<u>Def.</u>　$\tau_1, \tau_2 \in \mathrm{Ext}(\mathcal{A})$ に対して、$\tau_1 + \tau_2$ を

$$(\tau_1 + \tau_2)(a) = \begin{pmatrix} \tau_1(a) & 0 \\ 0 & \tau_2(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{A}(\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^2) \qquad (a \in \mathcal{A})$$

と定義します。

この和の定義は、同値類の代表元のとり方にはよりません。

Voiculescu [15] によって、$\mathrm{Ext}(\mathcal{A})$ は trivial extension のなす類を単位元とする abelian semigroup となります。

ところで Brown-Douglas-Fillmore は、$\mathcal{A} = C(\mathbb{T})$ を model に

して、彼等の理論を発展させています。そこでまず$\mathrm{Ext}(C(\mathbb{T}))$について考えてみたいと思います。このために、2, 3の必要な結果を述べます。

Def. $a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が Fredholm operatorであるとは $\pi(a)$ が invertibleであることをいいます。

Fredholm operatorの全体を $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ とかくことにします。

歴史的には Fredholm operatorとは、range a が closed で、$\dim \ker a < +\infty$ しかも $\dim \ker a^* < +\infty$ なる a のことですが、Atkinson によって上で与えた定義と同値であることが示されております。

そこで、$a \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ に対して、aのindexを、$\operatorname{ind} a = \dim \ker a - \dim \ker a^*$ で、定義します。

次のindexの性質は、よく知られています。

① $a, b \in \mathcal{F}(\mathcal{H}) \Longrightarrow ab \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$, $\operatorname{ind}(ab) = \operatorname{ind} a + \operatorname{ind} b$

② $a \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$, $k \in \mathcal{C}(\mathcal{H}) \Longrightarrow \operatorname{ind}(a+k) = \operatorname{ind} a$

次のindexの性質は定義からすぐわかるものです。

③ $\operatorname{ind} a^* = -\operatorname{ind} a$

④ $\operatorname{ind}(a \oplus b) = \operatorname{ind} a + \operatorname{ind} b$

又、複素平面上の関数 h_m を、$h_m(z) = z^m$ で与え、$h_1 = h$ とかくことにします。通常のように、トーラス上の2乗可積分関数の全体を $L^2(\mathbb{T})$, Hardy space を $H^2(\mathbb{T})$, M_f を multiplication by f on $L^2(\mathbb{T})$ とし、T_fを、Toeplitz operator defined on $H^2(\mathbb{T})$ とします。

B.D.F. 理論は、次の定理を出発点としています。

<u>Theorem</u>[4] $\pi(a)$ を unitary とし, $\mathrm{Ind}\ a = -n$ の時

$$
a \sim \begin{cases} \text{(i)}\ T_{\alpha_n} + \text{compact } k & (n>0) \\ \text{(ii)}\ U + k & (n=0) \\ \text{(iii)}\ T^*_{\alpha_{|n|}} + k & (n<0) \end{cases}
$$

つまり, (i) は a が multiplicity n の shift + compact に unitary 同値であることを示しています。(ii) の U は unitary, (iii) の $T^*_{\alpha_{|n|}}$ は, multiplicity $|n|$ の shift の adjoint です。特に (ii) において, $\mathrm{Sp}\,\pi(a) = \mathbb{T}$ なる $U = M_\alpha$ つまり unitary U は bilateral shift M_α として取ることが出来ます。このように, ess. unitary operator a は, index によってその形が決定出来ます。

これだけの準備のもとに $\mathrm{Ext}\, C(\mathbb{T})$ を決定します。

<u>Example</u>[4] $\mathrm{Ext}\, C(\mathbb{T}) = \mathbb{Z}$

<proof>. $n \neq 0$ の時 $\tau_n(f) = \pi(T_{f\circ\alpha_n})$ とすると τ_n は $*$-mono, つまり $\tau_n \in \mathrm{ext}\, C(\mathbb{T})$ となることは, map $f \longrightarrow T_f \in \mathcal{B}(H^2(\mathbb{T}))$ (但し $f \in C(\mathbb{T})$) が $*$-homo (mod $\mathcal{C}(H^2(\mathbb{T}))$) となることと, $\|f\| = \|T_f\| \leq \|T_f + k\|$ (但し $f \in C(\mathbb{T})$, $k \in \mathcal{C}(H^2(\mathbb{T}))$) とからわかります.

$n=0$ の時 $f \in C(\mathbb{T})$ に対して $\tau_0(f) = \pi(M_f) \in \mathcal{A}(L^2(\mathbb{T}))$ が $*$-mono つまり $\tau_0 \in \mathrm{ext}\, C(\mathbb{T})$ となることは明らかです。この $\{\tau_n\}$ が $\mathrm{Ext}\, C(\mathbb{T})$ の代表元の complete な system となっていることは, 次

のように示すことが出来ます。$m \neq n$ ならば $\tau_m \not\sim \tau_n$ は index のちがいからわかりますので，任意の $\tau \in \mathrm{ext}\, C(\mathbb{T})$ に対して $\tau \sim \tau_n$ なる τ_n が存在することを示せばよいことになります。この n は，$\mathrm{ind}\, \tau(z) = -n$ なる n としてとることが出来ます。まず，$\tau(z) = \pi(a)$ なる a をとっておきます，

(i) $n > 0$ の時 $a \underset{u}{\sim} T_{z^n}$ (mod compact) なる unitary u が，上でのべた定理から取ることが出来ます。ここで $C(\mathbb{T})$ は z で生成されているので，$\tau(z) = \pi(a) = \pi(u T_{z^n} u^*)$ と $\tau_n(z) = \pi(T_{z^n})$ とから，$\tau \sim \tau_n$ がわかります。

(ii) $n < 0$ の時は adjoint をとって同様に出来ます，

(iii) $n = 0$ の時は，上で述べた定理と $Sp\,\tau(z) = \mathbb{T}$ であることから

$a \sim M_z$ つまり $\tau \sim \tau_0$ となります。

以上より，$\{\tau_n\}$ は，$\mathrm{Ext}\, C(\mathbb{T})$ の代表元の complete な system となっていることがわかりました。ここで，extensions の和の定義は，Toeplitz operators の直和で，定義していることと，直和の index はそれぞれの index の和となることから，$\mathrm{Ext}\, C(\mathbb{T})$ と $\mathbb{Z}$ は，group として同型になります。

$\mathcal{A} = C(\mathbb{T})$ に対して，$\mathrm{Ext}\, \mathcal{A}$ は trivial extension τ_0 を単位元とする group となる，ことを示しました。

一般に，

Theorem [5] X を compact metric space とした時

$\mathrm{Ext}\, C(X)$ は group となる。

この定理を証明するにあたって、trivial extension を単位元とする abelian semi-group となることは、Voiculescu によって、一般の separable C^*-algebra でわかっております。もともとの Brown-Douglas-Fillmore の論文では、逆元の存在というところで大変手まどった証明をしておりますが、ここでは、逆元の存在について、Arveson の考えにもとずく positive map の lifting を利用する簡単な証明を紹介します。

このために、positive map の lifting に関する定理と Naimark の dilation theorem が必要です。

Lifting theorem [5] $1 \in \mathcal{B}$ を C^*-algebra, $\mathcal{J}$ を $\mathcal{B}$ の closed 2-sided ideal とし、π を $\mathcal{B}$ から $\mathcal{B}/\mathcal{J}$ への natural map, τ を $C(X)$ から $\mathcal{B}/\mathcal{J}$ への $\tau(1)=1$ なる positive linear map とします。

ただし、X は compact metric space としておきます。

この時 次の diagram を可換にする $C(X)$ から $\mathcal{B}$ への unital ($\sigma(1)=1$) な positive linear map σ が存在します。

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B} \arrow[d, "\pi"] \\ C(X) \arrow[ur, "\exists\sigma\ \text{positive map}"] \arrow[r, "\tau"'] & \mathcal{B}/\mathcal{J} \end{tikzcd}$$

Naimark's dilation theorem [5]

σ を $C(X)$ から $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ への unital な positive map とすると

$\mathcal{H}$ を含む Hilbert space $\mathcal{H}'$ と，$C(X)$ から $\mathcal{B}(\mathcal{H}')$ への unital な $*$-homo.

φ が存在して，　$\sigma(a) = P_{\mathcal{H}}\, \varphi(a)|_{\mathcal{H}}$　$(a \in C(X))$

となる。但し $P_{\mathcal{H}}$ は $\mathcal{H}'$ から $\mathcal{H}$ への projection とします。

さて、この２つの theorem を用いて Arveson にもとずく theorem の証明を与えます。

<proof>　任意の $\tau \in \mathrm{Ext}\, C(X)$ に対して Lifting theorem より右の diagram を可換にする positive map σ がとれます。次に

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B}(\mathcal{H}) \arrow[d, "\pi"] \\
C(X) \arrow[ur, "\exists\sigma"] \arrow[r, "\tau"'] & \mathcal{A}(\mathcal{H})
\end{tikzcd}
$$

dilation theorem より $C(X)$ から $\mathcal{B}(\mathcal{H}')$ への $*$-homo. φ が次の matrix 表示で与えられます。

$$\varphi(a) = \begin{pmatrix} \sigma(a) & K_a \\ L_a & M_a \end{pmatrix} \text{ on } \mathcal{H}' = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^{\perp}$$

ここで φ が $*$-homo. であるから K_a も L_a も compact となります。そこで $a \in C(X)$ に対して $\tau'(a) = \pi(M_a)$ とおくと，τ' は $*$-homo. となり，しかも作り方から，$\tau \oplus \tau' = \pi \circ \varphi$ となります。ここで τ_0 を trivial extension とし $\tau_1 = \tau' \oplus \tau_0$ とおくと，τ_1 は $*$-momo. つまり $\tau_1 \in \mathrm{ext}\, C(X)$ となり，$\tau \oplus \tau_1 = \tau \oplus \tau' \oplus \tau_0 = \pi \circ \varphi \oplus \tau_0 \sim \pi \circ \varphi$ であるので，τ_1 が、τ の逆元ということになりました。

以上より $\mathrm{Ext}\, C(X)$ は group となりました。 //

このことから Ext は、compact metric space のなすカテゴリーから abelian group のなすカテゴリーへの対応を与えることがわかりましたが、更に homotopy invariant な covariant functor になることがわかっています。つまり $f, g : X \to Y$ に対して f と g が homotopic ならば $f_* = g_* : \mathrm{Ext}\, C(X) \to \mathrm{Ext}\, C(Y)$

(但し、$\tau \in \mathrm{Ext}\, C(X)$, $h \in C(Y)$ に対して $f^* : C(Y) \to C(X)$,
$f_* : \mathrm{Ext}\, C(X) \to \mathrm{Ext}\, C(Y)$ を $(f^*(h))(x) = h(f(x))$, $f_*(\tau) = (\tau \circ f^*) \oplus \tau_0$
とそれぞれ定義しておきます。ここで τ_0 は trivial extension for $C(Y)$ です。)

又 covariant とは ① $(id_X)_* = id_{\mathrm{Ext}\, C(X)}$ ② $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ の時 $(gf)_* = g_* \circ f_*$ となることを示しています。

さて、特に $X \subset \mathbb{C}$ とすると、対応 γ によって $\mathrm{Ext}\, C(X) = \mathrm{Hom}(\pi^1(X), \mathbb{Z})$ となることもわかっています。ここで $\pi^1(X)$ は first cohomotopy group of X であり、対応 γ は

$$\gamma(\tau)(a) = \mathrm{ind}\, \tau(a) \qquad (a \in \pi^1(X),\ \tau \in \mathrm{Ext}\, C(X))$$

で与えられます。

ところで、$N(X) = \{a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\ ;\ \pi(a) : \text{normal},\ Sp\, \pi(a) = X\}$ としたとき $a \in N(X)$ に対して $\tau_a(f) = \pi(a)$ となる extension τ_a を対応させることにより、$N(X) = \mathrm{ext}\, C(X)$ となります。特に、normal + compact に対応する extension が trivial extension になっています。さらに $a, b \in N(X)$ に対して、

$$a \sim b \pmod{\mathcal{C}(\mathcal{H})} \Longleftrightarrow \tau_a \sim \tau_b$$

となりますので、$N(X)/\sim = \mathrm{Ext}\, C(X)$ が成り立ちます。このことと、上の対応 γ を使うことによって、essential spectrum を X に持つ ess. normal operator の classification が可能になります。

<u>Theorem</u>[4] $a, b \in N(X)$ に対して

$$a \sim b \pmod{\mathcal{C}(\mathcal{H})} \Longleftrightarrow \operatorname{ind}(a-\lambda) = \operatorname{ind}(b-\lambda) \quad (\lambda \notin X)$$

<proof>

($\Longrightarrow$) index の性質から明らかです

($\Longleftarrow$) operator a, b に対応する extension を τ_a, τ_b とすると、$a \sim b \pmod{\mathcal{C}(\mathcal{H})}$ を示すには、$\tau_a \sim \tau_b$ をしめせばよい。今、γ は 1 対 1 ですので、$\gamma(\tau_a) = \gamma(\tau_b)$ を示せばよいでしょう。つまり任意の $f \in \pi^1(X)$ に対して $\operatorname{ind} \tau_a(f) = \operatorname{ind} \tau_b(f)$ をしめせばよいことになります。ところが $\pi^1(X)$ は $\lambda - \lambda$ ($\lambda \notin X$) で生成されているので $\operatorname{ind} \tau_a(\lambda-\lambda) = \operatorname{ind} \tau_b(\lambda-\lambda)$ を示せばよいことになりました。それは、

$$\operatorname{ind} \tau_a(\lambda-\lambda) = \operatorname{ind}(a-\lambda) = \operatorname{ind}(b-\lambda) = \operatorname{ind} \tau_b(\lambda-\lambda)$$

からいえます。 //

この定理を用いて、operator a がいつ normal + compact とかけるかも決定することが出来ます。

<u>Corollary</u>[4] essential normal operator a に対して

$$a = \text{normal} + \text{compact} \Longleftrightarrow \text{ind}(a-\lambda) = 0 \quad (\lambda \notin Sp\,\pi(a))$$

というように、indexで決定されることがわかりました。

これがcommutative C^*-algebra $C(X)$ の extension group の operator の classification への応用であります。次に、non-commutative C^*-algebra $\mathcal{A}$ の extension の応用について述べてみたいと思います。まず いつ non-commutative C^*-algebra $\mathcal{A}$ の $Ext(\mathcal{A})$ が group になるかということが問題です。

$Ext\,C(X)$ が group をなすことの証明のキーポイントは次の2点にあります。

① positive map の lifting が出来るかどうか

② Naimark の dilation theorem が成立するかどうか

①については、abelian C^*-algebra の positive map は completely positive map であることから、Choi と Effros[6]、更に Arveson[1] により separable nuclear C^*-algebra $\mathcal{A}$ なる positive map にかわる completely positive map の Lifting が成立することがわかっています。

又、②については、Stinespring[13]により completely positive map なる dilation theorem が成立することが示されています。結局、次の定理が成立することになります。

Theorem[1] $\mathcal{A}$ を separable nuclear C^*algebra とした時
　　Ext($\mathcal{A}$) は group となる.

さて、この nuclear C^*-algebra の extension のなす group を用いて、C^*algebra の classification における新しい simple C^*algebra である Cuntz algebra の同型問題が、最近解決されました。それを次に紹介します。

まず、Cuntz[7] は、$n \geqq 2$ に対して、$S_i \in B(\mathcal{H})$ $(i=1,2,\cdots,n)$ を $\sum_{i=1}^{n} S_i S_i^* = 1$ なる isometry としますと、次のことが成立することを示しました。

① $S_i^* S_j = \delta_{i,j} I$

② $V_i \in B(\mathcal{H})$: isometry で $\sum_{i=1}^{n} V_i V_i^* = 1$ ならば

$$C^*(S_1, S_2, \cdots, S_n) \cong C^*(V_1, V_2, \cdots, V_n)$$

ただし $C^*(S_1, \cdots, S_n)$ は $S_1, \cdots, S_n$ から生成された C^*algebra を意味します。

このことより $C^*(S_1, \cdots, S_n)$ を $\mathcal{O}_n$ とかいて、Cuntz algebra ということにします。

③ $\mathcal{O}_n$ は simple nuclear C^*-algebra となります。

故に上で述べました定理より Ext $\mathcal{O}_n$ は group となります。

最近、このO_nの同型問題、つまり『$m \neq n$ ならば $O_m \not\cong O_n$』が、成立することを、extension groupのある商群を用いて示されました。その Paschke－Salinas[9] と Pimsner－Popa[11]の証明を次に紹介します。まず最初に次の結果を証明します。

Theorem [9] $\quad \mathrm{Ext}\, O_n = \mathbb{Z}$

このTheoremは、2つのlemmaによって証明が完成されます。

まず、$\tau \in \mathrm{ext}\, O_n$に対して

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & 0 \\ 0 & & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in B(\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^n)^{\text{proj.}}$$

$$v_\tau = \begin{pmatrix} \tau(S_1) & \cdots & \tau(S_n) \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}(\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^n)^{\text{iso.}}$$

このv_τは $v_\tau v_\tau^* = \pi(P_1)$，$v_\tau^* v_\tau = 1$ なる Calkin algebraのisometryとなっています。この時、次の(1),(2)をみたす，$V_\tau \in B(\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^n)^{P_1\text{ iso}}$が存在します。

(1) $\pi(V_\tau) = v_\tau$ $\qquad$ (2) $1 - V_\tau^* V_\tau$ も $P_1 - V_\tau V_\tau^*$ も共に、

finite rank projectionである。

なぜなら、$\pi(T) = v_\tau$ なる $T \in B(\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^n)$をとり，$P_1 T = V|P_1 T|$ を $P_1 T$のpolar分解とすると、このVが求めるV_τであります。まず$(P_1 T)^*(P_1 T) = T^* P_1 T$ に πを作用させることによって $\pi(|P_1 T|) = 1$、

故に $v_\tau = v_\tau v_\tau^* v_\tau = \pi(P_1 T) = \pi(V)\,\pi(|P_1 T|) = \pi(V)$

又 (2) の方は作り方から明らかです。

さて、(2) より $\dim(1 - V_\tau^* V_\tau) - \dim(P_1 - V_\tau V_\tau^*)$ を考えることが出来ます。この値は v_τ と P_1 つまり τ と P_1 によってのみきまることがわかりますので，$m(\tau)$ とかくことにします。実際，

$P_1(\mathcal{H}\oplus\mathbb{C}^n)$ から $\mathcal{H}$ への unitary を W とすると $m(\tau)$ は $\begin{pmatrix} 0 & V_\tau \\ W & 0 \end{pmatrix}$

の index に等しくなることからわかります。

関数 m は次の性質を持っていることはすぐにわかります。

① $\tau_1 \sim \tau_2 \Longrightarrow m(\tau_1) = m(\tau_2)$

② $m(\tau_1 \oplus \tau_2) = m(\tau_1) + m(\tau_2)$

この ① から m は，ext $\mathcal{O}_n$ の各同値類では同じ値をとることを示しているので，Ext $\mathcal{O}_n$ 上の関数として考えることが出来ます。又 ② から m は Ext $\mathcal{O}_n$ から整数の左す加群 $\mathbb{Z}$ の中への和を和に移す関数となっています。そこで Theorem を示すには，単位元を単位元に移していることと，onto を示せばよいことになります。

<u>Lemma</u> $m(\tau) = 0 \Longleftrightarrow \tau$: trivial extension

<proof> $(\Longleftarrow)$ $\tau_0 : \mathcal{O}_n \xrightarrow{id} \mathcal{B}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\pi} \mathcal{A}(\mathcal{H})$ とすると，

τ_0 は trivial extension です。

さて任意の trivial extension τ に対して，

Voiculescu より $\tau \sim \tau_0$ 、 故に m の性質から

$$m(\tau) = m(\tau_0) = \dim(1 - V_{\tau_0}^* V_{\tau_0}) - \dim(P_1 - V_{\tau_0} V_{\tau_0}^*) = 0$$

ここで最後の等号は、 $V_{\tau_0} = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & \cdots & S_m \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ としてとれる

ことから出てきます。

($\Longrightarrow$) $m(\tau) = 0$ とします。そこで V_τ に、$1 - V_\tau^* V_\tau$ を $P_1 - V_\tau V_\tau^*$ に移す finite rank の partial isometry を、加えて、V_τ を range が P_1 となる isometry にとりなおすことにします。この isometry を同じく V_τ とかくことにします。ところが、V_τ の range は P_1 であるから、$V_\tau = \begin{pmatrix} T_1 & \cdots & \cdots & T_m \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ の形となります。更に $V_\tau^* V_\tau = 1$ より $T_i^* T_i = 1$ $(i = 1, 2, \cdots m)$

$V_\tau V_\tau^* = P_1$ より $\sum_{i=1}^{m} T_i T_i^* = 1$

故に、$\{T_i : i = 1 \cdots m\}$ は Cuntz algebra の generator の性質を持つ m 個の isometry であることになりました。このことと、$\pi(V_\tau) = v_\tau$ から $\pi(T_i) = \tau(S_i)$ $(i = 1, 2, \cdots m)$ が成立することから、次の diagram を可換にする O_m から $C^*(T_1, \cdots T_m) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ への $*$-isomorphism θ がとれます。

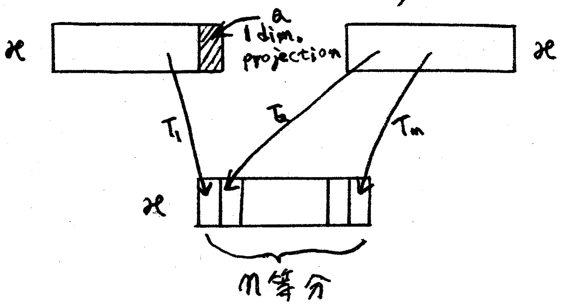
$$\begin{tikzcd} & C^*(T_1, \cdots T_m) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}) \arrow[d, "\pi"] \\ O_m \arrow[ur, "\theta"] \arrow[r, "\tau"'] & \mathcal{A}(\mathcal{H}) \end{tikzcd}$$

故に τ は trivial extension であることになりました。 //

<u>Lemma</u> m は onto である。

<proof> m は、和を和に移していることと，単位元は単位元に移していることがわかっています。

故に，$m(\sigma)=1$ となる $\sigma \in \mathrm{ext}\, \mathcal{O}_n$ の存在を示せばよいでしょう。今 下の図に示すような，partial isometry T_1 と $(n-1)$ 個の isometry を作ります。



ここで $1-T_1^*T_1 = Q$ とおき Q は 1 次元 projection であるとします。

上のようにつくると $\{\pi(T_i) : i=1,2,\cdots n\}$ は Cuntz algebra の generator の性質を持つ n 個の isometry であることは、明らかです。そこで $\mathcal{O}_n$ から $C^*(\pi(T_1),\cdots \pi(T_n))$ への isomorphism σ がとれます。この σ が求める extension となります。実際、$V_\sigma = \begin{pmatrix} T_1 & \cdots & T_n \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

としてとれますので

$$m(\sigma) = \dim(1 - V_\sigma^* V_\sigma) - \dim(P_1 - V_\sigma V_\sigma^*) = \dim Q = 1$$

から、lemmaが証明出来たことになります。 //

これで $\mathrm{Ext}\,\mathcal{O}_n = \mathbb{Z}$ が示せたわけですが、このままでは、$\mathcal{O}_n$は同型かどうか判定出来ません。そこで$\mathrm{Ext}\,\mathcal{O}_n$の商群を考えることにします。そのためには今まで考えてきた同値関係より弱い同値関係を、導入する必要があります。

Def. $\mathcal{A}$をC^* algebraとして、$\tau, \sigma \in \mathrm{ext}\,\mathcal{A}$に対して τとσがweakly equivalentとは、次のdiagramを可換にするCalkin algebra $\mathcal{A}(\mathcal{H})$のunitary uが存在する時を、いいます。

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{A}(\mathcal{H}) \arrow[d, "u\text{で induceされた }*\text{-isomorphism}"] \\ \mathcal{A} \arrow[ur, "\tau"] \arrow[r, "\sigma"'] & \mathcal{A}(\mathcal{H}) \end{tikzcd}$$

この時 $\tau \underset{w}{\sim} \sigma$ とかくことにします。更に $\mathrm{Ext}\,\mathcal{A}$と同様に、$\mathrm{Ext}^w(\mathcal{A}) = \mathrm{ext}\,\mathcal{A}/\underset{w}{\sim}$ とかくことにします。

以上のnotationのもとに、次のCorollaryが成立します。

Corollary [9] $$\mathrm{Ext}^w(\mathcal{O}_n) = \mathbb{Z}/(n-1)$$

<proof> V_1を$\mathcal{H}$上のmultiplicityが1のunilateral shiftとします。そして、τ_1を、$\tau_1(S_i) = \pi(V_1 S_i V_1^*)$ $(i=1,2,\cdots n)$で定義される$\mathcal{O}_n$から$\mathcal{A}(\mathcal{H})$への$*$-mono、つまり$\tau_1 \in \mathrm{ext}\,\mathcal{O}_n$とし、$\tau_0$を同様に$\tau_0(S_i) = \pi(S_i)$ $(i=1,2,\cdots n)$なるtrivial

extension とします。ここで $\tau\in \mathrm{ext}\,\mathcal{O}_n$ に対して, $\mathrm{Ext}\,\mathcal{O}_n$ と $\mathrm{Ext}^w\mathcal{O}_n$ の中での τ の類を, それぞれ $[\tau]$, $[\tau]_w$ とかくことにします。さて $[\tau_0]_w$ は, $\mathrm{Ext}^w\mathcal{O}_n$ の単位元でありますが, τ_1 で生成された $\mathrm{Ext}\,\mathcal{O}_n$ の subgroup となっていることをまず示しましょう。$\tau\in[\tau_0]_w$ に対して $\tau=u\tau_0u^*$ となる unitary $u\in A(\mathfrak{X})$ がとれます。$\mathrm{ind}\,u=-m$ とおき, Brown–Douglas–Fillmore 理論の出発点となった essentially unitary の特徴付けの定理から, u は次の3つの場合になります。

① $m>0$ の時 $u=\pi(v_1^m)$ ③ $m=0$ の時 $u=\pi(v)$ (但し v は unitary)

② $m<0$ の時 $u=\pi(v_1^{*|m|})$

まず①の時ですが $\tau(\cdot)=\pi(v_1^m)\pi(\cdot)\pi(v_1^{*m})=\pi(v_1^m\cdot v_1^{*m})\underset{w}{\sim} m\tau_1$ となることから, $[\tau_0]_w$ の元 τ と, τ_1 で生成された group の元 $m\tau_1$ との対応がつきます。②, ③の時も同様に出来ます。

これで $[\tau_0]_w$ と $[\tau_1]$ で生成された $\mathrm{Ext}\,\mathcal{O}_n$ の subgroup は一致することがわかりました。

さて $\mathrm{Ext}\,\mathcal{O}_n$ から $\mathrm{Ext}^w\mathcal{O}_n$ への homomorphism Φ を $\Phi([\tau])=[\tau]_w$ で定義します。すると $\Phi\circ m^{-1}$ は $\mathbb{Z}$ から $\mathrm{Ext}^w\mathcal{O}_n$ への onto homo. となりますから, Corollary を示すには, $\ker\Phi\circ m^{-1}=(n-1)$ を示せばよいでしょう。ところが $\ker\Phi\circ m^{-1}=m([\tau_0]_w)$ ですから上で示したことを用いると, $m(\tau_1)=n-1$ を示せばよいことになりました。

これが成立することは次のことからわかります。

$$v_{\tau_1} = \begin{pmatrix} v_1 s_1 v_1^* & v_1 s_2 v_1^* & \cdots & v_1 s_n v_1^* \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$ とおきますと

$\pi(V_{\tau_1}) = v_{\tau_1}$ となることは τ_1 の定義から明らかです。

故に $m(\tau_1) = \dim(1 - V_{\tau_1}^* V_{\tau_1}) - \dim(P_1 - V_{\tau_1} V_{\tau_1}^*) = n-1$

以上より $\mathrm{Ext}^w \mathcal{O}_n = \mathbb{Z}/(n-1)$ となりました。 //

引き続き Paschke - Salinas [10] は、G を 2つの cyclic group の free product とし、G の left regular representation によって生成された C*-algebra $C_r^*(G)$ とした時

$$C_r^*(G) \otimes M_n \not\cong C_r^*(G) \otimes M_m \quad (n \neq m)$$

を、trivial extension を利用して、示しています。

References.

[1] W. Arveson, A note on essentially normal operators, Proc. Royal Irish Acad., Ser. A, 74(1974), 143-146.

[2] ―――――――, Notes on extensions of C*-algebras, Duke Math.J., 44(1977), 329-355.

[3] I.D.Berg, An extension of the Weyl-von Neumann theorem to normal operators, Trans. Amer. Math. Soc., 160(1971), 365-371.

[4] L.G.Brown, R.G.Douglas and P.A.Fillmore, Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions of C*-algebras, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, New York, 345(1973), 58-128.

[5] ―――, ――― and ―――, Extensions of C*-algebras and K-homology, Ann. Math., 105(1977), 265-324.

[6] M.-D. Choi and E.G.Effros, The completely positive lifting problem for C*-algebras, Ann. Math., 104(1976), 585-609.

[7] J.Cuntz, Simple C*-algebras generated by isometries, Comm.Math.Phys., 57(1977), 173-185.

[8] P.R.Halmos, Ten problems in Hilbert spsce, Bull. Amer. Math. Soc., 76(1970), 887-933.

[9] W.L.Paschke and N.Salinas, Matrix algebras over O_n, Preprint.

[10] ――― and ―――, C*-algebras associated with free products of groups, Notices Amer. Math. Soc., 26(1979), A-105, # 763-47-5.

[11] M.V.Pimsner and S.T.Popa, The Ext-groups of some C*-algebras considered by J.Cuntz, Rev.Roum.Math.Pures et Appl., 23(1978), 1069-1076.

[12] W.Sikonia, The von Neumann converse of Weyl's theorem, Indiana Univ. Math. J., 21(1971), 121-124.

[13] W.F.Stinespring, Positive functions on C*-algebras, Proc.Amer.Math.Soc., 6(1955), 211-216.

[14] J.Tomiyama, C*-環の拡大について, RIMS 講究録, 320(1978), 135-150.

[15] D.Voiculescu, A non-commutative Weyl-von Neumann theorem, Rev.Roum. Math.Pures et Appl., 21(1976), 97-113.